دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره بیست و نهم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

برخی نتایج درباره آیزوکلینیسم در جبرهای لی

همایون عربیانی[۱]، حمید دارابی[۲*]

[۱] استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد نیشابور، نیشابور، ایران
[۲] استادیار، گروه ریاضی، مجتمع آموزش عالی فنی و مهندسی اسفراین، اسفراین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۹/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۰۷/۰۲

چکیده

آیزوکلینیسم در طبقه‌بندی جبرهای لی کاربرد گسترده‌ای دارد. این مفهوم نسبت به مفهوم یکریختی دارای ساختار ضعیف‌تری است. آیزوکلینیسم جبرهای لی ابتدا توسط مانیهان معرفی شد و بعد از آن توسط دیگران به n–آیزوکلینیسم در جبرهای لی و همچنین آیزوکلینیسم در یک جفت از جبرهای لی تعمیم داده شد. در این مقاله، به بررسی n–آیزوکلینیسم در جبرهای لی می‌پردازیم و برخی ویژگی‌های n–آیزوکلینیسم را در جبرهای لی اثبات می‌کنیم. از جمله، اثبات می‌کنیم که اگر L_1 و L_2 دو جبر لی باشند که اشتراک مرکز و زیرجبر فراتینی در آن‌ها صفر باشد، آیزوکلینیسمی L_1 و L_2، معادل یکریختی فاکتورهای مرکزی آن دو است.

واژه‌های کلیدی: n–آیزوکلینیسم، زیرجبر فراتینی، جبر لی تنه‌ای.

*. عهده‌دار مکاتبات:
Email: darabi@esfarayen.ac.ir

۱– مقدمه

طبقه‌بندی یکی از موضوعات اساسی در نظریه گروه‌ها می‌باشد. فیلیپ هال [۱] در سال ۱۹۴۰، مفهوم آیزوکلینیسم گروه‌ها را معرفی کرد. این مفهوم نسبت به یکریختی گروه‌ها ضعیف‌تر است. یعنی اگر دو گروه با هم یکریخت باشند آن گاه آیزوکلینیسم هستند اما عکس این مطلب درست نیست. برای اطلاعات بیشتر می‌توان به [۲]، [۳]، [۴] و [۵] مراجعه نمود.

مانیهان [۶] در سال ۱۹۹۴ به طور مشابه مفهوم آیزوکلینیسم را برای جبرهای لی معرفی و اثبات کرد که مفاهیم آیزوکلینیسم و یکریختی در جبرهای لی از بُعد متناهی یکسان هستند. برخی از کاربردها و نتایج بیشتر در این زمینه را می‌توان در [۷] و [۸] مشاهده نمود.

در [۹] آیزوکلینیسم جبرهای لی به n–آیزوکلینیسم تعمیم داده شده است.

فرض کنیم L_1 و L_2 دو زیرجبر از جبر لی L باشند. در این صورت زیرفضای تولید شده توسط بردارهای $[l_1,l_2]$ که در آن $l_i \in L_i \ (i=1,2)$ را با نماد $[L_1,L_2]$ نمایش می‌دهیم. همچنین قرار می‌دهیم $L^1=L$ و برای هر n طبیعی تعریف می‌کنیم $L^n=\left[L^{n-1},L\right]$. اگر عدد مثبت c وجود داشته باشد به‌طوری که $L^c=0$، جبر لی L را پوچتوان می‌نامیم. زیرجبر $L^2=[L,L]$ را زیرجبر مشتق L می‌نامیم. اگر $L^2=0$، جبر لی L آبلی نامیده می‌شود. مرکز L به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z(L)=\{x\in L:[x,L]=0\}$$

جبر لی L را تنه‌ای گویند، هرگاه $Z(L)\subseteq L^2$.

اشتراک زیرجبرهای بیشین جبر لی L را زیرجبر فراتینی L می‌نامند و آن را با $\Phi(L)$ نمایش می‌دهند.

