

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال یازدهم، شماره پنجاه و سوم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۴

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

خواص ترایایی سیستم‌های دینامیکی روی ابرفضاهای یکنواخت

فرزانه پیرفلک ملومه^۱، نادر کوهستانی^۲، سید علیرضا احمدی^{۳*}

^(۱,۲,۳) گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۱۱/۱۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۲/۱۱

چکیده

در این مقاله خواص دینامیکی اعمال شده روی فضای زیرمجموعه‌های فشرده از فضای پایه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به طور دقیق‌تر، اگر X یک فضای یکنواخت باشد، فضای زیرمجموعه‌های بسته و ناتهی از X با توپولوژی هاسدورف با $\mathcal{K}(X)$ نشان داده می‌شود و اگر f یک خودنگاشت پیوسته روی X باشد، خودنگاشت‌های پیوسته‌ای روی $\mathcal{K}(X)$ نیز وجود دارد. هدف اصلی ما، مطالعه رابطه بین دینامیک‌های f و این نگاشت‌های القایی است. برای چنین مطالعه‌ای، مفاهیم توپولوژیکی ترایای زنجیری، آمیختگی و خواص آمیختگی زنجیری برای سیستم‌های دینامیکی القا شده روی ابرفضاهای یکنواخت را معرفی و مطالعه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: سایه زنی، سایه زنی ارگودیک، نگاشت ترایای زنجیری، نگاشت ارگودیک توپولوژیک، نگاشت انبساطی ارگودیک

۱- مقدمه

یک سیستم دینامیکی f روی فضای متریک فشرده X نگاشت‌هایی را روی فضاهای مرتبط ایجاد می‌کند. به عنوان مثال، بین رفتار دینامیکی f و نگاشت تغییر جا روی فضای حد معکوس القایی رابطه نزدیکی وجود دارد. این وضعیت به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است [۲، ۱]. هر نگاشت پیوسته f از یک فضای متریک فشرده X به طریقی آشکار، نگاشتی را روی ابرفضای $\mathcal{K}(X)$ که فضای همه زیرمجموعه‌های بسته و ناتهی روی X است، تعریف می‌کند. اگر ابرفضای $\mathcal{K}(X)$ به توپولوژی ویتورس مجهز باشد، آنگاه نگاشت القا شده پیوسته خواهد بود. در این زمینه سوالات بسیاری مطرح می‌شود که از آن جمله: چه ارتباطی بین خواص دینامیکی پایه نگاشت f (ویژگی‌های دینامیک منحصر به فرد) و نگاشت‌های القایی (دینامیک جمعی) وجود دارد؟ در سال‌های اخیر، علاقه‌مندی به مطالعه نگاشت‌های القایی روی ابرفضاها افزایش یافته است. [۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰]. چنین مطالعه‌ای ابتدا توسط باوئر و زیگمونه انجام شد [۱۱]. دینامیک‌های $(\mathcal{K}(X), \tilde{f})$ غنی‌تر از دینامیک‌های روی X هستند، که به راحتی می‌توان از نتایج و مثال‌های بنکر [۱۱]، باوئر و زیگمونه [۱۲] ارزیابی کرد. این امر انگیزه‌ای قوی برای مطالعه دینامیک‌های $(\mathcal{K}(X), \tilde{f})$ به ما می‌دهد. در مقاله حاضر توجه خود را تنها به چند جنبه از مسئله اصلی محدود می‌کنیم. به عنوان مثال، هدف ما این است که خواص ترایای زنجیری توپولوژیک و آمیختگی زنجیری را مطالعه کنیم.

از سوی دیگر، گاهی اوقات ترجیح می‌دهیم یک سیستم دینامیکی را در یک فضای توپولوژیکی غیرمتریک‌پذیر در نظر بگیریم. اما بسیاری از مفاهیم دینامیکی در نظریه توپولوژیک سیستم‌های دینامیک با استفاده از "فاصله" بین مجموعه‌ها و نقاط تعریف می‌شوند. با این حال، برای فضاهای توپولوژیک عمومی نمی‌توان چنین مفاهیم مربوط به فاصله یا اندازه را تعریف کرد مگر اینکه ساختار بیشتری نسبت به آنچه خود توپولوژی ارائه می‌دهد داشته باشیم. مطالعه دینامیک روی چنین فضاهایی گاهی در علوم مختلف کاربردهای زیادی دارد که می‌توان از آن جمله به کاربردهای مختلف اعداد p -ای در فیزیک اشاره کرد. امروزه مطالعه دینامیک‌های توپولوژیکی در چنین فضاهایی مورد توجه بسیاری از محققان است [۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷].

گود و ماتیس [۱۸] نشان دادند که بسیاری از ویژگی‌های دینامیکی را می‌توان به طور طبیعی روی فضای هاسدورف (اما نه لزوماً فشرده یا متریک) تعریف کرد. به عنوان مثال، آن‌ها نشان دادند که در یک فضای تیخونف، ترایایی وجود نقاط متناوب چگال، دلالت بر حساسیت توپولوژیکی به شرایط اولیه دارد. آن‌ها نسخه‌هایی از سایه‌زنی را مورد مطالعه قرار دادند. تعدادی از این نتایج شناخته شده را در فضای توپولوژیکی و ترایای زنجیری تعمیم دادند، به عنوان مثال نشان دادند که نگاشت همانی روی یک فضای فشرده دارای سایه‌زنی یکنواخت است اگر و تنها اگر فضا ناهمبند کلی باشد، سایه‌زنی توپولوژیکی تحت تزویج توپولوژیک پایاست و برای فضاهای فشرده و فشرده دنباله‌ای سایه‌زنی یکنواخت معادل سایه‌زنی توپولوژیک متناهی است. در [۹] مفاهیم توپولوژیکی یکنواختی ضعیف، صلبی یکنواخت و حساسیت چندگانه معرفی شده و برخی خصوصیات معادل صلبی یکنواخت، به دست آمده است. سپس، در [۱۷] ثابت شده که یک سیستم دینامیکی ترایای نقطه‌ای، یا حساس است یا هم پیوسته. اخیراً، در [۱۴] مفاهیم نقاط آنتروپی، انبساطی بودن و ویژگی سایه‌زنی برای سیستم‌های دینامیکی به فضاهای یکنواخت تعمیم داده شده و رابطه‌ای بین ویژگی‌های توپولوژیکی و آنتروپی یکنواخت مثبت به دست آمده است.

مقاله به این صورت مرتب شده است که در بخش بعدی تعاریف و مقدمات را مورد بحث قرار می‌دهیم. در بخش ۳ ویژگی‌های ترایایی نگاشت‌های القایی را بررسی کرده و نتایج اصلی خود، یعنی قضیه ۳،۱ و قضیه ۳،۲ را اثبات می‌کنیم. در نهایت، روابط بین ترایایی را با توجه به توپولوژی‌های مختلف مورد بحث قرار می‌دهیم.

۲ مفاهیم اولیه

فرض کنید X یک مجموعه غیر تهی باشد. یکنواختی $\mathcal{U}$ روی مجموعه X یک زیرمجموعه از حاصلضرب $X \times X$ است به طوریکه در شرایط زیر صدق کند [۱۹]:

- برای هر دربرگیرنده قطر $E_1, E_2 \in \mathcal{U}$ ، $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{U}$ و اگر $E_1 \subset E_2$ و $E_1 \in \mathcal{U}$ آنگاه $E_2 \in \mathcal{U}$.
- هر $E \in \mathcal{U}$ شامل قطر $\Delta_X = \{(x, x): x \in X\}$ می‌باشد.
- اگر $E \in \mathcal{U}$ ، $E^T = \{(y, x): (x, y) \in E\} \in \mathcal{U}$.
- برای هر $E \in \mathcal{U}$ وجود دارد $\hat{E} \in \mathcal{U}$ بطوریکه $\hat{E} \subset E$ و اینکه $\hat{E} \circ \hat{E} = \{(x, y): \exists z \in X; (x, z) \in \hat{E}, (z, y) \in \hat{E}\}$.

مجموعه X با یکنواختی $\mathcal{U}$ روی آن فضای یکنواختی نامیده می‌شود و با $(X, \mathcal{U})$ نشان داده می‌شود. مثال ۱،۱ مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. برای عدد اول مفروض p ساختای p -ای روی $\mathbb{Z}$ یک یکنواختی است که توسط زیر مجموعه های $D_{[n]}$ تعریف شده به صورت

$$s, t \in D_{[n]} \Leftrightarrow s \equiv t \pmod{p^n}$$

تولید می‌شود. این یکنواختی را با $\mathcal{U}_p$ نشان می‌دهیم. این ساختار در نظریه اعداد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و همچنین کاربردهای زیادی در تقریب‌های دیوفانتی و فیزیک دارد [۱۹].

فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای یکنواختی باشد، آنگاه هر عضو از $\mathcal{U}$ را دربرگیرنده قطر X می‌نامند. یک دربرگیرنده قطر E متقارن است اگر $E = E^T$. در بیشتر موارد می‌توانیم دربرگیرنده قطر متقارن از $\mathcal{U}$ را به عنوان پایه در نظر بگیریم. بنابراین برای هر دربرگیرنده قطر $E, \hat{E} \in \mathcal{U}$ داریم، $E \circ \hat{E} = \hat{E} \circ E$ اگر $A \subset X, x \in X$ و $E \in \mathcal{U}$ آنگاه مجموعه $E[x] = \{y \in X: (x, y) \in E\}$ سطح مقطع از E در نقطه x نامیده می‌شود و

$$E[A] = \{y \in X: \exists a \in A; y \in E[a]\}.$$

لذا، برای هر $E^n, n \in \mathbb{N}$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$E^n := E \circ E \circ \dots \circ E \text{ (مرتبه } n\text{)}$$

$$= \{(x, y): \exists z_1, \dots, z_n = y; (z_{i-1}, z_i) \in E, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

اگر $\tau = \{A \subset X: \forall a \in A, \exists E \in \mathcal{U}[E[a] \subset A]\}$ آنگاه τ یک توپولوژی روی X ایجاد می‌کند که توپولوژی القایی توسط یکنواختی $\mathcal{U}$ نامیده می‌شود [۱۹]. از این به بعد، وقتی می‌گوییم فضای یکنواخت $(X, \mathcal{U})$ خاصیت توپولوژیکی خاصی را داراست، منظور این است که فضای توپولوژیکی (X, τ) دارای همین ویژگی است. فرض کنید X یک فضای فشرده باشد، در یک فضای یکنواخت $(X, \mathcal{U})$ ابرفضاهایی از X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{K}(X) = \{A \subset X: A \text{ بسته و غیر تهی}\}$$

$$\mathcal{C}(X) = \{A \in \mathcal{K}(X): A \text{ همبند}\}$$

• برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$C_n(X) = \{A \in \mathcal{K}(X): A \text{ حداکثر } n \text{ مولفه دارد}\}$$

• برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$F_n(X) = \{A \in \mathcal{K}(X) : A \text{ حداقل } n \text{ نقطه دارد}\}$$

$$F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X).$$

فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای یکنواخت باشد و $E \in \mathcal{U}$. اگر

$$\mathcal{V}^E = \{(A, A') \in \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) : A \subset E[A'], A' \subset E[A]\},$$

آنگاه مجموعه $\mathcal{B} = \{\mathcal{V}^E : E \in \mathcal{U}\}$ یک پایه برای یکنواختی روی $\mathcal{K}(X)$ می باشد که به صورت زیر نشان می دهیم

$$\mathcal{V}^{\mathcal{U}} = \{\mathbf{U} \subset \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) : \\ \exists E \in \mathcal{U} | \mathcal{V}^E \subset \mathbf{U}\}.$$

برای سایر ابرفضاها، چون هر کدام تحدیدی از $\mathcal{V}^{\mathcal{U}}$ هستند، لذا آنها را به صورت $C(\mathcal{U}), C_n(\mathcal{U}), F_n(\mathcal{U}), F(\mathcal{U})$ نشان می دهیم. می دانیم که توپولوژی القا شده توسط $\mathcal{V}^{\mathcal{U}}$ با توپولوژی ویتوریس منطبق است. یادآوری می کنیم که توپولوژی ویتوریس روی مجموعه X یک توپولوژی با یک پایه از همه مجموعه های به شکل زیر است:

$$\mathcal{V}(U_1, U_2, \dots, U_k) = \{B \in \mathcal{K}(X) :$$

$$B \subset \bigcup_{i=1}^k U_i, B \cap U_i \neq \emptyset ; i = 1, 2, \dots, k\},$$

که $U_1, U_2, \dots, U_k$ در $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ باز هستند.

فرض کنید $f: X \rightarrow X$ یک نگاشت باشد، برای همه $A \in \mathcal{K}(X)$ ، $\tilde{f}: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ را به صورت $\tilde{f}(A) = f(A)$ تعریف می کنیم. همچنین نگاشت های $f_n, C(f), C_n(f)$ و $f^{<\omega}$ را از $\mathcal{K}(X)$ به $\mathcal{K}(X)$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$C_n(f) = \tilde{f}|C_n(X), \quad C(f) = \tilde{f}|C(X),$$

$$f_n = \tilde{f}|F_n(X), \quad f^{<\omega} = \tilde{f}|F(X).$$

این توابع نگاشت های القایی توسط f نامیده می شوند. فضای حاصلضربی $X \times X \times \dots \times X$ را با $X^{(n)}$ نشان می دهیم و $f^{(n)}: X^{(n)} \rightarrow X^{(n)}$ را توسط $f^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$ تعریف می کنیم.

فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای یکنواخت و $f: X \rightarrow X$ یک نگاشت پیوسته باشد، همچنین $D \in \mathcal{U}$. آنگاه یک $-D$ شبه مدار (متناهی یا نامتناهی)، یک دنباله از نقاط $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ می باشد، به طوریکه برای $i \geq 0$ ، $(f(x_i), x_{i+1}) \in D$.

اگر یک $-D$ شبه مدار متناهی $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_m\}$ را داشته باشیم، بطوریکه برای $0 \leq i \leq (m-1)$ ، $(f(x_i), x_{i+1}) \in D$ باشد، آنگاه آن را یک (D, f) - زنجیر به طول m می نامیم. زیرمجموعه Λ از X برای زنجیری درونی توپولوژیکی است، اگر برای هر جفت از نقاط $x, y \in \Lambda$ و هر $D \in \mathcal{U}$ ، یک (D, f) - زنجیر

$$\{x_0 = x, x_1, x_2, \dots, x_m = y\} \subset \Lambda$$

بین x و y وجود داشته باشد. در حالت خاص زمانی که $\Lambda = X$ ، می گوییم f یا X برای زنجیری توپولوژیک است [۱۳].

گوییم نگاشت f دارای ویژگی

- آمیختگی ضعیف توپولوژیکی است اگر $f^{(2)}: X^{(2)} \rightarrow X^{(2)}$ ترایی توپولوژیک باشد [۲۰].
- ترایی زنجیری توپولوژیک کلی است اگر برای هر $n \geq 1$ تابع $f^n: X \rightarrow X$ ترایی زنجیری توپولوژیک باشد.
- کامل است، اگر برای هر مجموعه باز $U \subset X$ یک عدد صحیح مثبت m موجود باشد، به طوریکه $f^m(U) = X$.
- به وسیله زنجیرهای توپولوژیکی، کامل می‌باشد، اگر برای هر $E \in \mathcal{U}$ و هر زیرمجموعه باز و ناتهی $U \subset X$ عدد صحیح مثبت $n_E \geq 1$ موجود باشد به طوریکه برای هر $x \in X$ و هر $u \in U$ یک (E, f) - زنجیر مانند $\{a. = u, a_1, a_2, \dots, a_{n_E} = x\}$ وجود داشته باشد.
- آمیختگی زنجیری توپولوژیک است، اگر برای هر دربرگیرنده قطر E عدد صحیح مثبت N موجود باشد، به طوریکه برای هر $n \geq N$ و هر جفت از نقاط $x, y \in X$ یک (E, f) - زنجیر از x به y به طول n موجود باشد، $\{x. = x, x_1, x_2, \dots, x_n = y\}$.
- زنجیر بازگشتی توپولوژیک است، اگر برای هر $x \in X$ و هر دربرگیرنده قطر E یک (E, f) - زنجیر از x به خودش موجود باشد [۱۳].

مثال ۲،۱ مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. برای عدد اول مفروض p یکنواختی $\mathcal{U}_p$ تعریف شده در مثال ۱،۱ را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم نگاشت $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ با ضابطه $g(x) = ax$ که در آن a و p متباین هستند، دارای ویژگی زنجیر بازگشتی توپولوژیک است در حالیکه ترایی زنجیری توپولوژیکی نیست. فرض کنید $k \in \mathbb{Z}$ دلخواه باشد. در این صورت بنا بر قضیه اوایلر $1 \equiv a^{\varphi(p^k)} \pmod{p^k}$ به پیمانه p^k برقرار است. لذا برای هر $x \in \mathbb{Z}$ دنباله

$$x. = x, x_1 = ax, \dots, x_{\varphi(p^k)-1} = a^{\varphi(p^k)-1}x$$

یک $D[k]$ -زنجیر از x به خودش می‌باشد. یعنی g دارای ویژگی زنجیر بازگشتی توپولوژیکی است. نشان می‌دهیم g دارای ویژگی ترایی زنجیری توپولوژیکی نیست. به برهان خلف فرض کنید $x. = 0, x_1, x_2, \dots, x_n = 1$ یک $D[1]$ -زنجیر از صفر به یک باشد، در این صورت به دست می‌آوریم $p|a^n$ که تناقض است.

