دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هشتم، بهمن و اسفند ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

میانگین‌پذیری‌ضعیف جبربرلینگ حاصل ضرب‌های‌آزاد

الهام قیصری[۱]، اکرم یوسف زاده[۲]، محمدصادق عسگری[۳*]

[۱و۳] گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی، تهران، ایران
[۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مبارکه، مبارکه، اصفهان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۳/۰۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۱۱/۲۱

چکیده

در این مقاله، برای گروه گسسته $G=\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_n$ و یک تابع وزن چند جمله‌ای ω_α، نشان می‌دهیم که جبر برلینگ $\ell^1(G,\omega_\alpha)$ میانگین‌پذیر ضعیف نیست و گروه دو وجهی $\mathrm{D}_\infty=\mathbb{Z}_2*\mathbb{Z}_2$ میانگین‌پذیر است اما $\ell^1(D_\infty,\omega)$ میانگین پذیر ضعیف نیست. همچنین نشان می‌دهیم برای یک تابع وزن پیوسته ω روی گروه G، جبر برلینگ $\ell^1(G,\omega)$، تحت شرایطی اگر میانگین پذیر ضعیف باشد آنگاه ω کراندار است.

واژه‌های کلیدی: مشتق، میانگین‌پذیرضعیف، وزن، گروه فشرده موضعی، حاصلضرب آزاد.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: msasgari@yahoo.com

۱– مقدمه

میانگین‌پذیری $\ell^1(G,\omega)$ برای گروه فشرده موضعی G بطور کامل در سال ۱۹۹۰ توسط گرونبک[1] مشخص شد. او نشان داد که $\mathcal{L}^1(G,\omega)$ میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر G میانگین‌پذیر و تابع $\omega(t)\omega(t^{-1})$ روی G کراندار باشد [۴]. میانگین‌پذیری ضعیف ابتدا در [۱] روی $\mathcal{L}^1(G,\omega)$ مطالعه شد. نویسندگان آن مقاله نشان دادند که برای گروه جمعی $\mathbb{Z}$ از اعداد صحیح و برای وزن $\omega_\alpha = (1+|x|)^\alpha$ روی $\mathbb{Z}$، $\mathcal{L}^1(\mathbb{Z},\omega_\alpha)$ میانگین‌پذیرضعیف است اگر و فقط اگر $0 \le \alpha < \frac{1}{2}$. سپس در [۳] نشان داده شد، $\mathcal{L}^1(\mathbb{Z},\omega)$ که ω یک تابع وزن است، میانگین پذیر ضعیف است اگر و فقط اگر

$$\lim_{n\to\infty}\inf\frac{\omega(n)\omega(-n)}{n}=0$$

اخیرا در [۹] نشان داده شده که برای گروه آبلی G و برای هر $t \in G$ اگر

$$\lim_{n\to\infty}\inf\frac{\omega(t^n)\omega(t^{-n})}{n}=0$$

آنگاه $\mathcal{L}^1(G,\omega)$ میانگین پذیر ضعیف است. میانگین پذیری ضعیف $\ell^1(G,\omega)$ برای دو گروه غیرآبلی و فشرده موضعی G، که عبارتند از گروه آزاد $\mathbb{F}_2$ که میانگین‌پذیر نیست و $(ax+b)$-گروه، که میانگین پذیر است، در سال ۲۰۱۵ توسط شپلسکا[2] [۱۰] بررسی شده است. برای جزئیات بیشتر در باره میانگین پذیری به مراجع [۸، ۱۲، ۱۳] رجوع شود. ما در این مقاله میانگین پذیری ضعیف $\ell^1(G,\omega)$ را برای گروه غیرآبلی و گسسته $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ که ضرب آزاد $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}_n$ است نشان می‌دهیم و شرایطی را برای زیر گروه‌های G بیان می‌کنیم.

در این ادامه این بخش، تعاریف اساسی میانگین‌پذیری ضعیف را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱–۱: فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک A– دو مدول باناخ باشد. فضای دوگان X^* از X با عمل مدول که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f.a(x) = f(ax)$$
$$a.f(x) = f(xa)$$

برای هر $a \in A$ و $x \in X$ و $f \in X^*$، یک A– دو مدول باناخ است.

تعریف ۱–۲: فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک A– دو مدول باناخ باشد. یک تابع‌خطی $D : A \to X$ با این ویژگی که برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم

$$D(ab) = aD(b) + D(a)b$$

یک مشتق نامیده می‌شود. همچنین برای هر $x \in X$ نگاشت مشتق $D : A \to X$ با ضابطه

$$D(a) = a.x - x.a$$

یک مشتق درونی نام دارد.

تعریف ۱–۳: جبر باناخ A میانگین پذیر گفته می‌شود اگر برای هر A– دو مدول باناخ X، هر مشتق

$$D : A \to X^*$$

درونی باشد، به عبارت دیگر عنصر $\zeta \in X^*$ چنان وجود داشته باشد که

$$D(a) = a.\zeta - \zeta.a \qquad (a \in A)$$

به ویژه اگر هر مشتق $D : A \to A^*$ درونی باشد، A را میانگین‌پذیر ضعیف می‌گویند.

