دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
دوره ششم، شماره بیست و سوم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

خواص ساختاری ضرب خارجی اعداد فازی و کاربردهای آن

رباب علی‌خانی[۱*]

[۱] گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۹/۰۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۸/۰۳

چکیده

در حساب اعداد فازی، عمل ضرب و جمع بر اساس اصل توسیع زاده بنا نهاده شده است. این ضرب از دیدگاه نظری و عملی دارای چندین خاصیت غیرطبیعی است. برای غلبه بر چنین معایبی اخیراً یک عمل ضرب جدید با عنوان ضرب خارجی ارائه شده است. مزیت اصلی این ضرب این است که شکل اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای تحت ضرب خارجی حفظ می‌شود و از دیدگاه محاسباتی خیلی کاربردی‌تر از ضرب معمولی است. بنابراین ضرب خارجی دو عدد فازی می‌تواند یک انتخاب دیگر به جای ضرب معمولی بدست آمده از اصل توسیع زاده، در مسائل کاربردی باشد. هدف این مقاله، ارائه‌ی فرمولی صریح برای ضرب خارجی اعداد فازی مثلثی بر اساس ضرب اسکالر اعداد فازی و سپس با استفاده از آن فرمولی برای طول ضرب خارجی دو عدد فازی مثلثی و مشتق ضرب خارجی دو تابع فازی مثلثی است. همچنین در این مقاله رابطه‌ی بین هسته ضرب خارجی و معمولی اعداد فازی بیان شده است. در نهایت، به عنوان یک کاربرد، مفهوم ضرب خارجی در معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی اول همگن با ضرایب متغییر فازی بکار برده شده و جواب‌های مثلثی آن تحت مشتق‌پذیری تعمیم یافته بدست آورده می‌شود. چندین مثال برای بیان کارایی نتایج نظری و مقایسه با روش‌های پ‌ی‌ش‌ی‌ن آورده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ضرب خارجی، اعداد فازی مثلثی، ضرایب متغییر فازی، مشتق‌پذیری تعمیم یافته، معادلات دیفرانسیل فازی خطی همگن.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: alikhani@tabrizu.ac.ir

۱- مقدمه

ابهامات در زمینه‌های علمی گوناگون اساساً از کمبود دانش بشری نشأت می‌گیرد. نظریه‌ی مجموعه‌های فازی یک روش طبیعی برای مدل‌بندی سیستم‌های مرتبط با ابهامات است. اعداد فازی، زیرمجموعه‌های فازی روی اعداد حقیقی با چند ویژگی اضافی هستند. اعداد فازی به ما کمک می‌کنند تا ابهاماتی را که از احتمال بوجود نیامده‌اند را در یک روش ساده‌تر مدل‌بندی کنیم.

تعریف ضرب معمولی دو عدد فازی بر اساس اصل توسیع زاده بنا نهاده شده است [۱]. از نقطه نظر محاسباتی این نوع ضرب خیلی کاربردی و عملی در معادلات دیفرانسیل نیست. نتایج محاسبات ضرب معمولی دو عدد فازی به شکل تابع عضویت این دو عدد بستگی دارد. در حقیقت توابع عضویتی که دارای نظم خاصی نیستند باعث پیچیده شدن محاسبات ضرب معمولی می‌شوند. از طرفی، اعداد فازی که دارای شکل‌های ساده‌ای از توابع عضویت هستند مانند اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای، شهودی‌تر و دارای تعبیرهای طبیعی‌تری می‌باشند. ضرب معمولی دو عدد فازی حافظ شکل نیست، یعنی ضرب معمولی دو عدد فازی مثلثی (یا ذوزنقه‌ای)، از همان نوع نمی‌باشد. بمنظور بکار بردن ضرب معمولی، ما با سختی‌هایی مواجه می‌شویم که برای غلبه بر آنها نیازمند اعمال محدودیت‌هایی روی مسئله هستیم. اخیرا ضرب جدیدی با عنوان ضرب خارجی در مقالاتی چون [۲, ۳] معرفی شده و برخی خاصیت‌های تحلیلی و جبری آن مورد مطالعه قرار گرفته است. ویژگی اساسی این ضرب این است که شکل اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای حفظ می‌شود و از دیدگاه محاسباتی خیلی کاربردی‌تر از ضرب معمولی است.

منطبق بر این حقیقت که اعداد فازی در کارهای عملی بصورت اعداد فازی مثلثی یا ذوزنقه‌ای در نظر گرفته می‌شوند، در این مقاله بیشتر روی ضرب خارجی اعداد فازی مثلثی تمرکز شده و خواص جالبی از آنها بدست آورده می‌شود. در این راستا فرمول صریحی برای ضرب خارجی دو عدد فازی مثلثی بر اساس ضرب اسکالر اعداد فازی بیان می‌شود و با استفاده از آن فرمولی صریح برای طول ضرب خارجی دو عدد فازی مثلثی و مشتق ضرب خارجی دو تابع فازی مثلثی ارائه می‌شود. همچنین خواص بیشتری از ضرب خارجی اعداد فازی مانند رابطه‌ی بین هسته‌ی ضرب خارجی و معمولی دو عدد فازی و غیره مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

کاربردی از مفهوم ضرب خارجی در معادلات دیفرانسیل بصورت یک دیدگاه جدید از لحاظ تئوری در این مقاله ارائه می‌شود. خاصیت‌های بیان شده برای ضرب خارجی باعث می‌شوند که این ضرب به عنوان یک انتخاب ممکن دیگر از ضرب معمولی در معادلات دیفرانسیل خطی مورد استفاده قرار گیرد.

یک روش طبیعی برای مدل‌بندی سیستم‌های دینامیکی تحت مفروضات مبهم و نامطمئن، معادلات دیفرانسیل فازی است. همچنین در مدل‌بندی پدیده‌های دنیای واقعی، مسائل مقدار اولیه فازی به طور طبیعی و ذاتی، نه به صورت مدل فازی شده از یک مسئله کلاسیک، نمایان می‌شوند. چندین دیدگاه برای مطالعه معادلات دیفرانسیل فازی موجود است. اولین دیدگاه بر اساس مشتق هوکوهارا[۱] و تعمیم‌های آن پایه‌گذاری شده است. در دهه اخیر کارهای زیادی توسط چندین نویسنده در این راستا در زمینه تئوری و کاربردی انجام شده است [۱۰-۴].

دیدگاه دیگری نیز وجود دارد که در آن از اصل توسیع زاده[۲] به منظور توسیع معادلات دیفرانسیل کلاسیک به نوع فازی استفاده می‌شود [۱۳-۱۱]. در این روش، جواب معادلات دیفرانسیل کلاسیک با استفاده از اصل توسیع زاده به جواب معادلات دیفرانسیل فازی توسیع داده می‌شود. در این دیدگاه، تعبیر مشتق‌پذیری جواب وجود ندارد.

از دیگر دیدگاه‌هایی که در آن تعبیر مشتق فازی وجود ندارد می‌توان به روش تبدیلات خطی که در مقالاتی چون [۱۴, ۱۵] معرفی و بررسی شده، اشاره کرد. با استفاده از این روش، می‌توان به مجموعه‌ی وسیعی از جواب‌ها بدون تعبیر مشتق دست یافت. معادلات دیفرانسیل فازی خطی مرتبه‌ی اول یکی از ساده‌ترین معادلات دیفرانسیل فازی هستند که در مدل‌بندی پدیده‌های فیزیکی پدیدار می‌شوند. با استفاده از دیدگاه‌های بالا مقالاتی چون [۱۵, ۱۶, ۱۷ , ۱۸] به بررسی مسائل مقدار اولیه و مرزی فازی متناظر با معادله دیفرانسیل فازی خطی مرتبه اول که در آن‌ها ضریب تابع مجهول، تابع حقیقی مقدار است، پرداخته شده است. حال حالتی را که در آن تمام پارامترها و شرایط اعمال شده روی معادله بطور همزمان فازی باشند، را در نظر بگیرید. مقالاتی چون [۱۹, ۲۰] حل عددی معادله‌ی همگن متناظر با معادله‌ی بالا را مورد مطالعه قرار داده‌اند و مقاله‌ی [۲۱] به بررسی جواب‌های تحلیلی چنین معادله‌ای پرداخته است. در چنین حالتی، ما با یک مسئله‌ی دشوار مواجه هستیم که شامل تعبیر ضرب دو عدد فازی است. در مقالات اشاره شده، عمل ضرب بصورت

[۱] Hukuhara

[۲] Zadeh

ضرب معمولی بر پایه‌ی اصل توسیع زاده در نظر گرفته شده است و دارای سختی‌های اشاره شده در بالا هستند.
ضرب خارجی به ما این امکان را می‌دهد تا مشکلات اشاره شده در بالا را تا حد امکان رفع نماییم . بدین علت در این مقاله، مفهوم ضرب خارجی را به جای ضرب معمولی در مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی از معادله دیفرانسیل فازی خطی مرتبه‌ی اول همگن وارد نموده و جواب‌های تحلیلی آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.
ساختار این مقاله بدین ترتیب است: در بخش ۲، مفاهیم و تعاریف اولیه‌ی اعداد فازی و بویژه اعداد فازی مثلثی بیان می‌شود. در بخش ۳، حساب دیفرانسیل توابع فازی مثلثی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. بخش ۴ به مفاهیم ضرب خارجی اعداد فازی و خواص آن و برخی قضایا اختصاص داده می‌شود و مثال‌های شهودی در ارتباط با آن‌ها آورده می‌شود. کاربرد مفهوم ضرب خارجی در معادلات دیفرانسیل فازی در بخش ۵ مطرح و جواب‌های صریح از معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه‌ی اول خطی ارائه می‌شود. در نهایت در بخش ۶ نتیجه‌گیری بیان می‌شود.