فرض کنید $f: X \rightarrow X$ یک نگاشت پیوسته روی فضای فشرده توپولوژیک باشد. مدار Of از یک نقطه $x \in X$ مجموعه $\{f^n(x): n \geq 0\}$ می‌باشد. نقطه $x \in X$ متناوب گفته می‌شود اگر $n > 0$ موجود باشد به طوریکه $f^n(x) = x$ عدد مثبت n را یک تناوب از x می‌نامند. بنابراین

$$Per(f) = \bigcup_{n \geq 1} \{f^n\}.$$

۳ نتایج اصلی

در این بخش ویژگی‌های ترایی نگاشت‌های القایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و دو نتیجه اصلی قضیه ۳،۲ و ۳،۱ را ثابت می‌کنیم. در قضیه ۳،۱، معادل ترایی زنجیری توپولوژیک را برای نگاشت‌های القایی در ابرفضاهای یکنواخت ثابت می‌کنیم. این قضایا در حالتی که فضای زمینه مجهز به متریک باشد اثبات شده است [۷].

قضیه ۳،۱ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت و $f: X \rightarrow X$ یک تابع پیوسته باشد. آنگاه موارد زیر معادل هستند:

۱. $f^{<\omega}$ ترایی زنجیری توپولوژیک است،

۲. $\tilde{f}$ ترایی زنجیری توپولوژیک است،

۳. f ترایای زنجیری توپولوژیک است،

۴. برای هر $n \geq 2$ ، f_n ترایای زنجیری توپولوژیک است.

در قضیه بعدی، معادل ویژگی‌های ترایایی را برای سیستم‌های دینامیک ثابت می‌کنیم.

قضیه ۳،۲ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت و $f: X \rightarrow X$ یک تابع پیوسته باشد. آنگاه موارد زیر معادل هستند:

۱. f توسط زنجیرهای توپولوژیک کامل است،

۲. f آمیختگی زنجیری ضعیف توپولوژیک است،

۳. برای هر $n \geq 2$ ، $f^{(n)}$ ترایای زنجیری توپولوژیک است،

۴. f ترایای زنجیری کلی توپولوژیک است،

۵. f آمیختگی زنجیری توپولوژیک است.

گزاره ۳،۳ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت و $f: X \rightarrow X$ یک تابع پیوسته باشد. اگر f ترایای زنجیری توپولوژیک باشد، آنگاه f پوشاست.

برهان. فرض کنید f پوشا نباشد. چون X فشرد است، $X \setminus f(X)$ یک زیرمجموعه باز ناتهی از X است. بنابراین $E \in \mathcal{U}$ و $y \in X \setminus f(X)$ به طوریکه

$$E[y] \subset X \setminus f(X).$$

با توجه به ترایای زنجیری توپولوژیک بودن f یک (E, f) - زنجیر $\{y. = y, y_1, \dots, y_n = y\}$ از y به خودش موجود است، به طوریکه برای $0 \leq i \leq n-1$ ، $(f(y_i), y_{i+1}) \in E$. لذا

$$f(y_{n-1}) \in E[y] \subset X \setminus f(X)$$

که یک تناقض است، در نتیجه f پوشاست.

گود و ماکیاس [۱۸] نشان دادند که اگر هر کدام از توابع $\tilde{f}, f^{<\omega}, f_n, C_n(f), C(f)$ دارای سایه زنی توپولوژیک باشند، آنگاه f نیز دارای این خاصیت است. حال قضیه‌ای مشابه برای ترایای زنجیری توپولوژیک بیان می‌کنیم.

ایده برهان گزاره زیر از منبع [۱۸] اتخاذ شده است.

گزاره ۳،۴ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت و $f: X \rightarrow X$ یک تابع پیوسته باشد. اگر هر یک از توابع گردایه $\{C(f), C_n(f), f_n, f^{<\omega}, \tilde{f} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ترایای زنجیری توپولوژیک باشند، آنگاه f ترایای زنجیری توپولوژیک است.

برهان. اثبات را برای $\tilde{f}$ انجام می‌دهیم، برهان موارد دیگر نیز به طور مشابه می‌باشد.

فرض کنید $E \in \mathcal{U}$ ، آنگاه $\mathcal{U}^E \in \mathcal{U}$. فرض کنید $\tilde{f}$ ترایای زنجیری توپولوژیک باشد و $x, y \in X$ چون $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{K}(X)$ یک $(\mathcal{U}^E, \tilde{f})$ - زنجیر

$$\{\{x\} = A., A_1, A_2, \dots, A_k = \{y\}\}$$

با $k \geq 1$ در $\mathcal{K}(X)$ موجود است.

چون $(\tilde{f}(\{x\}), A_1) \in \mathcal{V}^E$ ، لذا

$$f(\{x\}) = \tilde{f}(\{x\}) \subseteq E[A_1]$$

بنابراین $a_1 \in A_1$ وجود دارد به طوریکه $(f(x), a_1) \in E$. از اینکه $(\tilde{f}(A_1), A_1) \in \mathcal{V}^E$ نتیجه می‌گیریم که $f(a_1) \in E[A_1]$ ، لذا برای $a_2 \in A_2$ ، $(f(a_1), a_2) \in E$. با ادامه این روند، برای $1 \leq i \leq k-1$ ، $a_{i+1} \in A_{i+1}$ موجود است به طوریکه $(f(a_i), a_{i+1}) \in E$. بنابراین دنباله $\{x = a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک (E, f) - زنجیر در X از x به y می‌باشد.

مثال

گزاره ۳،۵ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت و $f: X \rightarrow X$ یک تابع پیوسته باشد. اگر Y زیرمجموعه پایا و چگال از X باشد، آنگاه f ترایی زنجیری توپولوژیک است اگر و تنها اگر $f|_Y$ ترایی زنجیری توپولوژیک باشد.

برهان. نگاشت f را ترایی زنجیری توپولوژیک در نظر بگیرید، فرض کنید $a, b \in Y$ و $E \in \mathcal{U}$. همچنین $\hat{E} \in \mathcal{U}$ را طوری در نظر بگیرید که $\hat{E} \circ \hat{E} \subset E$. چون X فشرده و f پیوسته یکنواخت است، دربرگیرنده قطر $D \subset \hat{E}$ موجود است به طوریکه اگر $(s, t) \in D$ آنگاه برای هر $s, t \in X$ ، $(f(s), f(t)) \in \hat{E}$. دربرگیرنده قطر $\hat{D} \in \mathcal{U}$ را طوری انتخاب کنید که $\hat{D} \circ \hat{D} \subset D$. چون f ترایی زنجیری توپولوژیک است، یک $(\hat{D}, f)$ - زنجیر $\{a = z_1, z_2, \dots, z_k = b\}$

با $k \geq 1$ در X از a به b وجود دارد. همچنین چون Y در X چگال است، لذا برای هر $i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ ، $t_{i+1} \in \text{Int}_X(\hat{D}[z_{i+1}]) \cap Y$ موجود است.

اگر $t_i = z_i$ و $t_k = b$ آنگاه با توجه به $\hat{D} \circ \hat{D} \subset D$ و $\hat{E} \circ \hat{E} \subset E$ برای $0 \leq i \leq k-1$ ، خواهیم داشت $(f(t_i), t_{i+1}) \in E$.

بنابراین دنباله $\{a, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{k-1}, b\}$ یک (E, f) - زنجیر در Y است.

برعکس. فرض کنید $f|_Y$ ترایی زنجیری توپولوژیک باشد. $x, y \in X$ و $y' \in f^{-1}(y)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $E \in \mathcal{U}$ ، چون f پیوسته یکنواخت است، دربرگیرنده قطر $D \in \mathcal{U}$ موجود است به طوریکه اگر $(a, b) \in D$ آنگاه $(f(a), f(b)) \in E$. چون Y در X چگال است، $z_1, z_2 \in Y$ وجود دارد به طوریکه $(z_1, f(x)) \in E$ و $(f(z_1), y) \in E$ لذا $(z_1, y') \in D$.