یادآوری می‌کنیم که یک وزن روی گروه گسسته G، یک تابع $\omega: G \to \mathbb{R}^+$ است به طوری که برای هر $x, y \in G$ در نامساوی $\omega(xy) \le \omega(x)\omega(y)$ صدق می‌کند.

تعریف ۱–۴: فضای $\ell^1(G,\omega)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{\ell^1(G,\omega) = \{f = \sum_{x\in G} f(x)\delta_x \in \mathbb{C}^G : \sum_{x\in G}|f(x)|\omega(x) < \infty\}}$$

با نرم

$$\|f\|_{\ell^1(G,\omega)} = \sum_{x\in G}|f(x)|\omega(x)$$

1. N. Gronbaek
2. V. Shepelska

و ضرب پیچش

$$f * g(x) = \sum_{y\in G} f(y^{-1}x)g(y), \qquad \forall x \in G$$

یک جبر باناخ است که جبر برلینگ گسسته نامیده می‌شود.
یادآور می‌شویم که اگر G یک گروه فشرده موضعی باشد، $\mathcal{L}^1(G)$ همواره یک جبر باناخ میانگین‌پذیر ضعیف است [۳].

۲- نتایج اصلی

مطالب زیر نتایج اصلی است که تاکنون در رابطه با میانگین‌پذیری جبر برلینگ $\mathcal{L}^1(G,\omega)$ به اثبات رسیده است.

قضیه ۲-۱: [۱۱] فرض کنید G یک گروه فشرده موضعی آبلی و ω یک وزن روی آن باشد. در این صورت $\mathcal{L}^1(G,\omega)$ میانگین‌پذیر ضعیف است اگر و فقط اگر هیچ همریختی غیر صفر $\phi: G \to (\mathbb{C},+)$ وجود نداشته باشد بقسمی‌که

$$\sup_{x\in G} \frac{|\phi(x)|}{\omega(x)\omega(x^{-1})} < \infty.$$

قضیه بعد نتیجه مشابهی برای گروه گسسته دلخواه G ارائه می‌کند. این قضیه که توسط پورعباس[3] ثابت شده است، یک شرط لازم برای میانگین‌پذیری $\ell^1(G,\omega)$ بیان می‌کند. شایان ذکر است که عکس این قضیه برقرار نیست. برای یک مثال نقض [۲] را ببینید.

قضیه ۲-۲: [۶] فرض کنید G یک گروه گسسته و ω یک وزن روی آن باشد. اگر یک همریختی گروهی $\phi: G \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به قسمی‌که

$$\sup_{x\in G} \frac{|\phi(x)|}{\omega(x)\omega(x^{-1})} < \infty$$

آنگاه $\ell^1(G,\omega)$ میانگین‌پذیرضعیف نیست.
لم کاربردی زیر شرایطی بر گروه گسسته G و وزن ω بیان می‌کند که منجر به عدم پیوستگی $\ell^1(G,\omega)$ می‌گردد. ما از این لم در فصل بعد استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲-۳: [۲] فرض کنید G یک گروه گسسته و ω یک وزن روی آن باشد. اگر یک تابع $\Psi: G \to \mathbb{R}$ و $x_0 \in G$ و ثابت $C > 0$ وجود داشته باشند بقسمی‌که ω کراندار دور از صفر روی کلاس مزدوجی $\{yx_0y^{-1}\}_{y\in G}$ باشد،

$$|\Psi(xy) - \Psi(yx)| \le C\omega(x)\omega(y) \qquad (۲-۱)$$

و

$$\sup_{y\in G} \frac{|\Psi(yx_0y^{-1})|}{\omega(yx_0y^{-1})} = \infty, \qquad (۲-۲)$$

آنگاه $\ell^1(G,\omega)$ میانگین‌پذیرضعیف نیست.

تعریف ۲-۴: G را یک گروه تابدار گوییم هرگاه هر عضو گروه G دارای مرتبه متناهی باشد و G را یک گروه بی‌تاب گوییم هرگاه هر عضو غیرهمانی آن دارای مرتبه نامتناهی باشد.

لم ۲-۵: فرض کنید G یک گروه تابدار باشد. در این‌صورت هیچ همریختی غیر صفر $\phi: G \to (\mathbb{C},+)$ وجود ندارد.

برهان. فرض کنید چنین همریختی وجود داشته باشد بنابراین برای هر $m \in \mathbb{N}$، $\phi(x^m) = m\phi(x)$، اما چون G یک گروه تابدار است پس برای هر $x \in G$ عدد $m \in \mathbb{N}$ چنان وجود دارد که $\phi(x^m) = 0$ و لذا $\phi(x) = 0$ است.
با شیوه‌ای مشابه نتیجه زیر نیز به دست می‌آید.

نتیجه ۲-۶: اگر G یک گروه آبلی تابدار یا گروهی باشد که مولدهای آن مرتبه متناهی دارند، آنگاه برای هر تابع وزن ω بر G، $\ell^1(G,\omega)$ میانگین‌پذیرضعیف است.

مثال ۲-۷: فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $G = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_n$ در این‌صورت G یک گروه آبلی (نامتناهی) و تابدار است. پس هیچ همریختی غیربدیهی از G به $(\mathbb{C},+)$ وجود

3. A. Pourabbas

ندارد (توجه کنید که G نامتناهی مولد است). لذا برای هر وزن ω، جبر $\ell^1(G,\omega)$ میانگین پذیرضعیف است.