۲- مفاهیم و تعاریف اولیه

در این بخش به بیان بعضی مفاهیم و تعاریف و قضایای اساسی می‌پردازیم که در بخش‌های آتی مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

فضای اعداد فازی با نماد R_f نمایش داده می‌شود. به ازای هر $۰ < \alpha \leq ۱$ ، α-برش از $u \in R_f$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$[u]^\alpha = [u_-^\alpha, u_+^\alpha] = \{x \in \mathbb{R};\ u(x) \geq \alpha\}.$$

عدد فازی مثلثی با نماد $u = \langle u_l, u_c, u_r \rangle$ که درآن $u_l \leq u_c \leq u_r$ ، نمایش داده می‌شود و α-برش آن بصورت

$$[u]^\alpha = [u_l + (u_c - u_l)\alpha, u_r - (u_r - u_c)\alpha],$$

است. فضای اعداد فازی مثلثی با نماد R_T نشان داده می‌شود.
به ازای $u, v \in R_f$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ ، جمع $u + v$ و ضرب اسکالر $\lambda \cdot u$ در فرم α-برش آن بترتیب بصورت‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$[u + v]^\alpha = [u]^\alpha + [v]^\alpha,$$

$$[\lambda \cdot u]^\alpha = \lambda \cdot [u]^\alpha,$$

که در آن $[u]^\alpha + [v]^\alpha$ و $\lambda \cdot [u]^\alpha$ بترتیب به معنی جمع دو بازه و ضرب بین یک اسکالر و یک بازه است. در حالت خاص که $u = \langle u_l, u_c, u_r \rangle$ و $v = \langle v_l, v_c, v_r \rangle$ دو عدد فازی مثلثی باشند، آنگاه جمع تعریف شده در بالا بصورت

$$u + v = \langle u_l + v_l, u_c + v_c, u_r + v_r \rangle,$$

و ضرب اسکالر بصورت

$$\lambda \cdot u = \begin{cases} \langle \lambda u_l, \lambda u_c, \lambda u_r \rangle, & \lambda \geq ۰, \\ \langle \lambda u_r, \lambda u_c, \lambda u_l \rangle, & \lambda < ۰. \end{cases}$$

تبدیل می‌شود.
توجه کنید که یک عدد حقیقی، یک عدد فازی مثلثی است که $u_l = u_c = u_r$.
اگر u و v دو عدد فازی باشند، آنگاه $w = u \cdot v$ بر اساس اصل توسیع زاده بصورت $[w]^\alpha = [w_-^\alpha, w_+^\alpha]$ تعریف می‌شو د که در آن به ازای هر $\alpha \in [۰,۱]$ داریم

$$w_-^\alpha = \min\{u_-^\alpha v_-^\alpha, u_-^\alpha v_+^\alpha, u_+^\alpha v_-^\alpha, u_+^\alpha v_+^\alpha\},$$

و

$$w_-^\alpha = \max\{u_-^\alpha v_-^\alpha, u_-^\alpha v_+^\alpha, u_+^\alpha v_-^\alpha, u_+^\alpha v_+^\alpha\}.$$

اگر $u \in R_f$ ، آنگاه طول u بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{len}\,[u]^\alpha = u_+^\alpha - u_-^\alpha, \quad \forall \alpha \in [۰,۱].$$

بنابراین نتیجه می‌شود طول عدد فازی مثلثی u به ازای هر $\alpha \in [۰,۱]$ بصورت زیر است

$$\text{len}\,[u]^\alpha = (u_r - u_l) - \alpha(u_r - u_l).$$

فرض کنید $u, v \in R_f$ باشند. اگر یک عدد فازی منحصربفرد مانند $u \in R_f$ وجود داشته باشد بطوریکه $v + w = u$ ، آنگاه w تفاضل هوکوهارای u و v نامیده می‌شود و با نماد $u \ominus v$ بیان می‌شود.

۳- حساب دیفرانسیل توابع فازی مثلثی

تذکر: از این به بعد در سرتاسر این مقاله، تابع مقدار-عدد فازی مثلثی $f: \mathbb{R} \to R_T$ را تابع فازی مثلثی می‌نامیم.

تعریف ۳-۱. (ر.ک. [۳]) تابع فازی مثلثی $f: (a,b) \to R_T$ را بصورت $f(x) = \langle f_l(x), f_c(x), f_r(x) \rangle$ در نظر بگیرید. انتگرال تابع f بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\int_a^b f(x)dx = \langle \int_a^b f_l(x)dx\ , \int_a^b f_c(x)dx\ , \int_a^b f_r(x)dx \rangle.$$

تعریف ۳-۲. (ر. ک. [۳، ۵]) فرض کنید $f: (a,b) \to R_f$ و $x_۰ \in (a,b)$ *تابع* f *مشتق‌پذیر تعمیم یافته در* $x_۰$ *است اگر وجود داشته باشد* $f'(x_۰) \in R_f$ *بطوریکه*

۱. برای $h > 0$ های بحد کافی کوچک تفاضل‌های هوکاهارای $f(x_0 + h) \ominus f(x_0)$ و $f(x_0) \ominus f(x_0 - h)$ موجود باشند و داشته باشیم

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) \ominus f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0-h)}{h} = f'(x_0).$$

۲. برای $h > 0$ های بحد کافی کوچک تفاضل‌های هوکاهارای $f(x_0) \ominus f(x_0 + h)$ و $f(x_0 - h) \ominus f(x_0)$ موجود باشند و داشته باشیم

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0+h)}{-h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0-h) \ominus f(x_0)}{-h} = f'(x_0).$$

۳. برای $h > 0$ های بحد کافی کوچک تفاضل‌های هوکاهارای $f(x_0 + h) \ominus f(x_0)$ و $f(x_0 - h) \ominus f(x_0)$ موجود باشند و داشته باشیم

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) \ominus f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0-h) \ominus f(x_0)}{-h} = f'(x_0).$$

۴. برای $h > 0$ های بحد کافی کوچک تفاضل‌های هوکاهارای $f(x_0) \ominus f(x_0 + h)$ و $f(x_0) \ominus f(x_0 - h)$ موجود باشند و داشته باشیم

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0+h)}{-h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0-h)}{h} = f'(x_0).$$

تذکر: گوییم f مشتق‌پذیر نوع اول، دوم، سوم و یا چهارم است اگر بترتیب مشتق‌پذیر تعمیم یافته در حالت ۱، ۲، ۳ و یا ۴ باشد.

لم ۳-۱. (ر. ک. [۳]) تابع فازی مثلثی $f: (a,b) \to R_T$ را بصورت $f(x) = \langle f_l(x), f_c(x), f_r(x) \rangle$ در نظر بگیرید که در آن توابع حقیقی مقدار f_i $(i = l, c, r)$ مشتق‌پذیر روی (a,b) باشند. گوییم f مشتق‌پذیر نوع اول در $x_0 \in (a,b)$ است اگر و تنها اگر

$$f'(x_0) = \langle f_l'(x_0), f_c'(x_0), f_r'(x_0) \rangle$$

یک عدد فازی مثلثی باشد. بطور مشابه گوییم f مشتق‌پذیر نوع دوم در $x_0 \in (a,b)$ است اگر و تنها اگر

$$f'(x_0) = \langle f_r'(x_0), f_c'(x_0), f_l'(x_0) \rangle$$

یک عدد فازی مثلثی باشد.

لم ۳-۲. (ر.ک. [۳، ۱۶]) فرض کنید $f, g: (a,b) \to R_T$ دو تابع مشتق‌پذیر تعمیم یافته روی (a,b) باشند.

۱. اگر f, g مشتق‌پذیر نوع اول روی (a,b) باشند، آنگاه $f + g$ مشتق‌پذیر نوع اول روی (a,b) است و به ازای هر $x \in (a,b)$ داریم

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

۲. اگر f, g مشتق‌پذیر نوع دوم روی (a,b) باشند، آنگاه $f + g$ مشتق‌پذیر نوع دوم روی (a,b) است و به ازای هر $x \in (a,b)$ داریم

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

۳. فرض کنید تفاضل هوکاهارای $f \ominus g$ روی (a,b) موجود باشد. اگر f مشتق‌پذیر نوع اول و g مشتق‌پذیر نوع دوم روی (a,b) باشند، آنگاه $f \ominus g$ مشتق‌پذیر نوع اول روی (a,b) است و به ازای هر $x \in (a,b)$ داریم

$$(f \ominus g)'(x) = f'(x) + (-1)g'(x).$$

٤. فرض کنید تفاضل هوکاهارای $f \ominus g$ روی (a,b) موجود باشد. اگر f مشتق‌پذیر نوع دوم و g مشتق‌پذیر نوع اول روی (a,b) باشند، آنگاه $f \ominus g$ مشتق‌پذیر نوع دوم روی (a,b) است و به ازای هر $x \in (a,b)$ داریم

$$(f \ominus g)'(x) = f'(x) + (-1)g'(x).$$

دو قضیه زیر نتایجی بیشتر از مشتقات $f + g$ و $f \ominus g$ را بیان می‌کند که بیان دیگری از قضایای از مقاله [۳، ۱۲] هستند.