با توجه به فرضیات، یک (E, f) - زنجیر $\{z_1 = a_1, a_2, \dots, a_k = z_1\}$ با $k \geq 1$ در Y وجود دارد. بنابراین دنباله

$$\{x, z_1 = a_1, a_2, \dots, a_k = z_1, y\}$$

یک (E, f) - زنجیر در X از x به y می‌باشد.

گزاره ۳،۶ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت و $f: X \rightarrow X$ یک تابع پیوسته باشد.

- اگر برای هر $n \geq 1$ ، f_n ترایی زنجیری توپولوژیک باشد، آنگاه f^{ω} ترایی زنجیری توپولوژیک است،
- اگر $\tilde{f}$ ترایی زنجیری توپولوژیک باشد، آنگاه f_2 ترایی زنجیری توپولوژیک است.

برهان. (۱) فرض کنید برای هر $n, n \geq 1$ f_n ترایای زنجیری توپولوژیک باشد و $A, B \in F(X)$ عدد طبیعی n را می‌توان طوری یافت که هر دو مجموعه A و B عضو $F_n(X)$ باشند. بنابراین یک زنجیر از A به B در $F_n(X) \subset F(X)$ وجود دارد. لذا $f^{<\omega}$ ترایای زنجیری توپولوژیک است.

(۲) فرض کنید $z \in X, E \in \mathcal{U}$ و $A = \{x, y\}, B = \{x, y\}$ دو نقطه در $F_r(X)$ باشند. چون $\tilde{f}$ ترایای زنجیری توپولوژیک است، $(\mathfrak{r}^E, \tilde{f})$ زنجیر $\Gamma_1 = \{A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_r = \{z\}\}$ از A به $\{z\}$ در $\mathcal{K}(X)$ وجود دارد. همچنین چون $(f(A_i), A_{i+1}) \in \mathfrak{r}^E$ ، نقاط $x_i, y_i \in A_i$ وجود دارند بطوریکه برای هر $i \in \{0, 1, 2, \dots, r-1\}$

$$(f(x_i), x_{i+1}) \in E \text{ و } (f(y_i), y_{i+1}) \in E$$

بنابراین برای هر $i = 0, 1, 2, \dots, r-1$ $(\{f(x_i), f(y_i)\}, \{x_{i+1}, y_{i+1}\}) \in \mathfrak{r}^E$.

در نتیجه $\Gamma_1^* = \{A^* = A_0^*, A_1^*, A_2^*, \dots, A_r^* = \{z\}\}$ یک $(\mathfrak{r}^E, f_r)$ زنجیر از A به $\{z\}$ در $F_r(X)$ می‌باشد، که برای $i = 0, 1, 2, \dots, r-1$ $A_i^* = \{x_i, y_i\}$ همچنین با توجه به ترایای زنجیری توپولوژیک بودن $\tilde{f}$ یک $(\mathfrak{r}^E, \tilde{f})$ زنجیر $\Gamma_r = \{\{z\} = B_0, B_1, B_2, \dots, B_l = B\}$ از $\{z\}$ به B وجود دارد. فرض کنید $x_l = x$ و $y_l = y$ چون $f(B_{i-1}) \subset E[B_i]$ ، نقاط $x_{i-1}, y_{i-1} \in B_{i-1}$ وجود دارند به طوریکه برای $1 \leq i \leq l$ $(f(x_{i-1}), x_i) \in E$ و $(f(y_{i-1}), y_i) \in E$ بنابراین

$$\Gamma_r^* = \{B^* = \{z\}, B_1^*, B_2^*, \dots, B_l^* = B\}$$

یک $(\mathfrak{r}^E, f_r)$ زنجیر از $\{z\}$ به B در $F_r(X)$ می‌باشد، که برای $i = 0, 1, 2, \dots, r-1$ $B_i^* = \{x_i, y_i\}$ در نتیجه با اتصال $\Gamma_1^* + \Gamma_r^*$ یک $(\mathfrak{r}^E, f_r)$ زنجیر از A به B در $F_r(X)$ خواهیم داشت.

ایده برهان گزاره زیر از منبع [۷] الهام گرفته شده است.

گزاره ۳،۷ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت و $f: X \rightarrow X$ یک تابع پیوسته باشد. اگر برای $k \geq 2$ f_k ترایای زنجیری توپولوژیک باشد، آنگاه برای هر $n \geq k$ f_n ترایای زنجیری توپولوژیک است.

برهان. کافی است $n \geq 2$ در نظر بگیرید، ترایای زنجیری توپولوژیک بودن f_n ترایای زنجیری توپولوژیک بودن f_{n+1} را نتیجه می‌دهد. فرض کنید $E \in \mathcal{U}$ و $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ و $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{n+1}\}$ همچنین فرض کنید $A' = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ، $B' = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ و $A'' = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ و $B'' = \{b_1, b_2, \dots, b_{n-1}\}$ چون f_n ترایای زنجیری توپولوژیک است، $(\mathfrak{r}^E, f_n)$ زنجیرهای

$$\{A' = A_0, A_1, A_2, \dots, A_r = A''\}$$

به طول r و $\{B'' = B_0, B_1, B_2, \dots, B_t = B'\}$ به طول t وجود دارند. لذا

$$\{A \cup \{a_{n+1}\}, A_1 \cup \{f(a_{n+1})\}, A_2 \cup \{f^2(a_{n+1})\}, \dots, A_r \cup \{f^r(a_{n+1})\}\}$$

یک $(\mathfrak{r}^E, f_{n+1})$ زنجیر از A به $\{A'' \cup \{f^r(a_{n+1})\}\}$ است. چون برای $0 \leq i \leq r-1$ داریم

$$\begin{aligned} f_{n+1}(A_i \cup f^i\{a_{n+1}\}) &= f_n(A_i) \cup f^{i+1}\{a_{n+1}\} \subset E[A_{i+1}] \cup E[f^{i+1}\{a_{n+1}\}] \\ &= E[A_{i+1} \cup f^{i+1}\{a_{n+1}\}], \end{aligned}$$

بنابراین

$$f_{n+1}(A_i \cup f^i\{a_{n+1}\}) \subset E[A_{i+1} \cup f^{i+1}\{a_{n+1}\}].$$

همچنین خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
& (A_{i+1} \cup f^{i+1}\{a_{n+1}\}) \\
& \subset E[f_n(A_i)] \cup E[f^{i+1}\{a_{n+1}\}] \\
& \subset E[f_n(A_i) \cup f^{i+1}\{a_{n+1}\}] \\
& = E[f_{n+1}(A_i) \cup f(f^i\{a_{n+1}\})] \\
& = E[f_{n+1}(A_i \cup f^i\{a_{n+1}\})].
\end{aligned}$$

حال فرض کنید $w \in f^{-t}(b_{n+1})$ ، آنگاه

$$\{B. \cup \{w\}, B_1 \cup \{f(w)\}, B_2 \cup \{f^2(w)\}, \dots, B_t \cup \{f^t(w)\}\}$$

یک $(\mathcal{V}^E, f_{n+1})$ - زنجیر از $B'' \cup \{w\}$ به B است. چون f_n ترایی زنجیری توپولوژیک است بنابراین $(\mathcal{V}^E, f_n)$ - زنجیر (و لذا $(\mathcal{V}^E, f_{n+1})$ - زنجیر) از $A'' \cup \{f^r(a_{n+1})\}$ به $B'' \cup \{w\}$ موجود است. در نتیجه با اتصال این زنجیرها یک $(\mathcal{V}^E, f_{n+1})$ - زنجیر از A به B در $F_{n+1}(X)$ خواهیم داشت.

گزاره ۳،۸ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت و $f: X \rightarrow X$ یک تابع پیوسته باشد. اگر برای هر $n \geq 2$ f_n ترایی زنجیری توپولوژیک باشد، آنگاه $\tilde{f}$ ترایی زنجیری توپولوژیک است.