سری‌های مرکزی پایینی و بالایی جبر لی L به ترتیب عبارتند از:

$$L=L^1\supseteq L^2\supseteq\ldots\supseteq L^{n+1}\supseteq\ldots.$$

و

$$0=Z_0(L)\subseteq Z_1(L)=Z(L)\subseteq Z_2(L)\subseteq\ldots$$

که در آن $L^{n+1}=\left[L,L^n\right]$ و $Z_n(L)/Z_{n-1}(L)=Z\left(L/Z_{n-1}(L)\right)$.

فرض کنیم L و H دو جبر لی و $\alpha:\dfrac{L}{Z_n(L)}\to\dfrac{H}{Z_n(H)}$ و $\beta:L^{n+1}\to H^{n+1}$ همریختی‌هایی از جبرهای لی باشند به طوری که نمودار زیر جابجایی باشد.

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{L}{Z_n(L)}\times\cdots\times\dfrac{L}{Z_n(L)} & \xrightarrow{\varphi} & L^{n+1}\\
\Big\downarrow{\scriptstyle\alpha^{n+1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\beta}\\
\dfrac{H}{Z_n(H)}\times\cdots\times\dfrac{H}{Z_n(H)} & \xrightarrow{\psi} & H^{n+1}
\end{array}$$

نگاشت‌های φ و ψ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\varphi(\bar{l}_1,\ldots,\bar{l}_{n+1})=\left[l_1,\ldots,l_{n+1}\right]$$

برای هر $\bar{l}_i=l_i+Z_n(L)\in L/Z_n(L)$ و $\psi(\bar{h}_1,\ldots,\bar{h}_{n+1})=\left[h_1,\ldots,h_{n+1}\right]$ برای هر $\bar{h}_i=h_i+Z_n(H)\in H/Z_n(H)$.

در این صورت جفت (α,β) را یک n–آیزوکلینیسم بین L و H و دو جبر لی L و H را n–آیزوکلینیک می‌نامیم. اگر $n=1$ آنگاه مفهوم آیزوکلینیسم در [۶] به دست می‌آید.

۲- نتایج اصلی

در این بخش برخی از ویژگی‌های آیزوکلینیسم را درباره جبرهای لی مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا به بیان چند لم مقدماتی از [۹] می‌پردازیم که در اثبات نتایج اصلی مفید واقع می‌شوند.

لم ۱.۲: فرض کنیم (α,β) یک n–آیزوکلینیسم بین جبرهای لی L و H باشد، در این صورت برای هر $i\geq 0$

$$\alpha\left(\frac{L^{i+1}+Z_n(L)}{Z_n(L)}\right)=\frac{H^{i+1}+Z_n(H)}{Z_n(H)} \qquad (۱)$$

$$\beta\left(\frac{L^{n+1}\cap Z_i(L)}{Z_n(L)}\right)=H^{n+1}\cap Z_i(H) \qquad (۲)$$

لم ۲.۲: فرض کنیم L یک جبر لی و N ایده‌آل L باشد، در این صورت

الف: اگر $N\cap Z(L)=0$ آنگاه برای هر $n\geq 1$،
$N\cap Z_n(L)=0$

ب: اگر برای یک $n\geq 1$، $N\cap L^{n+1}=0$ آنگاه $N\subseteq Z_n(L)$.

لم ۳.۲: فرض کنیم L یک جبر لی باشد و $n\geq 1$. در این صورت یک جبر لی T وجود دارد به طوری که: $L\sim_n T$ و $Z(T)\cap T^n\leq T^{n+1}$ یادآوری می‌کنیم که اگر L یک جبر لی و α یک عدد ترتیبی باشد، آنگاه $Z_\alpha(L)$ از سری مرکزی بالایی L به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_{\alpha+1}(L)/Z_\alpha(L)=Z\left(L/Z_\alpha(L)\right)$$

به‌طوری که $Z_0(L)=0$ و $Z_\lambda(L)=\bigcup_{\alpha<\lambda}Z_\alpha(L)$.
به وضوح یک عدد ترتیبی β وجود دارد به طوری‌که:

$$Z_\beta(L)=Z_{\beta+1}(L)=\cdots$$

که ابرمرکز L نامیده می‌شود.