لم ۳-۳. (ر.ک. [۳، ۱۶]) فرض کنید $f, g: (a,b) \to R_T$ دو تابع مشتق‌پذیر تعمیم یافته روی (a,b) باشند.

۱. اگر f مشتق‌پذیر نوع اول و g مشتق‌پذیر نوع دوم روی (a,b) باشند و تفاضل هوکاهارای $f'(x) \ominus (-1)g'(x)$ برای هر $x \in (a,b)$ موجود باشد، آنگاه $f + g$ مشتق‌پذیر نوع اول روی (a,b) است و برای هر $x \in (a,b)$ داریم

$$(f + g)'(x) = f'(x) \ominus (-1)g'(x).$$

۲. اگر f مشتق‌پذیر نوع دوم و g مشتق‌پذیر نوع اول روی (a,b) باشند و تفاضل هوکاهارای $f'(x) \ominus (-1)g'(x)$ برای هر $x \in (a,b)$ موجود باشد، آنگاه $f + g$ مشتق‌پذیر نوع دوم روی (a,b) است و برای هر $x \in (a,b)$ داریم

$$(f + g)'(x) = f'(x) \ominus (-1)g'(x).$$

اثبات: فرض کنید

$$f(x) = \langle f_l(x), f_c(x), f_r(x) \rangle$$

و

$$g(x) = \langle g_l(x), g_c(x), g_r(x) \rangle.$$

در ادامه حالت ۱ را ثابت می‌کنیم، بقیه حالت‌ها را می‌توان بطور مشابه ثابت کرد.

بنا به فرض چون f مشتق‌پذیر نوع اول و g مشتق‌پذیر نوع دوم روی (a,b) است، بنابراین داریم

$$f'(x) = \left(f_l'(x), f_c'(x), f_r'(x)\right)$$

و

$$g'(x) = \left(g_l'(x), g_c'(x), g_r'(x)\right).$$

از طرفی چون بنا به فرض تفاضل هوکاهارای

$$f'(x) \ominus (-1)g'(x)$$

موجود است، پس عبارت زیر یک تابع فازی مثلثی است

$$\left(f_l'(x) + g_l'(x), f_c'(x) + g_c'(x), f_r'(x) + g_r'(x)\right) = f'(x) \ominus (-1)g'(x).$$

این بدین معنی است که $f + g$ مشتق‌پذیر نوع اول است و $(f + g)'(x) = f'(x) \ominus (-1)g'(x)$.■

لم زیر مشتق تابع $f(x)\cdot g(x)$ را بیان می‌کند که درآن f یک تابع حقیقی مقدار و g یک تابع فازی است. این لم یک بیان دیگر از نتایج مقاله‌ی [۱۶] است.

لم۳-۴. (ر. ک. [۱۶]) فرض کنید تابع حقیقی $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر و تابع فازی $g:(a,b) \to R_f$ مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته روی $\mathbb{R}$ باشند.

۱. اگر $f(x)f'(x) > 0$ و g مشتق‌پذیر نوع اول روی (a,b) باشند، آنگاه $f \cdot g$ مشتق‌پذیر نوع اول است و به ازای هر $x \in (a,b)$ داریم
$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$

۲. اگر $f(x)f'(x) < 0$ و g مشتق‌پذیر نوع دوم روی (a,b) باشند، آنگاه $f \cdot g$ مشتق‌پذیر نوع دوم است و به ازای هر $x \in (a,b)$ داریم
$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$

۳. اگر $f(x)f'(x) > 0$ و g مشتق‌پذیر نوع دوم روی (a,b) باشند و همچنین تفاضل هوکاهارای زیر موجود باشد، آنگاه $f \cdot g$ مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته است و به ازای هر $x \in (a,b)$ داریم
$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) \ominus (-1)f(x) \cdot g'(x).$

۴. اگر $f(x)f'(x) > 0$ و g مشتق‌پذیر نوع دوم روی (a,b) باشند و همچنین تفاضل هوکاهارای زیر موجود باشد، آنگاه $f \cdot g$ مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته است و به ازای هر $x \in (a,b)$ داریم
$(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) \ominus (-1)f'(x) \cdot g(x).$

۵. اگر $f(x)f'(x) < 0$ و g مشتق‌پذیر نوع اول روی (a,b) باشند و همچنین تفاضل هوکاهارای زیر موجود باشد، آنگاه $f \cdot g$ مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته است و به ازای هر $x \in (a,b)$ داریم
$(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) \ominus (-1)f'(x) \cdot g(x).$

۶. اگر $f(x)f'(x) < 0$ و g مشتق‌پذیر نوع اول روی (a,b) باشند و همچنین تفاضل هوکاهارای زیر موجود باشد، آنگاه $f \cdot g$ مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته است و به ازای هر $x \in (a,b)$ داریم
$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) \ominus (-1)f(x) \cdot g'(x).$

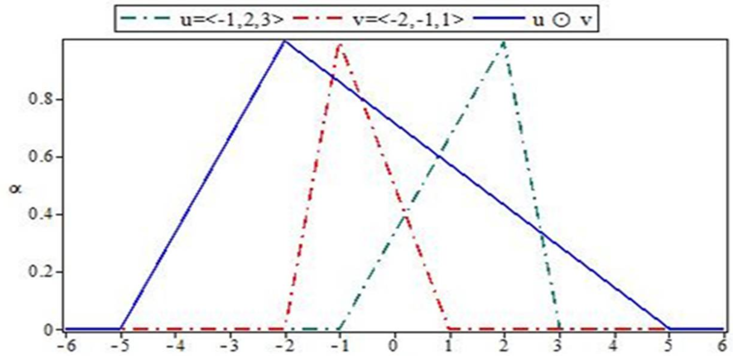
لم ۳-۵. (ر.ک. [۳, ۵]) فرض کنید $f:(a,b) \to R_f$ یک تابع فازی پیوسته باشد. آنگاه $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ مشتق‌پذیر نوع اول است و به ازای هر $x \in (a,b)$ داریم $g'(x) = f(x)$.

۴- ضرب خارجی دو عدد فازی

این بخش ابتدا به مفهوم و تعریف ضرب خارجی از اعداد فازی اختصاص داده می‌شود [۲, ۳]. سپس تعریف معادل ضرب خارجی برای اعداد فازی مثلثی مطرح شده و برخی خواص دیگر آن مانند طول و هسته و غیره برای ضرب خارجی اعداد فازی بیان می‌شود و در نهایت فرمولی صریح برای مشتق دو تابع فازی مثلثی ارائه می‌شود.

تعریف ۴-۱: (ر.ک. [۲, ۳]) گوییم عدد فازی u مثبت است اگر نقطه‌ی پایانی چپ هسته‌ی آن یعنی u_-^1 مثبت باشد. همچنین گوییم عدد فازی u منفی است اگر نقطه‌ی پایانی راست هسته‌ی آن یعنی u_+^1 منفی باشد. مجموعه‌ی اعداد فازی مثبت (منفی) را با نماد R_f^+ (R_f^-) نمایش می‌دهیم.

نکته : فرض کنید $u = (u_l, u_c, u_r)$ یک عدد فازی مثلثی باشد. گوییم u مثبت (منفی) است اگر هسته‌ی آن یعنی u_c مثبت (منفی) باشد. مجموعه‌ی اعداد فازی مثلثی مثبت (منفی) را با نماد R_T^+ (R_T^-) نمایش می‌دهیم.



شکل ۱. گراف دو عدد فازی مثلثی و ضرب خارجی آن‌ها

تعریف ۴-۲: (ر.ک. [۲، ۳]) فرض کنید u و v دو عدد فازی مثبت باشند. ضرب خارجی u و v یک عدد فازی مثبت است که با نماد $w = u \odot v$ نمایش داده شده و بصورت زیر تعریف می‌شود

$$[w]^\alpha = [w_-^\alpha, w_+^\alpha],$$

که در آن به ازای $\alpha \in [0,1]$ داریم

$$w_-^\alpha = u_-^\alpha v_-^1 + u_-^1 v_-^\alpha - u_-^1 v_-^1,$$

$$w_+^\alpha = u_+^\alpha v_+^1 + u_+^1 v_+^\alpha - u_+^1 v_+^1.$$

نکته: فرض کنید $u = \langle u_l, u_c, u_r\rangle$ و $v = \langle v_l, v_c, v_r\rangle$ دو عدد فازی مثلثی مثبت باشند. ضرب خارجی این دو عدد بصورت زیر تعریف می‌شود

$$u \odot v = \langle u_l v_c + v_l u_c - u_c v_c, u_c v_c, u_r v_c + v_r u_c - u_c v_c\rangle.$$

تعمیمی از تعریف ضرب خارجی برای اعداد فازی منفی بصورت زیر داده شده است.

تعریف ۴-۳. (ر.ک. [۲، ۳]) فرض کنید u و v دو عدد فازی باشند.