برهان. فرض کنید برای هر $n, n \geq 2$ f_n ترایی زنجیری توپولوژیک باشد. مجموعه‌های $A, B \in \mathcal{K}(X)$ و همچنین $E \in \mathcal{U}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\hat{E}$ یک دربرگیرنده قطر متقارن باشد به طوریکه $\hat{E} \circ \hat{E} \subset E$. فرض کنید D دربرگیرنده قطر وابسته به $\hat{E}$ در تعریف پیوستگی f باشد. چون A و B فشرده هستند، برای $K \in F_m(X)$ و $L \in F_n(X)$ وجود دارند به طوریکه $A \subset D[K]$ و $B \subset D[L]$. همچنین با توجه به ترایی زنجیری توپولوژیک بودن f_n یک (D, f_n) - زنجیر $\{K = K_1, \dots, K_r = L\}$ بین K و L موجود است به طوریکه $(f_n(K_r), K_1) \in \mathcal{V}^D$ و $(f_n(K_{r-1}), L) \in \mathcal{V}^D$. ازاینکه $A \subset D[K]$ و پیوستگی f داریم $f(A) \subset f(D[K]) \subset \hat{E}[f(K)] \subset \hat{E}[D[K_1]] \subset \hat{E}^\vee[K_1] \subset E[K_1]$. بنابراین $(f_n(A), K_1) \in \mathcal{V}^E$. بطور مشابه می‌توان نشان داد که $(f_n(B), K_r) \in \mathcal{V}^E$. لذا $\{A, K = K_1, \dots, K_r = L, B\}$ یک $(\mathcal{V}^E, \tilde{f})$ - زنجیر از A به B در $\mathcal{K}(X)$ است.

نتیجه ۳،۹ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت و $f: X \rightarrow X$ یک تابع پیوسته باشد. اگر $f^{<\omega}$ ترایی زنجیری توپولوژیک باشد، آنگاه $\tilde{f}$ ترایی زنجیری توپولوژیک است.

اثبات قضیه ۳،۱ با توجه به نتیجه ۳،۹ داریم $(2) \Leftrightarrow (1)$. از ۳،۶، ۳،۷ و ۳،۸ به ترتیب خواهیم داشت $(2) \Rightarrow (3)$ ، $(3) \Rightarrow (4)$ و $(4) \Rightarrow (2)$.

لم ۳،۱۰ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت و $f: X \rightarrow X$ یک تابع پیوسته باشد. اگر برای هر $n \geq 2$ f_n ترایی زنجیری توپولوژیک باشد، آنگاه f نیز ترایی زنجیری توپولوژیک است و برای هر $Z \in X$ و هر دربرگیرنده قطر $E, (E, f)$ - زنجیرهایی از Z به خودش با طول‌های نسبت به هم اول وجود دارند.

برهان. در حالت خاص f_2 را ترایی زنجیری توپولوژیک در نظر می‌گیریم، فرض کنید $Z \in X$ و $E \in \mathcal{U}$ دلخواه باشند. چون f_2 ترایی زنجیری توپولوژیک است، $(\mathcal{V}^E, f_2)$ - زنجیر

$\{A. = \{z, f(z)\}, A_1, A_2, \dots, A_{r-1}, A_r = \{z\}\}$
 از $\{z, f(z)\}$ به $\{z\}$ در $F_r(X)$ وجود دارد. اگر این (E, f) -زنجیر دارای طول r باشد، آنگاه $x_1, x_2, \dots, x_{r-1}$
 $y_1, y_2, \dots, y_{r-1}$
 در X وجود دارند به طوریکه
 $\{z, x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, z\}$
 و

$\{z, f(z), y_1, y_2, \dots, y_{r-1}, z\}$
 به ترتیب (E, f) -زنجیرهایی از Z به خودش با طول r و $r + 1$ باشند. بنابراین با توجه به گزاره ۳،۴ f تراپای
 زنجیری توپولوژیک است.

لم ۳،۱۱ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت و $f: X \rightarrow X$ یک تابع پیوسته باشد. اگر f تراپای
 زنجیری توپولوژیک باشد، و $Z \in X$ موجود باشد بطوریکه برای هر دربرگیرنده قطر $E, (E, f)$ -زنجیرهایی از Z
 به خودش با طول‌های نسبت به هم اول موجود باشند، آنگاه f تراپای زنجیری توپولوژیک است.

برهان. فرض کنید $A = \{a_1, a_2\}$ و $B = \{b_1, b_2\}$ نقاطی در $F_r(X)$ باشند. و فرض کنید $E \in \mathcal{U}$ برای نشان
 دادن تراپای زنجیری توپولوژیک بودن f_i یک (f_r^E, f_r) -زنجیر از A به B در $F_r(X)$ می‌سازیم. برای $i \in \{1, 2\}$
 فرض کنید α_i کوتاه‌ترین (E, f) -زنجیر از a_i به z ، β_i کوتاه‌ترین (E, f) -زنجیر از z به b_i و γ_i یک
 (E, f) -زنجیر از z به z به طول p_i باشند. همچنین فرض کنید طول α_i برابر k_i و طول β_i برابر m_i است.
 به این ترتیب برای داشتن یک (f_r^E, f_r) -زنجیر از A به B در $F_r(X)$ کفایت اعداد مثبت t و r را پیدا کنیم
 به طوریکه

$$k_1 + rp_1 + m_1 = k_2 + tp_2 + m_2.$$

بدون کاستن از کلیت، می‌توانیم فرض کنیم $k_1 + m_1 > k_2 + m_2$ لذا اعداد r و t باید در رابطه

$$k_1 + m_1 - (k_2 + m_2) = tp_2 - rp_1$$

صدق کنند. چون $(p_1, p_2) = 1$ بنابراین همیشه احتمال یافتن اعداد r و t وجود دارد.

یادآوری می‌کنیم توابع پیوسته $f: X \rightarrow X$ و $g: Y \rightarrow Y$ به طور توپولوژیک مزدوج هستند، اگر یک تابع
 پیوسته h از X به Y موجود باشد، به طوریکه $h \circ f = g \circ h$ در این مورد h را یک تزویج بین f و g می‌گویند.

لم ۳،۱۲ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت، همچنین فرض کنید Y یک فضای یکنواخت و
 $f: X \rightarrow X$ و $g: Y \rightarrow Y$ مزدوج باشند اگر f تراپای زنجیری توپولوژیک باشد، آنگاه g نیز تراپای زنجیری
 توپولوژیک است.

برهان. فرض کنید h تزویج بین f و g باشد. تابع پوشا $H: X \times X \rightarrow Y \times Y$ را به صورت $H(x, y) =$
 $(h(x), h(y))$ تعریف کنید. برای یک دربرگیرنده قطر $E \in \mathcal{U}$ واضح است که $D = H^{-1}(E)$ یک دربرگیرنده
 قطر در X است. فرض کنید $x_1, x_2 \in X$ و $y_1, y_2 \in Y$ به طوریکه $H(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ چون H پیوسته
 یکنواخت است، دربرگیرنده قطر $D \in \mathcal{U}$ موجود است به طوریکه برای هر $(a, b) \in D$ ، $(h(a), h(b)) \in E$.
 چون f تراپای زنجیری توپولوژیک است یک (D, f) -زنجیر

$\{x_1 = z., z_1, \dots, z_r = x_r\}$
 در X وجود دارد. از طرفی چون برای $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ ، $(f(z_i), z_{i+1}) \in D$ بنابراین
 $(g(h(z_i)), h(z_{i+1})) = (H(f(z_i)), (z_{i+1})) \in E$
 حال دنباله $\{y_1 = h(z.), h(z_1), \dots, h(z_r) = y_r\}$ یک $-(E, g)$ زنجیر در Y است.

ایده برهان گزاره زیر از منبع [۷] الهام گرفته شده است.

گزاره ۳، ۱۳ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت و $f: X \rightarrow X$ یک تابع پیوسته باشد و $n \geq 2$.
 آنگاه موارد زیر معادل هستند:

• $f^{(n)}: X^{(n)} \rightarrow X^{(n)}$ ترایی زنجیری توپولوژیک است،

• $f_n: F_n(X) \rightarrow F_n(X)$ ترایی زنجیری توپولوژیک است.