۳- وزن‌های چندجمله‌ای روی $G=\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_n$

در این بخش، وزن‌های چند جمله‌ای روی گروه $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_n$ را درنظر می‌گیریم و در ادامه نشان می‌دهیم بر خلاف قضیه‌ای از میانگین‌پذیری‌ضعیف برای جبرهای برلینگ گسسته و آبلی، وزن‌هایی وجود دارند که این جبرها، میانگین‌پذیرضعیف نیستند.
نتایج زیر که از مرجع [۱۰] استفاده می‌شوند در ادامه این مقاله از آن استفاده خواهیم کرد.

لم ۳-۱: فرض کنید $0<\alpha\le 1$. آنگاه برای هر $x,y\in\mathbb{R}$،

$$||x|^{\alpha}-|y|^{\alpha}|\le|x-y|^{\alpha}$$

لم ۳-۲: فرض کنید $x,y\in\mathbb{R}$ و $x,y\ge 0$، آنگاه وجود دارد $C>0$ که $x<Cy$ است.

تعریف ۳-۳: فرض کنید a و b به ترتیب دو مولد $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}_n$ باشند. ضرب آزاد $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}_n$، به صورت گروه $G=\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_n$ نمایش می‌دهیم. هر $x\in\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_n$ بصورت فرم غیرحذف‌شدنی $x=a^{k_1}b^{l_1}\dots a^{k_m}b^{l_m}$ است که $k_i\in\mathbb{Z}$ و $0\le l_i<n$ و همه l_i و k_i به‌غیر از k_1 و l_m برای هر $1\le i\le m$ و $m\in\mathbb{N}$ مخالف صفر هستند. طول x را به صورت

$$|x|=\sum_{i=1}^{m}(|k_i|+|l_i|)$$

تعریف می‌کنیم. مقدار $\sum_{i=1}^{m}k_i$ مجموع توان‌های a در x است و با $A(x)$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که A یک همریختی گروهی از $G=\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_n$ به $\mathbb{Z}$ است.
لازم به ذکر است که گزاره (۳-۶) و قضیه (۴-۴)، در [۱۰] برای گروه $\mathbb{F}_2$ اثبات شده است، برای گروه $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_n$ به طور دقیق قابل پیاده‌سازی نیست به همین دلیل در اینجا دو اثبات را می‌آوریم. ابتدا لم زیر را که در حالت کلی برای حاصلضرب آزاد گروهها برقرار است بیان می‌کنیم.

لم ۳-۴: فرض کنید A و B دو گروه باشند و دو عضو x و y از حاصلضرب آزاد $A*B$ با هم جابجا شوند. در این صورت یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد
الف) x و y در یک گروه دوری هستند.
ب) x و y در مزدوج یکسانی از A یا B هستند.

برهان. این مطلب نتیجه مستقیمی از قضیه (۴-۵) از [۵] است.

نتیجه ۳-۵: دو عضو از حاصلضرب آزاد $A*B$ که A و B دو گروه دوری هستند، جابجا می‌شوند اگر و فقط اگر در یک زیرگروه دوری از $A*B$ باشند.

گزاره ۳-۶: فرض کنید $\alpha>0$ باشد و ω_α یک تابع روی $G=\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_n$ باشد که برای هر $x\in G$، به صورت $\omega_\alpha=(1+|x|)^{\alpha}$ تعریف می‌شود. در این صورت ω_α یک وزن روی G است که وزن چندجمله‌ای نامیده می‌شود و $\ell^1(G,\omega_\alpha)$ میانگین پذیر ضعیف نیست.

برهان. چون تابع $|\ .\ |$ روی G در نامساوی مثلثی $|xy|\le|x|+|y|$ برای هر $x,y\in G$ صدق می‌کند بنابراین ω_α یک وزن روی G است زیرا برای هر $x,y\in G$ داریم

$$\begin{aligned}\omega_\alpha(x,y)&=(1+|xy|)^{\alpha}\\&\le(1+|x|+|y|)^{\alpha}\\&\le(1+|x|)^{\alpha}(1+|y|)^{\alpha}\\&=\omega_\alpha(x)\omega_\alpha(y).\end{aligned}$$

برای این‌که ثابت کنیم $\ell^1(G,\omega_\alpha)$ میانگین‌پذیر ضعیف نیست ابتدا حالت $\alpha>1/2$ را در نظر می‌گیریم. چون برای هر $t\in G$، $|A(t)|\le|t|$ است. پس دو حالت را در نظر می‌گیریم. ابتدا حالت $|t|\le|t^{-1}|$ را بررسی می‌کنیم، چون $\alpha>1/2$ پس داریم

$$\sup_{\substack{t\in G\\|t|\le|t^{-1}|}}\frac{|A(t)|}{\omega_\alpha(t)\omega_\alpha(t^{-1})}$$

$$= \sup_{\substack{t\in G\\ |t|\le|t^{-1}|}} \frac{|A(t)|}{(1+|t|)^{\alpha}(1+|t^{-1}|)^{\alpha}}$$
$$\le \sup_{\substack{t\in G\\ |t|\le|t^{-1}|}} \frac{|t|}{(1+|t|)^{\alpha}(1+|t^{-1}|)^{\alpha}}$$
$$\le \sup_{\substack{t\in G\\ |t|\le|t^{-1}|}} \frac{|t|^{\frac{1}{2}}}{(1+|t|)^{\alpha}}\frac{|t^{-1}|^{\frac{1}{2}}}{(1+|t^{-1}|)^{\alpha}} < \infty$$