۱. اگر u مثبت و v منفی باشد، آنگاه ضرب خارجی این دو عدد بصورت

$$u \odot v = -(u \odot (-v))$$

تعریف می‌شود که یک عدد فازی منفی است.

۲. اگر u منفی و v مثبت باشد، آنگاه ضرب خارجی این دو عدد بصورت

$$u \odot v = -((-u) \odot v)$$

تعریف می‌شود که یک عدد فازی منفی است.

۳. اگر u منفی و v منفی باشد، آنگاه ضرب خارجی این دو عدد بصورت

$$u \odot v = (-u) \odot (-v)$$

تعریف می‌شود که یک عدد فازی مثبت است.

تذکر: لازم بذکر است که اگر $\lambda \in \mathbb{R},\ u \in R_f$ باشد، آنگاه $\lambda \odot u = \lambda \cdot u$.

قضیه‌ی زیر به بیان چند خاصیت جبری اساسی ضرب خارجی می‌پردازد که در مقاله‌ی [۲] آورده شده است.

قضیه ۴-۱. (ر.ک. [۲]) فرض کنید u, v, w اعداد فازی مثبت یا منفی باشند. آنگاه داریم

۱. $(-u) \odot v = u \odot (-v) = -(u \odot v)$

۲. $u \odot v = v \odot u$

۳. $(u \odot v) \odot w = u \odot (v \odot w)$

۴. اگر u, v دارای علامت یکسانی باشند، آنگاه داریم

$$(u + v) \odot w = u \odot v + u \odot w.$$

قضیه‌ی زیر بیان دیگری از ضرب خارجی دو عدد فازی مثلثی است که در قضایا و نتایج بعدی بطور مکرر مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

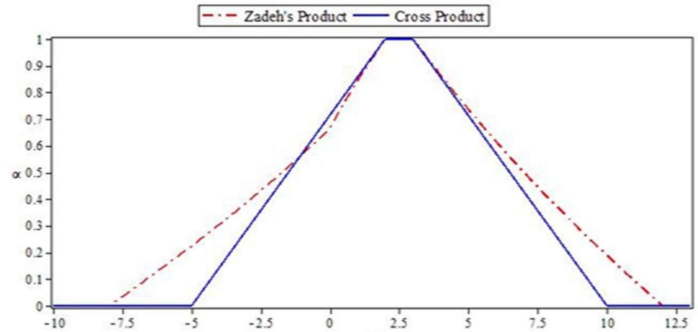
قضیه ۴-۲. فرض کنید $u = \langle u_l, u_c, u_r\rangle$ و $v = \langle v_l, v_c, v_r\rangle$ اعداد فازی مثلثی مثبت یا منفی باشند. آنگاه

$$u \odot v = u_c \cdot v + (u - u_c) \cdot v_c,$$

که در آن

$$u - u_c = \langle u_l - u_c, 0, u_r - u_c\rangle.$$

اثبات: برهان این قضیه با استفاده از تعریف ضرب خارجی اعداد فازی مثلثی براحتی نتیجه می‌شود. ■



شکل ۲. گراف ضرب‌های معمولی و خارجی مثال٤-۲

قضیه٤-۳. اگر $k_۱, k_۲$ دو عدد ثابت حقیقی و $u = \langle u_l, u_c, u_r\rangle$ و $v = \langle v_l, v_c, v_r\rangle$ اعداد فازی مثلثی مثبت یا منفی باشند، آنگاه داریم

$$k_۱ \cdot u \odot k_۲ \cdot v = k_۱ k_۲ \cdot (u \odot v).$$

اثبات:

$$k_۱ \cdot u \odot k_۲ \cdot v = (k_۱ \cdot u)_c \cdot (k_۲ \cdot v) + (k_۲ \cdot v)_c \cdot (k_۱ \cdot u - (k_۱ \cdot u)_c) = k_۱ u_c \cdot (k_۲ \cdot v) + k_۲ v_c \cdot (k_۱ \cdot u - k_۱ u_c) = k_۱ k_۲ u_c \cdot v + k_۲ k_۱ v_c \cdot (u - u_c) = k_۱ k_۲ \cdot (u \odot v).$$

در اثبات بالا از خواص ضرب اسکالر اعداد فازی استفاده شده است.■

مثال زیر نشان می‌دهد که استفاده از قضیه‌ی۴-۲ خیلی راحت‌تر از تعریف ضرب خارجی دو عدد فازی است.

مثال٤-۱. دوعدد فازی مثلثی

$u = \langle -۱,۲,۳\rangle$ و $v = \langle -۲, -۱,۱\rangle$

را در نظر بگیرید. با استفاده از تعریف ۴-۲ داریم

$$u \odot v = -(u \odot (-v)) = -(\langle -۱,۲,۳\rangle \odot \langle -۱,۱,۲\rangle) = -\langle -۵,۲,۵\rangle = \langle -۵, -۲,۵\rangle.$$

با استفاده از قضیه ۴-۲ داریم

$$u \odot v = ۲ \cdot \langle -۲, -۱,۱\rangle - ۱ \cdot \langle -۳,۰,۱\rangle = \langle -۵, -۲,۵\rangle.$$

گراف u, v و $u \odot v$ در شکل ۱ نمایش داده شده است.

در مثال زیر ضرب معمولی و خارجی دو عدد فازی محاسبه می‌شود و مشاهده خواهد شد که در محاسبه‌ی ضرب معمولی نیاز به محاسبه‌ی مینیمم و ماکزیمم موجود در تعریف داریم. در حقیقت زمانیکه حداقل یکی از دو عدد فازی بصورت دقیق معین نشده باشند، محاسبه‌ی ضرب معمولی کار ساده‌ای نخواهد بود.، بطور مثال در معادلات دیفرانسیل فازی خطی که ضرب ضریب فازی در مجهول معادله ظاهر می‌شود.

مثال ٤-۲. دوعدد فازی ذوزنقه‌ای

$u = \langle -۲,۱,۳\rangle$ و $v = \langle ۱,۲,۳,۴\rangle$

را در نظر بگیرید. برای محاسبه‌ی ضرب معمولی داریم

$$(< -۲,۱,۳ > \cdot < ۱,۲,۳,۴ >)^{\alpha}_{-} = \min\{(-۲ + ۳\alpha)(۱ + \alpha), (-۲ + ۳\alpha)(۴ - \alpha), (۳ - ۲\alpha)(۱ + \alpha), (۳ - ۲\alpha)(۴ - \alpha)\} = \begin{cases} (-۲ + ۳\alpha)(۴ - \alpha), & ۰ \leq \alpha \leq \frac{۲}{۳} \\ (-۲ + ۳\alpha)(۱ + \alpha), & \frac{۲}{۳} < \alpha \leq ۱. \end{cases}$$

$$(\langle -۲,۱,۳\rangle \cdot \langle ۱,۲,۳,۴\rangle)^{\alpha}_{+} = \max\{(-۲ + ۳\alpha)(۱ + \alpha), (-۲ + ۳\alpha)(۴ - \alpha), (۳ - ۲\alpha)(۱ + \alpha), (۳ - ۲\alpha)(۴ - \alpha)\} = (۳ - ۲\alpha)(۴ - \alpha).$$

از طرفی برای محاسبه‌ی ضرب خارجی داریم

$$\begin{aligned}(< -2,1,3 > \odot < 1,2,3,4 >)^{\alpha}_{-} &= ۲(-۲ + ۳\alpha) + (۱ + \alpha) - ۲ \\ &= -۵ + ۷\alpha.\end{aligned}$$

$$(< -۲,۱,۳ > \odot < ۱,۲,۳,۴ >)^{\alpha}_{+} = ۳(۳ - ۲\alpha) + (۴ - \alpha) - ۳ = ۱۰ - ۷\alpha.$$

گراف $u \cdot v$ و $u \odot v$ در شکل ۲ نمایش داده شده است.

قضیه ٤-٤. فرض کنید u و v اعداد فازی مثبت یا منفی باشند. آنگاه

$$\mathrm{core}(u \odot v) = \mathrm{core}(u) \cdot \mathrm{core}(v),$$

و

$$\mathrm{core}(u \cdot v) \subseteq \mathrm{core}(u \odot v),$$

که در رابطه‌ی اول، ضرب طرف راست به معنی ضرب بین دو بازه است.