برهان. فرض کنید برای هر $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n$ ، $h: X^{(n)} \rightarrow F_n(X)$ به صورت

$$h((x_1, x_2, \dots, x_n)) = \{x \in X : x = x_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

تعریف شده باشد. همچنین اگر $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^{(n)}$ آنگاه

$$\begin{aligned} (h \circ f^{(n)})((x_1, x_2, \dots, x_n)) &= h((f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))) \\ &= \{x \in X : x = f(x_i), i \in \{1, 2, \dots, n\}\} \\ &= f_n(\{x \in X : x = x_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}) \\ &= f_n(h((x_1, x_2, \dots, x_n))) \\ &= f_n \circ h((x_1, x_2, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به لم ۳، ۱۲ و شرط (۱)، گزاره (۲) نتیجه می‌شود. برای اینکه گزاره (۲)، گزاره (۱) را نتیجه دهد،

فرض کنید $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X^{(n)}$

$E \in \mathcal{U}$ و $z \in X$ ، آنگاه $h((x_1, x_2, \dots, x_n))$ ، $h((y_1, y_2, \dots, y_n))$ و $\{z\}$ عضوی از $F_n(X)$ هستند. با

توجه به فرضیات $(f_n^E, -)$ زنجیرهایی در $F_n(X)$ به شکل

$$\{h((x_1, x_2, \dots, x_n)) = A., A_1, \dots, A_{m_1} = \{z\}\}$$

و

$$\{\{z\} = B., B_1, \dots, B_{m_2} = h((y_1, y_2, \dots, y_n))\}$$

وجود دارند. برای هر $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ، $-(E, f)$ زنجیرهای $\{x_i = a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{m_1} = z\}$ و

$\{z = b_i^1, b_i^2, \dots, b_i^{m_2} = y_i\}$ در X بدست می‌آوریم که برای هر $j \in \{0, 1, \dots, m_1\}$ و $t \in \{0, 1, \dots, m_2\}$

بنابراین دنباله $\{D., D_1, \dots, D_{m_1}, D_{m_1+1}, \dots, D_{m_1+m_2}\}$ که به صورت

$$D_i = \begin{cases} (a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^n) & i \in \{0, 1, \dots, m_1\} \\ (b_{i-m_1}^1, \dots, b_{i-m_1}^{m_2}) & i \in \{m_1+1, \dots, m_1+m_2\}, \end{cases}$$

در نظر گرفته شده یک $-(E, f^{(n)})$ زنجیر در $X^{(n)}$ از $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ به $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ است.

نتیجه ۳،۱۴ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت و $f: X \rightarrow X$ یک تابع پیوسته باشد. آنگاه موارد زیر معادل هستند:

- $f^{(2)}$ برای f تراپای زنجیری توپولوژیک است،
- برای هر $n \geq 2$ $f^{(n)}$ تراپای زنجیری توپولوژیک است.

توجه کنید اگر f آمیختگی زنجیری توپولوژیک ضعیف باشد، آنگاه $f^{(2)}: X^{(2)} \rightarrow X^{(2)}$ تراپای زنجیری توپولوژیک است.

لم ۳،۱۵ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت و $f: X \rightarrow X$ یک تابع پیوسته باشد. اگر برای هر $n \geq 2$ $f^{(n)}$ تراپای زنجیری توپولوژیک باشد، آنگاه برای هر $x, y \in X$ یک $(E, f) -$ زنجیر به طول k از x به y وجود دارد. $k(E) \geq 2$ موجود است به طوریکه برای هر $x, y \in X$ یک $(E, f) -$ زنجیر به طول k از x به y وجود دارد.

برهان. فرض کنید $E \in \mathcal{U}$ و $D \in \mathcal{U}$ بطوریکه $D^2 \subset E$ چون X فشرده است، $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ وجود دارند به طوریکه، $X = \{Int_X(D[x_i])\}_{i=1}^k$ فرض کنید $x, y \in X$ با توجه به فرضیات، $f^{(k)}: X^{(k)} \rightarrow X^{(k)}$ تراپای زنجیری توپولوژیک است. چون $(x, x, \dots, x), (x_1, x_2, \dots, x_k) \in X^{(k)}$ یک $(D, f^{(k)}) -$ زنجیر

$\{(w, w, \dots, w) = (a_1, a_2, \dots, a_k), \dots, (a_1^r, a_2^r, \dots, a_k^r) = (x_1, x_2, \dots, x_k)\}$ وجود دارد. به عبارتی، برای $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ $y \in Int_X(D[x_j])$ بنابراین $y \in D^2 \subset E$ لذا $f(a_j^{r-1}), y \in D^2 \subset E$ دنباله $\{x = a_j, a_j^2, \dots, a_j^{r-1}, y\}$ یک $(E, f) -$ زنجیر به طول k از x به y است.

لم ۳،۱۶ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت و $f: X \rightarrow X$ یک تابع پیوسته باشد. اگر برای هر $w \in X$ و هر $n \geq 1$ عدد مثبت E یک عدد مثبت n موجود باشد به طوریکه برای هر $x \in X \setminus \{w\}$ یک $(E, f) -$ زنجیر به طول n از w به x وجود داشته باشد، آنگاه f به وسیله زنجیرهای توپولوژیک کامل است.

برهان. فرض کنید $E \in \mathcal{U}$ و W یک زیرمجموعه باز ناتهی از X باشد. چون W ناتهی است، فرض کنید $w \in W$ بنابراین عدد مثبت $n \geq 1$ موجود است به طوریکه برای هر $x \in X \setminus \{w\}$ یک $(E, f) -$ زنجیر به طول n از w به x وجود دارد.

لم ۳،۱۷ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت و $f: X \rightarrow X$ یک تابع پیوسته باشد. اگر f توسط زنجیرهای توپولوژیک کامل باشد، آنگاه f آمیختگی زنجیری ضعیف توپولوژیک است.

برهان. فرض کنید f توسط زنجیرهای توپولوژیک کامل باشد. برای اینکه نشان دهیم $f^{(2)}: X^{(2)} \rightarrow X^{(2)}$ تراپای زنجیری توپولوژیک است، فرض کنید $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X^{(2)}$ و $E \in \mathcal{U}$ و $W_1 = Int_X(E[f(x_1)])$ و همچنین $W_2 = Int_X(E[f(x_2)])$. با توجه به فرضیات، اعداد مثبت m_1, m_2 وجود دارند، به طوریکه برای هر $x \in X$

$$w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$$

و (E, f) زنجیرهای $\{w_1 = a., a_1, \dots, a_{m_1} = x\}$ و $\{w_r = b., b_1, \dots, b_{m_r} = x\}$ وجود دارند. بنابراین برای $w'_1 \in W_1, f(x_r)$ و یک (E, f) زنجیر

$$\{w'_1 = c., c_1, \dots, c_{m_1} = f(x_r)\}$$

وجود دارد. به طور مشابه، برای $w'_r \in W_r, f(x_1)$ و یک (E, f) زنجیر $\{w'_r = d., d_1, \dots, d_{m_r} = f(x_1)\}$ وجود دارد. لذا برای $w''_1 \in W_1, y_1$ و $w''_r \in W_r, y_r$ زنجیر $\{w''_1 = s., s_1, \dots, s_{m_1} = y_1\}$ را داریم. به همین ترتیب برای $w''_1 \in W_1, y_r$ و $w''_r \in W_r, y_r$ زنجیر

$$\{w''_1 = t., t_1, \dots, t_{m_1} = y_r\}$$

وجود دارد. در نتیجه دنباله‌های

$$\{x_1, w'_1 = c., c_1, \dots, c_{m_1} = f(x_r), w''_r = s., s_1, \dots, s_{m_r} = y_1\}$$

و

$$\{x_r, w'_r = d., d_1, \dots, d_{m_r} = f(x_1), w''_1 = t., t_1, \dots, t_{m_1} = y_r\}$$

(E, f) زنجیرهایی با طول یکسان هستند. بنابراین، دنباله

$$\{(x_1, x_r), (w'_1, w'_r) = (c., d.), \dots, (s_{m_r}, t_{m_1}) = (y_1, y_r)\}$$

یک $(E, f^{(r)})$ زنجیر در $X^{(r)}$ است.

لم ۳، ۱۸ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت و $f: X \rightarrow X$ یک تابع پیوسته باشد. اگر برای هر $n \geq 2$ $f^{(n)}$ ترایی زنجیری توپولوژیک باشد، آنگاه f ترایی زنجیری توپولوژیک کلی است.

برهان. فرض کنید $n \geq 2$ و $E \in \mathcal{U}$. همچنین فرض کنید $D_n \in \mathcal{U}$ یک دربرگیرنده قطر باشد به طوریکه $D_n^r \subset E$. آنگاه $\widehat{D}_n \subset D_n$ موجود است به طوریکه $(x, y) \in \widehat{D}_n, (f(x), f(y)) \in D_n$ را نتیجه می‌دهد. حال $D_{n-1} \in \mathcal{U}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\widehat{D}_{n-1} \subset D_{n-1}$ و همچنین $D_{n-1}^r \subset \widehat{D}_n$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $(x, y) \in \widehat{D}_{n-1}, (f(x), f(y)) \in D_{n-1}$ را نتیجه می‌دهد. با برگشتن به عقب به صورت استقرا برای

$$i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

دربرگیرنده‌های قطر D_i و $\widehat{D}_i$ وجود دارند به طوریکه $D_{i-1}^r \subset \widehat{D}_i$ و $(f \times f)(\widehat{D}_i) \subset D_i$. دربرگیرنده قطر $D \in \mathcal{U}$ را طوری انتخاب کنید که $D^r \subset D_1$. با توجه به فرضیات یک $(D, f^{(n)})$ زنجیر

$$\{(x, y, y, \dots, y) = (z_1^r, z_2^r, \dots, z_n^r), (z_1^1, z_2^1, \dots, z_n^1), \dots, (z_1^t, z_2^t, \dots, z_n^t) = (y, y, \dots, y)\}$$