برای حالت $|t| \le |t^{-1}|$ نیز بطور مشابه برقرار است و بنابراین خواهیم داشت

$$\sup_{t\in G}\frac{|A(t)|}{\omega_\alpha(t)\omega_\alpha(t^{-1})} < \infty.$$

چون $A: G \to \mathbb{Z}$ یک همریختی گروهی است بنابر قضیه (۲-۲) ثابت می‌شود که $\ell^1(G,\omega_\alpha)$ میانگین پذیر ضعیف نیست. اکنون حالتی که $0 < \alpha < 1/2$ است را در نظر می‌گیریم. در این حالت از لم (۳-۲) استفاده می‌کنیم. یک مقدار دلخواه $\beta \in (\alpha, 2\alpha)$ را انتخاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم که تابع $\psi: G \to \mathbb{R}$ بصورت زیر تعریف شود:

$$\psi(x) = \begin{cases} |t|^{\beta} & x = tat^{-1},\ t \in G \\ 0 & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

که tat^{-1} غیرحدف‌شدنی است. ادعا می‌کنیم که ψ در شرایط لم۲-۳ برای $x_0 = a$ صدق می‌کند. واضح است که وزن ω_α روی G کراندار دور از صفر است پس بخصوص روی $\{yay^{-1}\}_{y\in G}$ نیز چنین است. حال اثبات می‌کنیم که ψ در (۲-۱) برای $C > 0$ صدق می‌کند، به عبارت دیگر برای هر $x, y \in G$ داریم

$$|\psi(xy) - \psi(yx)| \le C\omega_\alpha(x)\omega_\alpha(y) \quad (۳\text{-}۱)$$

بنابر تعریف ψ، تنها حالتی که x متعلق به کلاس $E = \{tat^{-1}\}_{t\in G}$

است باقی می‌ماند. عنصر yx و xy همواره متعلق به یک کلاس هستند زیرا $yx = y(xy)y^{-1}$. ما نیاز داریم که (۳-۱) را در حالتی که yx و xy متعلق به کلاس E هستند ثابت کنیم. فرض کنید $yx = vav^{-1}$ و $xy = uau^{-1}$ دو نمایش غیر حذف شدنی باشند. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم که $|u| \le |v|$. چون

$$vav^{-1} = yx = y(xy)y^{-1} = yuau^{-1}y^{-1}$$

است، پس داریم

$$(u^{-1}y^{-1}v)a = a(u^{-1}y^{-1}v).$$

بنابراین عنصرهای a و $u^{-1}y^{-1}v$ جابجایی‌اند که این بنابر لم (۳-۴) در یک گروه آزاد زمانی اتفاق می‌افتد که هر دو عنصر توانی از عنصر سومی باشند. چون a یکی از مولدهای G است پس تنها می‌تواند توانی از خودش باشد که در این صورت برای $k \in \mathbb{Z}$، $u^{-1}y^{-1}v = a^k$ بعبارت دیگر $yu = va^{-k}$ است. دو حالت $k = 0$ و $k \ne 0$ را در نظر می‌گیریم: اگر $k = 0$ باشد آنگاه $y = vu^{-1}$ و

$$x = (xy)y^{-1} = (uau^{-1})(uv^{-1}) = uav^{-1}.$$

پس در این حالت نامعادله (۳-۱) را ثابت می‌کنیم، یعنی باید نامعادله

$$\big||u|^{\beta} - |v|^{\beta}\big| \le (1 + |vu^{-1}|)^{\alpha}(1 + |uav^{-1}|)^{\alpha}$$

را نشان دهیم. چون $0 < \alpha < 1/2$ و $\alpha < \beta < 2\alpha$، پس $0 < \beta \le 1$ و بنابراین با استفاده از لم۳-۱،

$$\big||u|^{\beta} - |v|^{\beta}\big| \le \big||u| - |v|\big|^{\beta}$$

و چون $|u| \le |v|$، پس

$$|vu^{-1}| \ge \big||u| - |v|\big|$$

و بنابر لم۳-۲

$$C|uav^{-1}| \ge \big||u| - |v|\big| - 1$$

را داریم. بنابراین:

$$\begin{aligned} &C(1 + |vu^{-1}|)^{\alpha}(1 + |uav^{-1}|)^{\alpha} \\ &\ge \left(1 + \big||u| - |v|\big|\right)^{\alpha}\big||u| - |v|\big|^{\alpha} \\ &\ge \big||u| - |v|\big|^{2\alpha} \\ &\ge \big||u| - |v|\big|^{\beta} \\ &\ge \big||u|^{\beta} - |v|^{\beta}\big|, \end{aligned}$$