اثبات: فرض کنید u و v هر دو عدد فازی مثبت باشند. از تعریف ضرب خارجی داریم

$$core(u \odot v) = [u \odot v]^1 = [u_-^1 v_-^1, u_+^1 v_+^1] = core(u) \cdot core(v).$$

از طرف دیگر داریم

$$\min\{u_-^1 v_-^1, u_-^1 v_+^1, u_+^1 v_-^1, u_+^1 v_+^1\} \geq u_-^1 v_-^1,$$

و

$$\max\{u_-^1 v_-^1, u_-^1 v_+^1, u_+^1 v_-^1, u_+^1 v_+^1\} \leq u_+^1 v_+^1.$$

دو رابطه‌ی بالا نشان می‌دهند که

$$core(u \cdot v) \subseteq core(u \odot v).$$

حال فرض کنید $u \in R_f^-$ و $v \in R_f^+$. با استفاده از تعریف ۴-۳ و روابط بالا داریم

$$core(u \odot v) = core\left(-((-u) \odot v)\right) = -core((-u) \odot v) = -(core(-u) \cdot core(v)) = core(u) \cdot core(v).$$

چون بنا به روابط بالا داریم

$$core((-u) \cdot v) \subseteq core((-u) \odot v),$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم

$$core(u \cdot v) = -core((-u) \cdot v) \subseteq -core((-u) \odot v) = core(u \odot v).$$

اثبات برای حالت‌های دیگر بطور مشابه انجام می‌شود.■

مثال ۴-۳. عدد فازی ذوزنقه‌ای $u = < -1,1,2,3 >$ و عدد فازی

$$v(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ (2-x)^2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. α-برش‌های پایینی و بالایی $u \cdot v$ را بصورت زیر داریم

$$(u \cdot v)_-^\alpha = (-1 + 2\alpha)(2 - \sqrt{\alpha})$$

$$(u \cdot v)_+^\alpha = (3 - \alpha)(2 - \sqrt{\alpha}),$$

و α-برش‌های پایینی و بالایی $u \odot v$ را بصورت زیر داریم

$$(u \odot v)_-^\alpha = \frac{1}{2}(-1 + 2\alpha) + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\alpha}\right) - \frac{1}{2} = \alpha + \sqrt{\alpha} - \frac{3}{2}$$

$$(u \odot v)_+^\alpha = (3 - \alpha) + 2\left(2 - \sqrt{\alpha}\right) - 2 = 5 - \alpha - 2\sqrt{\alpha}$$

گراف این دو ضرب در شکل ۳ نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که

$$core(u \cdot v) \subset core(u \odot v).$$

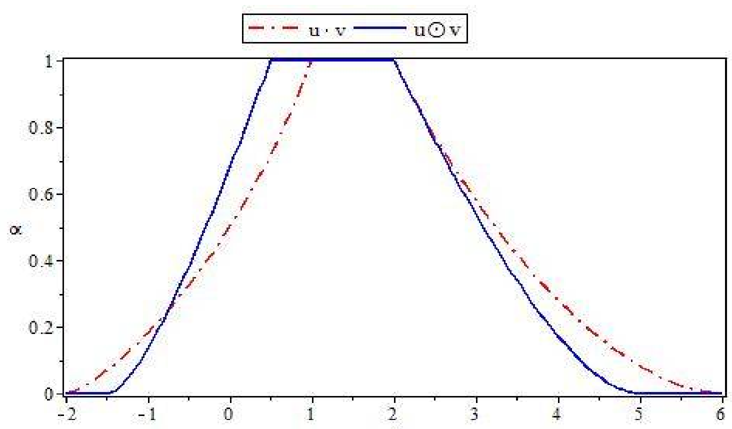
قضیه‌ی زیر طول $u \odot v$ را به ازای هر $\alpha \in [0,1]$ بدون محاسبه‌ی ضرب خارجی فقط با دانستن طول‌های u و v محاسبه می‌کند.

قضیه ٤-٥. فرض کنید $v, u \in R_T$ و $\alpha \in [0,1]$. آنگاه داریم

$$len([u \odot v]^\alpha) = |v_c| len([u]^\alpha) + |u_c| len([v]^\alpha).$$

اثبات: می‌دانیم

$$u \odot v = u_c \cdot v + (u - u_c) \cdot v_c.$$



شکل ۳. مقایسه هسته‌ی ضرب معمولی و خارجی دو عدد فازی

بنابراین

$$\mathrm{len}([u \odot v]^\alpha) = \mathrm{len}(u_c \cdot v + (u - u_c) \cdot v_c) = \mathrm{len}(u_c \cdot v) + \mathrm{len}((u - u_c) \cdot v_c) = |u_c|\mathrm{len}(v) + |v_c|\mathrm{len}(u - u_c) = |u_c|\mathrm{len}(v) + |v_c|\mathrm{len}(u). \blacksquare$$

مثال ٤-٤: دوعدد فازی مثلثی

$u =< -۱,۲,۳ >$ و $v =< -۲,-۱,۱ >$

را در نظر بگیرید. می‌دانیم

$$\mathrm{len}([u]^\alpha) = ۴ - ۴\alpha,\ \ \mathrm{len}([v]^\alpha) = ۳ - ۳\alpha.$$

آنگاه داریم

$$\mathrm{len}([u \odot v]^\alpha) = ۲(۳ - ۳\alpha) + (۴ - ۴\alpha) = ۱۰ - ۱۰\alpha.$$

قضیه زیر مشتق تابع $f(x) \odot g(x)$ را بیان می‌کند که در آن f, g هر دو تابع فازی مثلثی در نظر گرفته شده‌اند و بجای ضرب معمولی از ضرب خارجی استفاده شده است. بنا به این حقیقت که $f \odot g = f \cdot g$ در حالتی که f تابع حقیقی باشد، بنابراین این قضیه تعمیمی از لم ۳-۴ است.

قضیه ٤-٦. دو تابع فازی مثلثی $f, g : (a, b) \to R_T$ را که مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته هستند، در نظر بگیرید.

۱. اگر f, g مشتق‌پذیر نوع اول باشند و

$$f(x) \odot f'(x) > ۰, g(x) \odot g'(x) > ۰,$$

آنگاه $f \odot g$ مشتق‌پذیر نوع اول است و داریم

$$(f \odot g)'(x) = f'(x) \odot g(x) + f(x) \odot g'(x).$$

۲. اگر f, g مشتق‌پذیر نوع اول باشند و

$$f(x) \odot f'(x) < ۰, g(x) \odot g'(x) > ۰,$$

آنگاه $f \odot g$ مشتق‌پذیر نوع اول است و داریم

$$(f \odot g)'(x) = (f'(x) \odot g(x) + f(x) \odot g'(x) \ominus f_c'(x)(g_l - g_r, ۰, g_r - g_l),$$

بشرط اینکه تفاضل هوکاهارای زیر موجود باشد

$$f_c(x) \cdot g'(x) \ominus (-۱)\ f_c'(x) \cdot g(x).$$

۳. اگر f, g مشتق‌پذیر نوع اول باشند و

$$f(x) \odot f'(x) > ۰, g(x) \odot g'(x) < ۰,$$

آنگاه $f \odot g$ مشتق‌پذیر نوع اول است و داریم

$$(f \odot g)'(x) = (f'(x) \odot g(x) + f(x) \odot g'(x))\ \ominus g_c'(x)(f_l - f_r, ۰, f_r - f_l),$$

بشرط اینکه تفاضل هوکاهارای زیر موجود باشد

$$f'(x) \cdot g_c(x) \ominus (-۱)f(x) \cdot g_c'(x).$$

٤. اگر f, g مشتق‌پذیر نوع اول باشند و

$$f(x) \odot f'(x) < ۰, g(x) \odot g'(x) < ۰,$$

آنگاه $f \odot g$ مشتق‌پذیر نوع اول است و داریم

$$(f \odot g)'(x) = (f'(x) \odot g(x) + f(x) \odot g'(x)) \ominus (f_c'(x)(g_l - g_r, ۰, g_r - g_l) + g_c'(x)(f_l - f_r, ۰, f_r - f_l)),$$

بشرط اینکه تفاضلات هوکاهارای زیر موجود باشند

$$f_c(x) \cdot g'(x) \ominus (-۱)\ f_c'(x) \cdot g(x),$$

$$f'(x) \cdot g_c(x) \ominus (-۱)f(x) \cdot g_c'(x).$$

٥. اگر f, g مشتق‌پذیر نوع دوم باشند و

$$f(x) \odot f'(x) < ۰, g(x) \odot g'(x) < ۰,$$

آنگاه $f \odot g$ مشتق‌پذیر نوع دوم است و داریم

$$(f \odot g)'(x) = f'(x) \odot g(x) + f(x) \odot g'(x).$$

٦. اگر f, g مشتق‌پذیر نوع دوم باشند و

$$f(x) \odot f'(x) > ۰, g(x) \odot g'(x) < ۰,$$

آنگاه $f \odot g$ مشتق‌پذیر نوع دوم است و داریم

$$(f \odot g)'(x) = (f'(x) \odot g(x) + f(x) \odot g'(x)) \ominus f_c'(x)(g_l - g_r, ۰, g_r - g_l),$$

بشرط اینکه تفاضل هوکاهارای زیر موجود باشد

$$f_c(x) \cdot g'(x) \ominus (-۱)\ f_c'(x) \cdot g(x).$$

٧. اگر f, g مشتق‌پذیر نوع دوم باشند و

$$f(x) \odot f'(x) < ۰, g(x) \odot g'(x) > ۰,$$

آنگاه $f \odot g$ مشتق‌پذیر نوع دوم است و داریم

$$(f \odot g)'(x) = (f'(x) \odot g(x) + f(x) \odot g'(x)) \ominus g_c'(x)(f_l - f_r, ۰, f_r - f_l),$$

بشرط اینکه تفاضل هوکاهارای زیر موجود باشد

$$f'(x) \cdot g_c(x) \ominus (-۱)f(x) \cdot g_c'(x).$$

٨. اگر f, g مشتق‌پذیر نوع دوم باشند و

$f(x) \odot f'(x) > 0, g(x) \odot g'(x) > 0,$

آنگاه $f \odot g$ مشتق‌پذیر نوع دوم است و داریم

$$(f \odot g)'(x) = (f'(x) \odot g(x) + f(x) \odot g'(x)) \ominus (f_c'(x)(g_l - g_r, 0, g_r - g_l) + g_c{}'(x)(f_l - f_r, 0, f_r - f_l)),$$