با $t \geq 1$ وجود دارد. بنابراین، دنباله

$$\{x = z_1^r, z_1^1, z_1^t, \dots, z_n^t = y = z_2^r, z_2^1, \dots, z_n^t = y = z_3^r, z_3^1, \dots, z_n^t = y\}$$

یک D زنجیر به طول tn است. با تغییر نام دادن اعضای این D زنجیر، می‌توان نوشت $\{x = a., a_1, \dots, a_{tn} = y\}$ چون $(f(x), a_1) \in D \subset \widehat{D}_1$ آنگاه $(f^r(x), f(a_1)) \in D_1$. همچنین با داشتن $(f(a_1), a_r) \in D \subset \widehat{D}_1$.

$$(f^r(x), a_r) \in D_1 \circ \widehat{D}_1 \subset D_1 \circ D_1 \subset \widehat{D}_r$$

نتیجه می‌شود. از طرفی چون $(f^r(x), a_r) \in \widehat{D}_r$ آنگاه $(f^r(x), f(a_r)) \in D_r$. همچنین با داشتن $(f^n(x), a_n) \in \widehat{D}_r, (f(a_r), a_r) \in D_r$ نتیجه می‌شود. با ادامه این روند، در نهایت $(f^n(x), a_n) \in \widehat{D}_r$.

$D_n = E$ را خواهیم داشت. به طور مشابه برای هر

$(f^n(a_{in}), a_{(i+1)n}) \in E, i \in \{0, 1, \dots, t-1\}$ لذا دنباله

$$\{x = z., z_1 = a_n, z_2 = a_{2n}, \dots, z_t = a_{tn} = y\}$$

یک (E, f^n) - زنجیر در X است. بنابراین برای هر $n \geq 2$ $f^{(n)}$ ترایای زنجیری توپولوژیک است.

لم ۳، ۱۹ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت و $f: X \rightarrow X$ یک تابع پیوسته باشد. اگر f ترایای زنجیری توپولوژیک کلی باشد، آنگاه f آمیختگی زنجیری توپولوژیک ضعیف است.

برهان. فرض کنید $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X^{(2)}$

$E \in \mathcal{U}$ و $w \in X$ چون f ترایای زنجیری توپولوژیک کلی است، در حالت خاص f ترایای زنجیری توپولوژیک است. بنابراین یک (E, f) - زنجیر α_1 از x_1 به w به طول m_1 و همچنین یک (E, f) - زنجیر α_2 از w به x_1 به طول m_2 وجود دارد. با توجه به فرضیات $f^{m_1+m_2}$ ترایای زنجیری توپولوژیک است، لذا یک زنجیر $\alpha_3 = \{x_2 = a., a_1, \dots, a_{m_2} = x_1\}$ برای $f^{m_1+m_2}$ به x_1 به x_2 به طول m_3 وجود دارد. چون دنباله

$$\begin{aligned} \alpha'_3 = \{ & x_2 = a., f(a.), f^2(a.), \dots, f^{m_1+m_2-1}(a.), \\ & a_1, f(a_1), \dots, f^{m_1+m_2-1}(a_1), a_2, \dots, \\ & a_{m_2-1}, f(a_{m_2-1}), \dots, f^{m_1+m_2-1}(a_{m_2-1}), a_{m_2} = x_1 \} \end{aligned}$$

یک (E, f) - زنجیر از x_2 به x_1 با طول

$m_3(m_1 + m_2)$ است، در نتیجه دنباله‌های

$$\alpha_1 + m_3(\alpha_2 + \alpha_3)$$

و $\alpha'_3 + \alpha_1$ به ترتیب (E, f) - زنجیرهایی از x_1 به w و از x_2 به w با طول

$m_3(m_1 + m_2) + m_1$ می‌باشند. بنابراین از این (E, f) - زنجیرهای با طول یکسان، یک $(E, f^{(2)})$ - زنجیر α در $X^{(2)}$ از (x_1, x_2) به (w, w) به دست می‌آید. بطور مشابه، می‌توان یک $(E, f^{(2)})$ - زنجیر β در $X^{(2)}$ از (w, w) به (y_1, y_2) ساخت. لذا با اتصال $\alpha + \beta$ یک $(E, f^{(2)})$ - زنجیر در $X^{(2)}$ از (x_1, x_2) به (y_1, y_2) خواهیم داشت. در نتیجه $f^{(2)}: X^{(2)} \rightarrow X^{(2)}$ ترایای زنجیری توپولوژیک است.

اثبات قضیه ۳، ۲ فرض کنید f توسط زنجیرهای توپولوژیک کامل باشد، آنگاه با توجه به ۳، ۱۷ f آمیختگی زنجیری توپولوژیک ضعیف است، یعنی $f^{(2)}$ ترایای زنجیری توپولوژیک است. با توجه ۳، ۱۴ برای هر $n \geq 2$ $f^{(n)}$ ترایای زنجیری توپولوژیک است، با توجه به ۳، ۱۵ و ۳، ۱۷ f توسط زنجیرهای توپولوژیک کامل است. در نتیجه (۱) $\Leftrightarrow$ (۲) $\Leftrightarrow$ (۳). با توجه [۴] (۴) $\Leftrightarrow$ (۵). با توجه ۳، ۱۸ و ۳، ۱۹، به ترتیب خواهیم داشت (۴) $\Rightarrow$ (۳) و (۴) $\Rightarrow$ (۲). یادآوری می‌کنیم خانواده $\mathcal{C}$ از زیرمجموعه‌های یک فضای توپولوژیک X یک پوشش از X گفته می‌شود، اگر

$$X = \bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{G \in \mathcal{C}} G.$$

اگر $\mathcal{C}$ تنها شامل مجموعه‌های باز باشد، آنگاه $\mathcal{C}$ یک پوشش باز از X گفته می‌شود.

تعریف ۳، ۲۰ فرض کنید Γ یک پوشش باز از فضای یکنواخت X باشد، آنگاه یک دربرگیرنده قطر D موجود است

به طوریکه هر یک از همسایگی‌های یکنواخت $D[x]$

$(x \in K)$ مشمول در اعضای Γ باشند، D را دربرگیرنده لبگ می‌گویند [۱۹].

گزاره ۳,۲۱ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت و A یک مجموعه باز ناتهی باشد. اگر $K \in \mathcal{K}(X)$ و $K \subset A$ آنگاه یک دربرگیرنده قطر $D \in \mathcal{U}$ موجود است به طوریکه $D[K] \subset A$

برهان. با توجه به فرضیات $K \subset A$ و فرض کنید $\{U_\alpha\}$ یک پوشش باز از X باشد، آنگاه $\{U_\alpha \cap A\}$ یک پوشش باز فشرده مجموعه K است. با توجه (دربرگیرنده قطر لبگ) یک دربرگیرنده قطر D موجود است به طوریکه هر یک از همسایگی‌های یکنواخت $(x \in K)$ $D[x]$ مشمول در $\{U_\alpha \cap A\}$ است. بنابراین $D[K] \subseteq A$.

گزاره ۳,۲۲ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت و $f: X \rightarrow X$ یک تابع پیوسته یکنواخت باشد. اگر $Per(f)$ در X چگال باشد، آنگاه $Per(\tilde{f})$ در $\mathcal{K}(X)$ چگال است.

برهان. فرض کنید $E \in \mathcal{U}$ و $K \in \mathcal{K}(X)$. نشان می‌دهیم که $\mathcal{U}^E[K] \cap Per(\tilde{f}) \neq \emptyset$. چون مجموعه $\{Int(U[x]): x \in K\}$ دارای زیرپوشش متناهی $\{Int(U[x_i]): x_1, x_2, \dots, x_n \in K\}$ است، به طوریکه $Int(U[x_i])$ شامل نقاط متناوب P_i با تناوب k_i می‌باشد. بنابراین مجموعه $A = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ یک نقطه متناوب از $\tilde{f}$ با دوره تناوب $K = LCM\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ است، همچنین $A \in \mathcal{U}^E[K]$.

تعریف ۳,۲۳ فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از X باشد. توسیع A به $\mathcal{K}(X)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۱۴].

$$e(A) = \{K \in \mathcal{K}(X): K \subset A\}.$$

گزاره ۳,۲۴ فرض کنید A یک زیرمجموعه باز ناتهی از X باشد. آنگاه $e(A)$ زیرمجموعه باز ناتهی از $\mathcal{K}(X)$ است.