چون $\beta \leq 2\alpha$ و $||u|-|v|| \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ است بنابراین (۳- ۱) در حالت $k=0$ برقرار است. حال فرض کنید $\mathrm{k} \neq 0$ باشد. پس $yu = va^{-k}$ است. یادآوری می‌کنیم که عبارت uau^{-1} و vav^{-1} غیر حذف‌شدنی هستند این به این معنی است که هر دوی u و v، با یک توان غیرصفر از مولد بعدی $G=\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_n$ که همان b است، به پایان می‌رسند، بنابراین برای حالت $\mathrm{k}\neq 0$، معادله $yu = va^{-k}$ تنها زمانی‌که $y=tu^{-1}$ و tu^{-1} غیر حذف‌شدنی است، امکان دارد. در این حالت، $t=va^{-k}$ و $|t|=|v|+|k|$ و معادل با $|v|=|t|-|k|$ است. همچنین داریم:

$$x=(xy)y^{-1}=(uau^{-1})(ut^{-1})= uat^{-1}$$

بنابراین همانند حالت قبلی، نامعادله (۳- ۱) برقرار است.

$$\left||u|^{\beta}-(|t|-|k|)^{\beta}\right| \leq (1+|tu^{-1}|)^{\alpha}(1+|uat^{-1}|)^{\alpha}.$$

فرضیات شروع را که به صورت

$$|u| \leq |v| \leq |t|-|k|$$

بود را یادآوری می‌کنیم، همچنین با بکار بردن استدلال حالت قبلی داریم:

$$\begin{aligned}\left||u|^{\beta}-(|t|-|k|)^{\beta}\right| &= (|t|-|k|)^{\beta}-|u|^{\beta}\\ &\leq \left||t|-|k|-|u|\right|^{\beta}\\ &\leq \left||t|-|u|\right|^{\beta}\\ &\leq (1+|tu^{-1}|)^{\alpha}(1+|uat^{-1}|)^{\alpha},\end{aligned}$$

بنابراین (۳-۱) برای حالت $\mathrm{k}\neq 0$ نیز برقرار است. سرانجام باید بررسی کنیم که برای $x_0=a$ ψ در رابطه (۲-۲) صدق می‌کند. چون $\beta > \alpha$ است:

$$\begin{aligned}&\sup_{y\in G}\frac{|\psi(yay^{-1})|}{\omega_{\alpha}(yay^{-1})}\\ &\geq \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{|\psi(b^{n-1}ab^{-(n-1)})|}{\omega_{\alpha}(b^{n-1}ab^{-(n-1)})}\\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{(n-1)^{\beta}}{(2(n-1)+2)^{\alpha}}=\infty\end{aligned}$$

بنابراین تابع ψ در شرایط لم (۲-۳) صدق می‌کند پس $\ell^1(G,\omega_\alpha)$ میانگین‌پذیرضعیف نیست.

تعریف ۳-۷: گروه D_∞ به کمک مولدها و روابط به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathrm{D}_\infty = \langle a,b : a^2=b^2=e\rangle$$

در این صورت می‌توان دید که $\mathrm{D}_\infty=\mathbb{Z}_2*\mathbb{Z}_2$، این گروه را گروه دو وجهی نامتناهی می نامند. به وضوح هر $x\in D_\infty$ به صورت رشته‌ای یکتا و تقلیل یافته از عناصر a,b است. طول x را حاصل جمع تعداد a و تعداد b هایی که ظاهر می‌شوند، در نظر گرفته با $|x|$ نشان می‌دهیم.

نکته ۳-۸: گروه D_∞ میانگین‌پذیر است. در واقع با توجه به تعریف $\mathrm{D}_\infty = \langle a,b : a^2=b^2=e\rangle$ اگر قرار دهیم $H=\langle ab\rangle$، آنگاه تابع

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \text{فرد باشد } |x|\\ 0 & \text{زوج باشد } |x|\end{cases}$$

یک همریختی پوشا به $\mathbb{Z}_2$ با هسته H تشکیل می‌دهد. در نتیجه $\frac{D_\infty}{H}\cong\mathbb{Z}_2$ بنابراین D_∞ گروهی میانگین‌پذیر است.

حال در قضیه زیر نشان می‌دهیم که $\ell^1(D_\infty,\omega)$ میانگین پذیر ضعیف نیست.

قضیه ۳-۹: فرض کنید ω یک تابع روی $G=D_\infty$ باشد که بصورت $\omega(x)=(1+|x|)$ برای هر $x\in G$ تعریف می‌شود. آنگاه ω یک وزن روی G است که وزن چندجمله‌ای نامیده می‌شود و $\ell^1(G,\omega)$ میانگین‌پذیرضعیف نیست.

برهان: با توجه به لم ۲-۵ هیچ همریختی غیربدیهی $\phi: G\to(\mathbb{C},+)$ وجود ندارد لذا شرط قضیه ۲-۲ برقرار نیست. در اینجا لم ۲-۳ را به کار می‌بریم. فرض می‌کنیم که تابع $\psi: G\to\mathbb{R}$ با ضابطه به صورت $\psi(x)=|x|^2$ تعریف شود. اکنون قرار می‌دهیم $x_0=a$ در این صورت همواره یکی از دو حالت

$|zt| = |z| + |t|$ یا $|zt| = ||z| - |t||$ اتفاق می‌افتد لذا

$$\begin{aligned}&|\psi(xy) - \psi(yx)|\\ &= ||xy|^2 - |yx|^2| \leq 4|x||y|\\ &\leq 4(1 + |x|)(1 + |y|)\\ &= 4\omega(x)\omega(y).\end{aligned}$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned}&\sup_{y\in G} \frac{|\psi(yay^{-1})|}{\omega_\alpha(yay^{-1})}\\ &\geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\psi(ba\ldots bab\ldots b)|}{\omega_\alpha(ba\ldots ab)}\\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|ba\ldots bab\ldots b|^2}{1+|ba\ldots ab|}\\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2}{(1+n)} = \infty\end{aligned}$$

بنابراین شرایط لم ۲-۳ برقرار است. از طرفی واضح است که ω بر کل G کراندار دور از صفر است پس $\ell^1(G,\omega)$ میانگین پذیر ضعیف نیست.