بشرط اینکه تفاضلات هوکاهارای زیر موجود باشند

$$f_c(x) \cdot g'(x) \ominus (-1)\ f_c'(x) \cdot g(x),$$

$$f'(x) \cdot g_c(x) \ominus (-1) f(x) \cdot g_c{}'(x).$$

۹. اگر f مشتق‌پذیر نوع اول و g مشتق‌پذیر نوع دوم باشند و

$f(x) \odot f'(x) > 0, g(x) \odot g'(x) < 0,$

آنگاه $f \odot g$ مشتق‌پذیر نوع اول است و داریم

$$(f \odot g)'(x) = (f'(x) \odot g(x) \ominus (-1) f(x) \odot g'(x)),$$

بشرط اینکه تفاضلات هوکاهارای زیر موجود باشند

$$f_c'(x) \cdot g(x) \ominus (-1)\ f_c(x) \cdot g'(x),$$

$$f'(x) \cdot g_c(x) \ominus (-1) f(x) \cdot g_c{}'(x).$$

و مشتق‌پذیر نوع دوم است و داریم

$$(f \odot g)'(x) = (f(x) \odot g'(x) \ominus (-1) f'(x) \odot g(x)),$$

بشرط اینکه تفاضلات هوکاهارای زیر موجود باشند

$$f_c(x) \cdot g'(x) \ominus (-1)\ f_c'(x) \cdot g(x),$$

$$f(x) \cdot g_c'(x) \ominus (-1) f'(x) \cdot g_c(x).$$

۱۰. اگر f مشتق‌پذیر نوع اول و g مشتق‌پذیر نوع دوم باشند و

$f(x) \odot f'(x) > 0, g(x) \odot g'(x) > 0,$

آنگاه $f \odot g$ مشتق‌پذیر نوع اول است و داریم

$$(f \odot g)'(x) = (f'(x) \odot g(x) \ominus (-1) f(x) \odot g'(x)) + g_c{}'(x)(f_l - f_r, 0, f_r - f_l),$$

بشرط اینکه تفاضل هوکاهارای زیر موجود باشد

$$f_c'(x) \cdot g(x) \ominus (-1)\ f_c(x) \cdot g'(x).$$

۱۱. اگر f مشتق‌پذیر نوع اول و g مشتق‌پذیر نوع دوم باشند و

$f(x) \odot f'(x) < 0, g(x) \odot g'(x) < 0,$

آنگاه $f \odot g$ مشتق‌پذیر نوع دوم است و داریم

$$(f \odot g)'(x) = (f(x) \odot g'(x) \ominus (-1) f'(x) \odot g(x)) + f_c'(x)(g_l - g_r, 0, g_r - g_l),$$

بشرط اینکه تفاضل هوکاهارای زیر موجود باشد

$$f(x) \cdot g_c'(x) \ominus (-1) f'(x) \cdot g_c(x).$$

۱۲. اگر f مشتق‌پذیر نوع اول و g مشتق‌پذیر نوع دوم باشند و

$f(x) \odot f'(x) < 0, g(x) \odot g'(x) > 0,$

آنگاه $f \odot g$ مشتق‌پذیر نوع اول است و داریم

$$(f \odot g)'(x) = \left(f'(x) \odot g(x) \ominus (-1) f(x) \odot g'(x) \right) + \left(g_c'(x) \cdot (f_l - f_r, 0, f_r - f_l) \ominus f_c'(x) \cdot (g_l - g_r, 0, g_r - g_l) \right),$$

بشرط اینکه تفاضل هوکاهارای زیر موجود باشد

$$\left(f'(x) - f_c'(x)\right) \cdot g_c(x) + \left(f(x) - f_c(x)\right) \cdot g_c'(x)) \ominus (-1)(f_c'(x) \cdot g(x) + f_c(x) \cdot g'(x))$$

و $f \odot g$ مشتق‌پذیر نوع دوم است و داریم

$$(f \odot g)'(x) = (f(x) \odot g'(x) \ominus (-1) f'(x) \odot g(x)) + (f_c'(x)(g_l - g_r, 0, g_r - g_l) \ominus g_c{}'(x)(f_l - f_r, 0, f_r - f_l)),$$

بشرط اینکه تفاضل هوکاهارای زیر موجود باشد

$$(f_c'(x) \cdot g(x) + f_c(x) \cdot g'(x)) \ominus (-1)(f'(x) - f_c'(x)) \cdot g_c(x) + (f(x) - f_c(x)) \cdot g_c'(x).$$

اثبات: می‌دانیم

$$(f \odot g)(x) = f_c(x) \cdot g(x) + (f - f_c)(x) \cdot g_c(x),$$

که در آن g_c, f_c توابع حقیقی و $f - f_c, g$ توابع فازی مثلثی می‌باشند.

برای اثبات حالت ۱، با استفاده از فرضیات قضیه چون f, g مشتق‌پذیر نوع اول هستند و

$$f(x) \odot f'(x) > 0, \quad g(x) \odot g'(x) > 0,$$

بنابراین $f - f_c$ مشتق‌پذیر نوع اول است و داریم

$$f_c(x) f_c'(x) > 0,\ g_c(x) g_c{}'(x) > 0.$$

با استفاده از حالت ۱ لم ۳-۴ نتیجه می‌گیریم که $f_c(x)\cdot g(x)$ و $(f-f_c)(x)\cdot g_c(x)$ مشتق‌پذیر نوع اول هستند و داریم

$$\big(f_c(x)\cdot g(x)\big)' = f_c'(x)\cdot g(x) + f_c(x)\cdot g'(x),$$

$$\big((f-f_c)(x)\cdot g_c(x)\big)' = (f-f_c)'(x)\cdot g_c(x) + (f-f_c)(x)\cdot g_c'(x) = \big(f'(x)-f_c'(x)\big)\cdot g_c(x) + \big(f(x)-f_c(x)\big)\cdot g_c'(x).$$

با استفاده ازحالت ۱ لم ۳-۲، نتیجه می‌گیریم که $(f\odot g)(x)$ مشتق‌پذیر نوع اول است و داریم

$$(f\odot g)'(x) = f_c'(x)\cdot g(x) + f_c(x)\cdot g'(x) + \big(f'(x)-f_c'(x)\big)\cdot g_c(x) + \big(f(x)-f_c(x)\big)\cdot g_c'(x) = f'(x)\odot g(x) + f(x)\odot g'(x).$$

در ادامه تنها حالت ۲ و ۱۱ قضیه را ثابت می‌کنیم و بقیه‌ی حالت‌ها را می‌توان در یک روند مشابه ثابت کرد.

برای حالت ۲ با استفاده از فرض قضیه داریم

$$f(x)\odot f'(x) < ۰, \qquad g(x)\odot g'(x) > ۰,$$

بنابراین

$$f_c(x)f_c'(x) < ۰, \qquad g_c(x){g_c}'(x) > ۰.$$

همچنین چون از فرضیات قضیه f,g مشتق‌پذیر نوع اول هستند، بنابراین با استفاده از حالت ۱ لم ۳-۴ مشتق‌پذیری نوع اول عبارت زیر نتیجه می‌شود و داریم

$$\big((f-f_c)(x)\cdot g_c(x)\big)' = \big(f'(x)-f_c'(x)\big)\cdot g_c(x) + \big(f(x)-f_c(x)\big)\cdot g_c'(x).$$

همچنین با استفاده از حالت ۵ لم ۳-۴ مشتق‌پذیری نوع اول را برای $f_c(x)\cdot g(x)$ نتیجه می‌گیریم و داریم

$$\big(f_c(x)\cdot g(x)\big)' = f_c(x)\cdot g'(x)\ominus(-۱)\, f_c'(x)\cdot g(x),$$

بشرط اینکه تفاضل هوکاهارای ظاهر شده موجود باشد.
با استفاده ازحالت ۱ لم ۳-۲، نتیجه می‌گیریم که $(f\odot g)(x)$ مشتق‌پذیر نوع اول است و داریم

$$(f\odot g)'(x) = f_c(x)\cdot g'(x)\ominus(-۱)\, f_c'(x)\cdot g(x) + \big(f'(x)-f_c'(x)\big)\cdot g_c(x) + \big(f(x)-f_c(x)\big)\cdot g_c'(x) = f_c(x)\cdot g'(x) + \big(f(x)-f_c(x)\big)\cdot g_c'(x) + f_c'(x)\cdot g(x)\ominus f_c'(x)\cdot g(x) + \big(f'(x)-f_c'(x)\big)\cdot g_c(x)\ominus(-۱)f_c'(x)\cdot g(x) = f(x)\odot g'(x) + f'(x)\odot g(x)\ominus f_c'(x)(g(x)-g(x).$$