برهان. واضح است که $e(A)$ ناتهی است. اگر $K \in e(A)$ آنگاه $K \subset A$. با توجه به گزاره قبل دربرگیرنده قطر $D \in \mathcal{U}$ موجود است به طوریکه $D[K] \subset A$. اگر $L \in \mathcal{K}(X)$ موجود باشد آنگاه $L \subset D[K] \subset A$ و لذا $L \in e(A)$ ، و در نتیجه $e(A)$.

گزاره ۳,۲۵ فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از X باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} e(A \cap B) &= e(A) \cap e(B) \cdot \\ \tilde{f}(e(A)) &\subseteq e(f(A)) \cdot \\ \tilde{f}^n &= \tilde{f}^n, n \in \mathbb{N} \text{ برای هر} \cdot \\ e(A) &= \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \cdot \end{aligned}$$

قضیه ۳,۲۶ فرض کنید $(X, \mathcal{U})$ یک فضای فشرده یکنواخت باشد. اگر $f: X \rightarrow X$ یک تابع پیوسته یکنواخت باشد. آنگاه تراییی $\tilde{f}$ تراییی f را نتیجه می‌دهد.

برهان. فرض کنید U, V مجموعه‌های باز ناتهی در X باشند. آنگاه مطابق گزاره $e(U)$ و $e(V)$ مجموعه‌های باز ناتهی در $\mathcal{K}(X)$ هستند. چون $\tilde{f}$ ترایاست، $k \in N$ موجود است به طوریکه

$$\tilde{f}^k(e(U)) \cap e(V) = \tilde{f}^k(e(U)) \cap e(V) \neq \emptyset.$$

لذا با توجه به گزاره داریم

$$e(f^k(U)) \cap e(V) = e(f^k(U) \cap V) \neq \emptyset.$$

در نتیجه $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

به جای توپولوژی ویتوریس می‌توان $-W^e$ توپولوژی ایجاد شده روی $\mathcal{K}(X)$ توسط مجموعه‌های $e(A)$ که A در X یک مجموعه باز است، در نظر گرفت. در حالت کلی می‌توانیم $-W^e$ توپولوژی را به صورت زیر توصیف کنیم:

$$\emptyset, \mathcal{K}(X) \in W^e \bullet$$

• تمام اشتراک متناهی مجموعه

$$\{e(A) : A \text{ در } X \text{ باز است}\}$$

و تمام اجتماع دلخواه این اشتراک‌های متناهی در W^e قرار دارد.

قضیه ۳،۲۷ فرض کنید (X, f) یک سیستم دینامیکی باشد. آنگاه شرایط زیر معادل هستند:

$$\bullet (X, f) \text{ ترایاست،}$$

$$\bullet (\mathcal{K}(X), \tilde{f})_{W^e} \text{ ترایاست.}$$

برهان. فرض کنید $W_\gamma, W_\gamma \in W^e$ مجموعه‌های باز ناتهی باشند. با توجه به تعریف می‌توانیم بنویسیم

$$W_\gamma = \bigcup_i e(U_i) \text{ و } W_\gamma = \bigcup_j e(V_j)$$

که U_i و V_j مجموعه‌های باز ناتهی در X هستند. i و j را ثابت در نظر بگیرید، فرض کنید $x \in U_i$ و $y \in V_j$. بنابراین دربرگیرنده قطر $E \in \mathcal{U}$ موجود است به طوریکه $E[x] \subseteq U_i$ و $E[y] \subseteq V_j$. چون f ترایاست، $k \in N$ موجود است به طوریکه

$$f^k(\text{Int}E[y]) \cap (\text{Int}E[x]) \neq \emptyset$$

اگر

$$z \in f^k(\text{Int}E[y]) \cap (\text{Int}E[x])$$

آنگاه

$$\{z\} \in e(U_i)$$

و $\tilde{f}^k(\{z\}) = \{f^k(z)\} \in e(V_j)$ ، بنابراین $\tilde{f}^k(e(U_i)) \cap e(V_j) \neq \emptyset$ ، در نتیجه

$$\tilde{f}^k(W_\gamma) \cap W_\gamma \neq \emptyset$$

. لذا $\tilde{f}$ ترایاست.

فهرست منابع

- [۱] J. Kennedy and V. Nall. Dynamical properties of shift maps on inverse limits with a set valued function. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, ۳۸(۴):۱۴۹۹–۱۵۲۴, ۲۰۱۸.
- [۲] A. Barwell, C. Good, R. Knight, and B. E. Raines. A characterization of ω -limit sets in shift spaces. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, ۳۰(۱):۲۱–۳۱, ۲۰۱۰.
- [۳] A. Peris. Set-valued discrete chaos. *Chaos, Solitons , Fractals*, ۲۶(۱):۱۹ – ۲۳, ۲۰۰۵.
- [۴] G. Acosta, A. Illanes, and H. Méndez-Lango. The transitivity of induced maps. *Topology and its Applications*, ۱۵۶(۵):۱۰۱۳ – ۱۰۳۳, ۲۰۰۹.
- [۵] E. Akin, J. Auslander, and A. Nagar. Dynamics of induced systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, ۳۷(۷):۲۰۳۴–۲۰۵۹, ۲۰۱۷.
- [۶] L. Fernández, C. Good, and M. Puljiz. Almost minimal systems and periodicity in hyperspaces. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, ۳۸(۶):۲۱۵۸–۲۱۷۹, ۲۰۱۸.
- [۷] L. Fernández, C. Good, M. Puljiz, and Ártico Ramírez. Chain transitivity in hyperspaces. *Chaos, Solitons, Fractals*, ۸۱:۸۳ – ۹۰, ۲۰۱۵.
- [۸] Y. Wang and G. Wei. Characterizing mixing, weak mixing and transitivity of induced hyperspace dynamical systems. *Topology and its Applications*, ۱۵۵(۱):۵۶ – ۶۸, ۲۰۰۷.
- [۹] X. Wu, Y. Luo, X. Ma, and T. Lu. Rigidity and sensitivity on uniform spaces. *Topology and it's Applications*, ۲۵۲:۱۴۵–۱۵۷, ۲۰۱۹.
- [۱۰] G. Zhang, F. Zeng, and X. Liu. Devaney's chaotic on induced maps of hyperspace. *Chaos, Solitons , Fractals*, ۲۷(۲):۴۷۱ – ۴۷۵, ۲۰۰۶.
- [۱۱] W. Bauer and K. Sigmund. Topological dynamics of transformations induced on the space of probability measures. *Monatshefte für Mathematik*, ۷۹(۲):۸۱–۹۲, Jun ۱۹۷۵.
- [۱۲] J. Banks. Chaos for induced hyperspace maps. *Chaos, Solitons , Fractals*, ۲۵(۳):۶۸۱ – ۶۸۵, ۲۰۰۵.
- [۱۳] S. A. Ahmadi. Shadowing, ergodic shadowing and uniform spaces. *Filomat*, ۳۱:۵۱۱۷–۵۱۲۴, ۲۰۱۷.
- [۱۴] S. A. Ahmadi, X. Wu, Z. Feng, X. Ma, and T. Lu. On the entropy points and shadowing in uniform spaces. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, ۲۸:۱۸۵۰۱۵۵ (۱۰ pages), ۲۰۱۸.
- [۱۵] T. Das, K. Lee, D. Richeson, and J. Wiseman. Spectral decomposition for topologically anosov homeomorphisms on noncompact and non-metrizable spaces. *Topology and it's Applications*, ۱۶۰(۱):۱۴۹–۱۵۸, ۲۰۱۳.
- [۱۶] R. Vasisht and R. Das. Induced dynamics in hyperspaces of non-autonomous discrete systems. *Filomat*, ۳۳(۷):۵۱۱۷–۵۱۲۴, ۲۰۱۹.

[۱۷] X. Wu, X. Ma, Z. Zhu, and T. Lu. Topological ergodic shadowing and chaos on uniform spaces. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, ۲۸(۳):۱۸۵۰۰۴۳ (۹ pages), ۲۰۱۸.

[۱۸] C. Good and S. Macías. What is topological about topological dynamics? *Discrete and Continus Dynamical systems*, ۳۸:۱۰۰۷–۱۰۳۱, ۲۰۱۸.

[۱۹] I. James. *Topologies and Uniformities*. Springer-Verlag London, Ltd., London, ۱۹۹۹.

[۲۰] S. A. Ahmadi and X. Wu. and G. Chen, Topological chain and shadowing properties of dynamical systems on uniform spaces, *Topology and it's Applications*, (۲۷۵) ۱۰۷۱۵۳ (۸ pages) ۲۰۲۰.