نکته ۳-۱۰: فرض کنید G یک گروه گسسته و ω یک وزن روی آن باشد. اگر یک همریختی غیر بدیهی $\phi: G \to (\mathbb{C}, +)$ وجود داشته باشد به قسمی‌که

$$\sup_{x\in G} \frac{|\phi(x)|}{\omega(x)\omega(x^{-1})} < \infty,$$

آنگاه چون ϕ، غیر بدیهی است پس یک عنصر $t_0 \in G$ وجود دارد به قسمی‌که $\phi(t_0) \neq 0$. بنابراین اگر قرار دهیم $H = \langle t_0 \rangle$ آنگاه $\phi|_H$ غیر بدیهی است. توجه کنید که $\omega|_H$، یک وزن روی H است و

$$\sup_{x\in H} \frac{|\phi(x)|}{\omega(x)\omega(x^{-1})} < \infty,$$

پس $\ell^1(H, \omega|_H)$ میانگین‌پذیر ضعیف نیست. بنابراین قضیه زیر را داریم:

قضیه ۳-۱۱: فرض کنید G یک گروه گسسته و ω یک وزن روی آن باشد. اگر برای هر زیرگروه آبلی از G مانند H، $\ell^1(H, \omega|_H)$ میانگین‌پذیرضعیف باشد آنگاه برای هر همریختی گروهی، غیر صفر

$\phi: G \to (\mathbb{C}, +)$

داریم:

$$\sup_{x\in G} \frac{|\phi(x)|}{\omega(x)\omega(x^{-1})} = \infty.$$

همچنین قضیه بعدی را داریم:

قضیه ۳-۱۲: فرض کنید G یک گروه آبلی (نه لزوماً متناهیا تولید شده) باشد و $\ell^1(G,\omega)$ میانگین پذیر ضعیف نباشد، در این صورت یک زیرگروه دوری از G مانند H وجود دارد بقسمی‌که $\ell^1(H, \omega|_H)$ میانگین پذیر ضعیف نیست.

۴- میانگین‌پذیری ضعیف $\ell^1(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n, \omega)$ روی همه‌ی وزن‌ها

تعریف ۴-۱: فرض کنید ω یک وزن روی گروه G باشد، ω را به طور قطری کراندار می‌نامیم اگر تابع

$x \longmapsto \omega(x)\omega(x^{-1})$

روی G کراندار باشد.

گزاره ۴-۲: ([۷، قضیه ۳-۱۴]). فرض کنید G یک گروه فشرده موضعی و ω یک وزن به طور قطری کراندار روی آن باشد. در این صورت جبر برلینگ $\mathcal{L}^1(G,\omega)$ میانگین پذیر ضعیف است.

لم ۴-۳: فرض کنید $g: \mathbb{N} \cup \{0\} \to [1, \infty)$ یک تابع افزایشی باشد به قسمی که:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} g(n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{g(n)} = \infty.$$

آنگاه یک تابع $f: \mathbb{N} \cup \{0\} \to [1, \infty)$ با خواص زیر وجود دارد.

(۱) f افزایشی است؛

(۲) به ازای هر $m, n \in \mathbb{N}$ با $m \geq n$

$$\begin{aligned}&f(m+n) - f(m-n)\\ &\leq g(m)g(n),\end{aligned}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty. \qquad (۳)$$

برهان: [۱۰] را ببینید.

قضیه زیر مشابه قضیه (۴-۲) در [۱۰] است که برای گروه آزاد غیر آبلی با دو مولد اثبات شده است.

قضیه ۴-۴: گروه $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ با وزن ω روی آن مفروض هستند. تابع افزایشی $g: \mathbb{N} \cup \{0\} \to [1, \infty)$ و ثابت‌های $c_1, c_2 > 0$ چنان وجود دارند به قسمی‌که به ازای هر $x \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$

$$c_1 g(|x|) \leq \omega(x) \leq c_2 g(|x|)$$

که $|x|$ طول x است. اگر $\ell^1(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_\mathrm{n}, \omega)$ میانگین پذیر ضعیف باشد، آنگاه ω کراندار است.