برای حالت ۱۱ با استفاده از فرضیات قضیه می‌دانیم f مشتق‌پذیر نوع اول و g مشتق‌پذیر نوع دوم است و

$$f(x)\odot f'(x) < ۰, \qquad g(x)\odot g'(x) < ۰.$$

بنابراین

$$f_c(x)f_c'(x) < ۰, \quad g_c(x)g_c'(x) < ۰.$$

با استفاده از حالت ۱ لم ۳-۴ نتیجه می‌گیریم که $f_c(x)\cdot g(x)$ مشتق‌پذیر نوع دوم است و داریم

$$\big(f_c(x)\cdot g(x)\big)' = f_c(x)\cdot g'(x) + {f_c}'(x)\cdot g(x),$$

با استفاده از حالت ۶ لم ۳-۴ نتیجه می‌گیریم که $(f-f_c)(x)\cdot g_c(x)$ مشتق‌پذیر نوع دوم است و داریم

$$\big((f-f_c)(x)\cdot g_c(x)\big)' = \big(f(x)-f_c(x)\big)\cdot g_c'(x)\ominus(-۱)\big(f'(x)-f_c'(x)\big)\cdot g_c(x).$$

تفاضل هوکاهارای بالا بدلیل وجود تفاضل هوکاهارای زیر بنا بر فرض قضیه، موجود است

$$f(x)\cdot g_c'(x)\ominus(-۱)f'(x)\cdot g_c(x).$$

با استفاده ازحالت ۲ لم ۳-۲، نتیجه می‌گیریم که $(f\odot g)(x)$ مشتق‌پذیر نوع دوم است و داریم

$$(f\odot g)'(x) = f_c(x)\cdot g'(x) + f_c'(x)\cdot g(x) + \big(f(x)-f_c(x)\big)\cdot g_c'(x)\ominus(-۱)\big(f'(x)-f_c'(x)\big)\cdot g_c(x) = f_c(x)\cdot g'(x) + \big(f(x)-f_c(x)\big)\cdot g_c'(x) + f_c'(x)\cdot g(x)\ominus(-۱)\big(f'(x)-f_c'(x)\big)\cdot g_c(x) + (-۱)f_c'(x)\cdot g(x)\ominus(-۱)f_c'(x)\cdot g(x) = f(x)\odot g'(x)\ominus(-۱)f'(x)\odot g(x) + f_c'(x)\cdot g(x) + (-۱)f_c'(x)\cdot g(x) = f(x)\odot g'(x)\ominus(-۱)f'(x)\odot g(x) + f_c'(x)\cdot\big(g(x)-g(x)\big).$$

بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود.■

مثال ٤-٥. دو تابع فازی مثلثی $f,g:\mathbb{R}\to R_T$ را بصورت زیر در نظر بگیرید

$$f(x) = x\cdot\langle ۱,۲,۳\rangle,$$

$$g(x) = \exp(-x)\cdot\langle -۱,۱,۲\rangle.$$

با استفاده از حالت اول لم ۳-۴ به ازای $x > ۰$ تابع f مشتق‌پذیر نوع اول است و داریم

$f'(x) = \langle 1,2,3\rangle.$

با استفاده از حالت دوم لم تابع g همواره مشتق‌پذیر نوع دوم است و داریم

$$g'(x) = -\exp(-x)\cdot\langle -1,1,2\rangle.$$

تفاضلات هوکاهارای

$$2\exp(-x)\cdot\langle-1,1,2\rangle \ominus (-1)2x\,(-\exp(-x))\cdot\langle-1,1,2\rangle = 2\exp(-x)\cdot\langle -1+x, 1-x, 2-2x\rangle = 2\exp(-x)\,(1-x)\cdot\langle-1,1,2\rangle,$$

و

$$\exp(-x)\cdot\langle1,2,3\rangle \ominus (-1)x\,(-\exp(-x))\cdot\langle1,2,3\rangle = \exp(-x)\cdot\langle 1-x, 2-2x, 3-3x\rangle = \exp(-x)\,(1-x)\cdot\langle1,2,3\rangle,$$

به ازای $x < 1$ وجود دارند. بنابراین با استفاده از حالت ۹ قضیه ۴-۶ ، $(f\odot g)(x)$ به ازای $0 < x < 1$ مشتق‌پذیر نوع اول است . از طرفی چون به ازای $x > 1$ تفاضلات هوکاهارای

$$2x\,(-\exp(-x))\cdot\langle-1,1,2\rangle \ominus (-1)2\exp(-x)\cdot\langle-1,1,2\rangle = -2\exp(-x)\cdot\langle -x+1, x-1, 2x-2\rangle = -2\exp(-x)\,(x-1)\cdot\langle-1,1,2\rangle,$$

و

$$x\,(-\exp(-x))\cdot\langle1,2,3\rangle \ominus (-1)\exp(-x)\cdot\langle1,2,3\rangle = -\exp(-x)\cdot\langle x-1, 2x-2, 3x-3\rangle = -\exp(-x)\,(x-1)\cdot\langle1,2,3\rangle,$$

وجود دارند. بنابراین با استفاده از حالت ۹ قضیه ۴-۶، $(f\odot g)(x)$ به ازای $x > 1$ مشتق‌پذیر نوع دوم است. با استفاده از حالت دوم لم ۳-۴ به ازای $x < 0$ توابع f, g مشتق‌پذیر نوع دوم هستند و داریم

$$f'(x) = \langle 1,2,3\rangle.$$

$$g'(x) = -\exp(-x)\cdot\langle -1,1,2\rangle.$$

بنابراین با استفاده از حالت ۵ قضیه ۴-۶ ، $(f\odot g)(x)$ به ازای $x < 0$ مشتق‌پذیر نوع دوم است و در تمامی حالت‌های بالا داریم

$$(f\odot g)'(x) = (f'(x)\odot g(x) \ominus (-1)f(x)\odot g'(x)) = \exp(-x)\,(1-x)\cdot\langle-3,2,5\rangle.$$

گراف تابع فازی مثلثی

$$(f\odot g)(x) = xe^{-x}\langle-3,2,5\rangle,$$

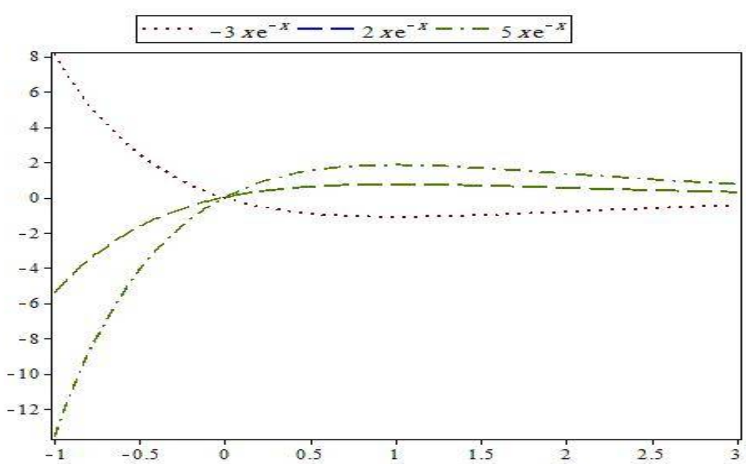
در شکل ۴ نمایش داده شده است.

۵- کاربرد ضرب خارجی در معادلات دیفرانسیل فازی خطی با ضرایب فازی

در این بخش، مسئله‌ی مقدار اولیه برای معادله دیفرانسیل فازی خطی همگن با ضرایب فازی را به فرم زیر در نظر می‌گیریم.

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} y'(t) = a(t)\odot y(t),\\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

که در آن $a\colon (t_0, t_1) \to R_T$ و $y_0 \in R_T$ و $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$.



شکل ٤. گراف سه مولفه از تابع فازی مثلثی f⊙g مثال ٤-٥

شایان ذکر است که مسئله‌ی بالا حالتی از مسئله‌ی مطرح شده در [۱۲] است که در آنها ضریب $a(t)$ بصورت تابع حقیقی فرض شده است. بنابراین در مسئله‌ی بالا بحث ضرب بین دو تابع فازی پیش می‌آید که بنا به مشکلاتی که در استفاده از ضرب معمولی بین دو عدد فازی وجود دارد، در این مقاله ضرب خارجی به جای ضرب معمولی بین دو عدد فازی در نظر گرفته شده است. لازم بذکر است که در مقاله‌ی [۱۷] از ضرب معمولی برای همین مسئله استفاده شده است.

در قضیه‌ی زیر جواب‌های تحلیلی مسئله‌ی (I) مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند.

قضیه ۵-۱. دو تابع فازی مثلثی $a:(t_۰,t_۱)\to R_T$ و $y_۰\in R_T$ را در نظر بگیرید.

۱. اگر $a(t)>۰$ به ازای هر $t\in(t_۰,t_۱)$، آنگاه $y_۱$ تعریف شده بصورت

$$y_۱(t)=\exp\left(\int_{t_۰}^{t}a_c(s)ds\right)\Big(y_۰+y_{۰c}\int_{t_۰}^{t}\big(a(s)-a_c(s)\big)\,ds\Big)$$

مشتق‌پذیر نوع اول نسبت به t است و در مسئله‌ی (I) صدق می‌کند.