برهان: اگر ω یک وزن کراندار باشد، آنگاه $\ell^1(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_\mathrm{n}, \omega)$ با $\ell^1(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_\mathrm{n})$ یکریخت است و چون $\ell^1(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_\mathrm{n})$ میانگین‌پذیر ضعیف است پس $\ell^1(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_\mathrm{n}, \omega)$ میانگین‌پذیر ضعیف است. بنابراین حالتی را بررسی می‌کنیم که ω کراندار نباشد و در شرایط قضیه صدق کند، نشان می‌دهیم $\ell^1(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_\mathrm{n}, \omega)$ میانگین‌پذیرضعیف نیست. با توجه به مطالب گفته شده در بالا، طول x به صورت

$$|x| = \sum_{i=1}^{m} (|k_i| + |l_i|)$$

و مقدار $\sum_{i=1}^{m} k_i$ مجموع توان‌های a در x است که با $A(x)$ نشان می‌دهیم. A یک همریختی پیوسته از $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ به $\mathbb{Z}$ است. با استفاده از قضیه ۲-۲، اگر

$$\sup_{x \in G} \frac{|A(x)|}{\omega(x)\omega(x^{-1})} < \infty$$

آنگاه $\ell^1(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_\mathrm{n}, \omega)$ میانگین‌پذیر ضعیف نیست. حال فرض کنید

$$\sup_{x \in G} \frac{|A(x)|}{\omega(x)\omega(x^{-1})} = \infty.$$

چون واضح است که

$$|A(x)| \leq |x| \text{ و } \omega(x) \geq c_1 g(|x|)$$

پس دو حالت را در نظر می‌گیریم. ابتدا حالت

$$|x| \leq |x^{-1}|$$

را بررسی می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned}\sup_{x \in G} \frac{|x|}{(g(|x|))^2} &\geq \sup_{x \in G} \frac{|A(x)|}{(g(|x|))^2} \\ &\geq \sup_{x \in G} \frac{|A(x)|}{\frac{1}{{c_1}^2}(\omega(x))^2} \\ &\geq \sup_{x \in G} \frac{|A(x)|}{\omega(x)\omega(x^{-1})} = \infty\end{aligned}$$

برای حالت $|x| \leq |x^{-1}|$ نیز به طور مشابه برقرار است:

$$\begin{aligned}\sup_{x \in G} \frac{|x|}{(g(|x|))^2} &\geq \sup_{x \in G} \frac{|x^{-1}|}{(g(|x|))^2} \\ &\geq \sup_{x \in G} \frac{|A(x^{-1})|}{(g(|x|))^2} \\ &\geq \sup_{x \in G} \frac{|A(x^{-1})|}{(\omega(x))^2} = \infty\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\sup_{x \in G} \frac{|x|}{(g(|x|))^2} = \infty,$$

و سپس

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{g(n)} \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sqrt{n}}{g(n)} = \infty.$$

بنابراین با اعمال لم۴-۳ و با استفاده از تابع g، که تابع افزایشی $f: \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ را می‌دهد به قسمی‌که

(۱) به ازای هر $m, n \in \mathbb{N}$ با $m \geq n$

$$f(m+n) - f(m-n) \leq g(m)g(n),$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty. \quad (۲)$$

باید نشان دهیم که $\psi(x) = f(|x|)$ در شرایط لم ۳-۲ برای $\mathrm{x}_0 = \mathrm{a}$ یا $x_0 = \mathrm{a}^2$ صدق می‌کند، که این نشان می‌دهد که $\ell^1(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_\mathrm{n}, \omega)$ میانگین پذیر ضعیف نیست. توجه کنید چون $\omega(x) \geq c_1 g(|x|)$ و $g: \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+$ یک تابع افزایشی است، وزن ω کراندار دور از صفر روی گروه $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_\mathrm{n}$ و به خصوص روی هر کلاس همدسته $\{yx_0y^{-1}\}_{y \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n}$ است. حالا هدف ما یافتن ثابت $C > 0$ است به قسمی‌که به ازای هر $x, y \in G$

$$|\psi(xy) - \psi(yx)| \leq C\omega(x)\omega(y), \quad (۳)$$

مطابق تعریف ψ، داریم:

$$|\psi(xy)-\psi(yx)| = |f(|xy|)-f(|yx|)|.$$

فرض کنید $|x| = m$ و $|y| = n$، و فرض کنید بدون از دست دادن کلیت $m \geq n$. با استفاده از نامساوی مثلث،

$$m-n = \big||x|-|y|\big| \leq |xy|,$$
$$|yx| \leq |x|+|y| = m+n.$$

چون f افزایشی است پس داریم:

$$|f(|xy|)-f(|yx|)| \leq f(m+n)-f(m-n).$$

با استفاده از (۱) و نامعادله $\omega(t) \geq C_1 g(|t|)$، برای هر $t \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$، نامعادله (۳) را با $C = {}^{1}\!/_{{C_1}^2}$ می‌دهد:

$$\begin{aligned}|\psi(xy)-\psi(yx)| &= |f(|xy|)-f(|yx|)| \\ &\leq f(m+n)-f(m-n) \\ &\leq g(m)g(n) \\ &= g(|x|)g(|y|) \\ &\leq \frac{1}{{C_1}^2}\omega(x)\omega(y).\end{aligned}$$

سرانجام شرط (۲-۲) از لم۳-۲ را برای تابع ψ بررسی می‌کنیم. به جای x_0، a یا a^2 را قرار می‌دهیم و کلاس همدسته $\{xax^{-1}\}_{x\in\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_n}$ و $\{xa^2x^{-1}\}_{x\in\mathbb{Z}*\mathbb{Z}_n}$ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\sup_{y\in G}\frac{|\psi(yay^{-1})|}{\omega(yay^{-1})} &\geq \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{|\psi(b^n a b^{-n})|}{\omega(b^n a b^{-n})} \\ &\geq \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{f(2n+1)}{C_2 g(2n+1)} \\ &= \frac{1}{C_2}\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{f(2n+1)}{g(2n+1)},\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\sup_{y\in G}\frac{|\psi(ya^2y^{-1})|}{\omega(ya^2y^{-1})} &\geq \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{|\psi(b^n a^2 b^{-n})|}{\omega(b^n a^2 b^{-n})} \\ &\geq \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{f(2n+2)}{C_2 g(2n+2)} \\ &= \frac{1}{C_2}\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{f(2n+2)}{g(2n+2)},\end{aligned}$$

بنابراین کافی است نشان دهیم که:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{f(2n+1)}{g(2n+1)} = \infty \text{ یا } \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{f(2n+2)}{g(2n+2)} = \infty.$$

اما این نتیجه مستقیم (۳) است و اثبات کامل است.

تذکر ۴-۵: فرض کنید

$$G = \mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$$

با $m,n \in \mathbb{N}$ و ω یک وزن روی G باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \omega(a^{\varepsilon_1}b^{\eta_1}a^{\varepsilon_2}b^{\eta_2}\dots a^{\varepsilon_k}b^{\eta_k}) \\ &= (1+|x|),\end{aligned}$$

طول x بصورت $|x| = \overline{\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i} + \overline{\overline{\sum_{i=1}^{k}\eta_i}}$ است که $\overline{\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i}$ باقیمانده تقسیم $\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i$ بر n و $\overline{\overline{\sum_{i=1}^{k}\eta_i}}$ باقیمانده تقسیم $\sum_{i=1}^{k}\eta_i$ بر m می‌باشد. در این صورت دیده می‌شود که ω یک وزن کراندار روی G است بنابراین کراندار قطری نیز می‌باشد. لذا $\ell^1(G,\omega)$ بنابر گزاره۴-۲ میانگین‌پذیر ضعیف است.

۵- نتیجه‌گیری

یکی ازمهمترین مسائل در آنالیز ریاضی میانگین پذیری $\ell^1(G,\omega)$ برای گروه فشرده موضعی G است. ما نشان دادیم که برای گروه گسسته $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ و یک تابع وزن چند جمله‌ای ω_α، جبر برلینگ $\ell^1(G,\omega_\alpha)$ میانگین‌پذیر ضعیف نیست و گروه دو وجهی $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ میانگین‌پذیر است اما $\ell^1(D_\infty,\omega)$ میانگین‌پذیر ضعیف نیست. همچنین نشان دادیم که برای یک تابع وزن پیوسته ω روی گروه G، جبر برلینگ $\ell^1(G,\omega)$، تحت شرایطی اگر میانگین‌پذیر ضعیف باشد آنگاه ω کراندار است.

تشکر و قدردانی

از داوران محترم بابت داوری این مقاله کمال تشکر و قدردانی را داریم. این پروژه توسط دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی حمایت شده است.

فهرست منابع

[1] W. G. Bade, P. C. Curtis Jr, H. G. Dales, Amenability and weak amenability for Beurling and Lipschitz algebras, Proc. London Math. Soc. (3) 55 (1987) 359-377.

[2] C. R. Borwick, The Johnson-Hochschild cohomology of weighted group algebras and augmentation ideals, PhD thesis, Univ. of Newcastle upon Tyne, 2003.

[3] N. Grønbæk, A characterization of weakly amenable Banach algebras, Studia Math. 94 (2) (1989) 149-162.

[4] N. Grønbæk, Amenability of weighted convolution algebras on locally compact groups, Trans. Amer. Math. Soc. 319 (2) (1990) 765-775.

[5] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar, Combinatorial Group Theory, Presentations of groups in terms of generators and relations. Dover publications, New York, 1976.

[6] A. Pourabbas, The cohomology of some Banach algebras, PhD thesis, Univ. Of Newcastle upon Tyne, 1996.

[7] A. Pourabbas, Weak amenability of weighted group algebras, Atti sem. Mat. Fis. Univ. Modena 48 (2000), 299-316.

[8] H-R. Rahimi, A. Soltani, A note on approximately amenable modulo an ideal of Banach algebras, J. New Resea. Math., Vol. 1, No. 2, Summer 2015 5-12.

[9] E. Samei, Weak amenability and 2-weak amenability of Beurling algebras, J. Math. Anal. Appl. 346 (2) (2008) 451-467.

[10] V. Shepelska, Weak amenability of weighted group algebras on some discrete groups, Studia. Math. 230 (3) (2015) 189-214.

[11] Y. Zhang, Weak amenability of commutative Beurling algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 142 (2014), 1649-1661.

[۱۲] جواد سعادتمندان، علیرضا باقری ثالث، بررسی ارتباط بین وجود بردارهای پذیرفتنی با میانگین‌پذیری و فشردگی یک گروه موضعاً فشرده، مجله پژوهش‌های نوین در ریاضی، سال چهارم، شماره چهاردهم، تابستان ۱۳۹۷، ۱۱۲-۱۰۳.

[۱۳] مرتضی قربانی، حمیدرضا رحیمی، دو تصویری بودن جبرهای باناخ نسبت به ایده‌آل، مجله پژوهش‌های نوین در ریاضی، سال پنجم، شماره هجدهم، تابستان ۱۳۹۸، ۳۰-۲۱.