۲. اگر $a(t)<۰$ به ازای هر $t\in(t_۰,t_۱)$، آنگاه $y_۲$ تعریف شده بصورت

$$y_۲(t)=\exp\left(\int_{t_۰}^{t}a_c(s)ds\right)\Big(y_۰\ominus(-۱)y_{۰c}\int_{t_۰}^{t}\big(a(s)-a_c(s)\big)\,ds\Big)$$

مشتق‌پذیر نوع دوم نسبت به t است و در مسئله‌ی (I) صدق می‌کند بشرط اینکه تفاضلات هوکاهارای ظاهر شده در فرمول $y_۲$ و

$$\exp\left(\int_{t_۰}^{t}a_c(s)ds\right)y_{۰c}\big(a(t)-a_c(t)\big)\ominus(-۱)a_c(t)\exp\left(\int_{t_۰}^{t}a_c(s)ds\right)y_{۰c}\int_{t_۰}^{t}\big(a(s)-a_c(s)\big)\,ds,$$

موجود باشند.

اثبات: ابتدا حالت ۱ را ثابت می‌کنیم. با استفاده از لم ۳-۵ می‌دانیم

$$y_{۰c}\int_{t_۰}^{t}\big(a(s)-a_c(s)\big)\,ds,$$

مشتق‌پذیر نوع اول است. همچنین داریم

$$\Big(y_{۰c}\int_{t_۰}^{t}\big(a(s)-a_c(s)\big)\,ds\Big)'=y_{۰c}\big(a(t)-a_c(t)\big).$$

چون بنا به فرض حالت ۱ قضیه، یعنی مثبت بودن $a(t)$ به ازای هر $t\in(t_۰,t_۱)$ و بنا بر لم ۳-۴ داریم

$$\Big(\exp\Big(\int_{t_۰}^{t}a_c(s)ds\Big)y_۰\Big)'=a_c(t)\exp\Big(\int_{t_۰}^{t}a_c(s)ds\Big)y_۰$$

و

$$\Big(\exp\Big(\int_{t_۰}^{t}a_c(s)ds\Big)y_{۰c}\int_{t_۰}^{t}\big(a(s)-a_c(s)\big)\,ds\Big)'=a_c(t)\exp\Big(\int_{t_۰}^{t}a_c(s)ds\Big)y_{۰c}\int_{t_۰}^{t}\big(a(s)-a_c(s)\big)\,ds+\exp\Big(\int_{t_۰}^{t}a_c(s)ds\Big)\big(a(t)-a_c(t)\big)y_{۰c}.$$

با جمع بستن دو معادله‌ی بالا و با استفاده قضیه ۴-۲ داریم

$$y_۱'(t)=a_c(t)\cdot y_۱(t)+\big(a(t)-a_c(t)\big)\cdot y_{۱c}(t)=a(t)\odot y_۱(t).$$

برای اثبات حالت ۲ فرض می‌کنیم که تمامی تفاضلات هوکاهارای ظاهر شده در $y_۲$ موجود باشند. با استفاده از لم۳-۵ می‌دانیم

$$y_{۰c}\int_{t_۰}^{t}\big(a(s)-a_c(s)\big)\,ds,$$

مشتق‌پذیر نوع اول است. همچنین داریم

$$\Big(y_{۰c}\int_{t_۰}^{t}\big(a(s)-a_c(s)\big)\,ds\Big)'=y_{۰c}\big(a(t)-a_c(t)\big).$$

چون بنا به فرض حالت ۱ قضیه، یعنی منفی بودن $a(t)$ به ازای هر $t\in(t_۰,t_۱)$ و بنا بر حالت ۲ لم ۳-۴ مشتق‌پذیری نوع دوم را برای عبارت زیر داریم

$$\Big(\exp\Big(\int_{t_۰}^{t}a_c(s)ds\Big)y_۰\Big)'=a_c(t)\exp\Big(\int_{t_۰}^{t}a_c(s)ds\Big)y_۰.$$

و بنا بر حالت ۵ از لم ۳-۴ مشتق‌پذیری نوع اول را برای عبارت زیر داریم

$$\left(\exp\left(\int_{t_0}^{t} a_c(s)ds\right) y_{0c} \int_{t_0}^{t}\big(a(s) - a_c(s)\big)\,ds\right)' = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a_c(s)ds\right) y_{0c}\big(a(t) - a_c(t)\big) \ominus (-1)a_c(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a_c(s)ds\right) y_{0c} \int_{t_0}^{t}\big(a(s) - a_c(s)\big)\,ds,$$

بشرط اینکه تفاضل هوکاهارای بالا موجود باشد. با جمع بستن دو معادله‌ی بالا و با استفاده از قضیه ۴-۲ داریم

$$y_2'(t) = a_c(t)\cdot y_2(t) + \big(a(t) - a_c(t)\big)\cdot y_{2c}(t) = a(t) \odot y_2(t),$$

و بنابراین اثبات کامل است.

نتیجه‌گیری

با توجه به ویژگی‌های برجسته‌ی ضرب خارجی اعداد فازی نسبت به ضرب معمولی، خاصیت‌های اساسی دیگر از این ضرب برای اعداد فازی با توابع عضویت مثلثی شکل ارائه شد (اگر چه این خاصیت‌ها را می‌توان برای اعداد فازی با توابع عضویت دلخواه نیز مورد بحث و بررسی قرار داد). حساب دیفرانسیل فازی می‌تواند با استفاده از مفهوم ضرب خارجی توابع فازی توسیع داده شود و در توسیع نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل فازی مورد استفاده قرار گیرد. در این راستا، مشتق ضرب خارجی دو تابع فازی مثلثی ارائه شد که می‌تواند برای توابع فازی دلخواه نیز ارائه شود. با توجه به کاربردی بودن ضرب خارجی اعداد فازی از دیدگاه محاسباتی، این ضرب به جای ضرب معمولی در معادلات دیفرانسیل فازی خطی مرتبه‌ی اول همگن با ضرایب فازی مورد استفاده قرار گرفت و جواب‌های تحلیلی مسئله‌ی مقدار اولیه فازی متناظر با آن ارائه شد.

فهرست منابع

[1] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. Information and Control 8:338-353 (1965)

[2] B. Bede, J. Fodor. Product Type Operations between Fuzzy Numbers and their Applications in Geology. Acta Polytechnica Hungarica 3:123–139 (2006)

[3] B. Bede. Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic. Springer, London (2013)

[4] R. Alikhani. Interval fractional integrodifferential equations without singular kernel by fixed point in partially ordered sets. Computational Methods for Differential Equations 5: 12-29 (2017)

[5] B. Bede, S. G. Gal. Generalizations of the differetiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equation. Fuzzy Sets and Systems 151:581- 599 (2005)

[6] O. Kaleva. Fuzzy differential equations. Fuzzy Sets and Systems 24: 301-317(1987)

[7] Y. Chalco-Cano, H. Romn-Flores, On new solutions of fuzzy differential equations. Chaos, Solitons and Fractals 38: 112-119 (2008)

[8] R. Alikhani, F. Bahrami. Fuzzy partial differential equations under the cross product of fuzzy Numbers. Information Sciences 494:80-99 (2019)

[9] T. Allahviranloo. A method for solving nth order fuzzy linear differential equations. International Journal of Computer Mathematics 89: 730-742 (2009)

[10] R. Alikhani, F. Bahrami, S. Parvizi. Differential calculus of fuzzy multi-variable functions and its applications to fuzzy partial differential equations. Fuzzy Sets and Systems 375:100-120 (2019)

[11] J. J. Buckley, T. Feuring. Fuzzy differential equations. Fuzzy sets and Systems 110:43-54 (2000)

[12] M. T. Mizukoshi, L. C. Barros, Y. Chalco-Cano, H. Román-Flores, R. C. Bassanezi. Fuzzy differential equations and the extension principle. Information Sciences ١٧٧:٣٦٢٧-٣٦٣٥ (٢٠٠٧)

[13] F. Bahrami, R. Alikhani, A. Khastan. Transport equation with fuzzy data. Iranian Journal of Fuzzy Systems 15: 67-78 (2018)

[14] N. Gasilov, A. G. Fatullayev, S. E. Amrahov, A. Khastan, A new approach to fuzzy initial value problem. Soft Computing ١٨:٢١٧_ ٢٢٥ (٢٠١٤)

[15] N. Gasilov, S. E. Amrahov, A. G. Fatullayev. Solution of linear differential equations with fuzzy boundary values. Fuzzy Sets and Systems 257:169–183 (2014)

[16] B. Bede, I. J. Rudas, A. L. Bencsik. First order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability. Information Sciences 177:1648–1662 (2007)

[17] L. Jamshidi, T. Allahviranloo. Solution of the first order fuzzy differential equations with generalized differentiability. Journal of Linear and Topological Algebra. 3:159-171 (2014)

[18] A. Khastan, J. J. Nieto and R. R. Lopez. Variation of constant formula for first order fuzzy differential equations. Fuzzy Sets and Systems. 177:20-33 (2011)

[19] D. Vivek, K. Kanagarajan, S. Harikrishnan. Numerical solution of first-order fully fuzzy differential equations by Runge-Kutta Fehlberg method under strongly generalized H-differentiability. Journal of Soft Computing and Applications 2017:1-23 (2017)

[20] P. Darabi, S. Moloudzadeh, H. Khandani. A numerical method for solving first-order fully fuzzy differential equation under strongly generalized H-differentiability. Soft Computing. 20:4085-4098 (2016)

[21] M. Chehlabi, T. Allahviranloo. Positive or negative solutions to first-order fully fuzzy linear differential equations under generalized differentiability. Applied Soft Computing 70:359-370 (2018)