گزاره ۴.۲: فرض کنیم L یک جبر لی پوچتوان باشد به طوری‌که $\Phi(L)\cap Z(L)=0$ در این صورت $Z(L)$ یک ابرمرکز L است.

برهان: با توجه به [۱۰]، در جبرهای لی پوچتوان، فراتینی و مشتق برابرند و لذا

$$L^2\cap Z(L)=\Phi(L)\cap Z(L)$$

بنابراین با توجه به لم ۲.۲ برای هر $n>0$ داریم $L^2\cap Z_n(L)=0$ و لذا $Z(L)=Z_n(L)$. در نتیجه $Z(L)$ یک ابر مرکز L است.

قضیه ۵.۲: فرض کنیم L یک جبر لی باشد به طوری‌که $L^{n+1}\cap Z_n(L)=0$ در این صورت $Z_n(L)$ یک ابرمرکز L است.

برهان: فرض کنیم $L^{n+1}\cap Z_n(L)=0$. در این صورت

$$L^{n+1}\cap Z(L)\subseteq L^{n+1}\cap Z_n(L)=0$$

بنابراین، باتوجه به قسمت الف از لم ۲.۲، برای هر $i\geq 1$،

$$L^{n+1}\cap Z_{n+i}(L)=0$$

لذا، با توجه به قسمت ب از لم۲. ۲، برای هر $i\geq 1$،

$$Z_{n+i}(L)\subseteq Z_n(L)$$

در نتیجه $Z_n(L)$ یک ابرمرکز L می‌باشد.

قضیه ۶.۲: فرض کنیم L_1 و L_2 دو جبر لی باشند، به طوری که

$$L_1^{n+1}\cap Z_n(L_1)=L_2^{n+1}\cap Z_n(L_2)=0$$

در این صورت $L_1\sim_{n+1}L_2$ اگر و تنها اگر $L_1\sim_n L_2$.

برهان: اگر $L_1\sim_{n+1}L_2$ آنگاه به وسیله یک یکریختی α،

$$L_1/Z_{n+1}(L_1)\cong L_2/Z_{n+1}(L_2)$$

بنابراین با توجه به قضیه ۲. ۵

$$L_1/Z_n(L_1)\cong L_2/Z_n(L_2)$$

در نتیجه α یک یکریختی از $\left(L_1/Z_n(L_1)\right)^{n+1}$ به $\left(L_2/Z_n(L_2)\right)^{n+1}$ القا می‌کند. بنابراین $L_1^{n+1}\cong L_2^{n+1}$ و لذا اثبات کامل است.
اکنون با توجه به آنچه بیان شد، می‌توان قضیه زیر را اثبات کرد.

قضیه ۷.۲: فرض کنیم L یک جبر لی باشد به طوری که $L^{n+1}\cap Z_n(L)=0$. در این صورت یک جبر لی یکتای S وجود دارد به طوری که

$$Z_n(S)=0\ ,S\sim_n L.$$

در حالت ویژه $Z_n(S)\subseteq S^{n+1}$.

برهان: فرض کنیم L یک جبر لی باشد به طوری‌که

$$L^{n+1}\cap Z_n(L)=0$$

در این صورت با توجه به لم ۲. ۳، یک جبر لی T_1 وجود دارد به طوری‌که

$$L\sim_n T_1\ ,\ Z(T_1)\cap T_1^n<T_1^{n+1}$$

بنابراین

$$Z(T_1)\cap T_1^n \le T_1^{n+1}\cap Z_n(T_1)$$

از طرفی، با توجه به لم ۲ . ۱

$$L^{n+1}\cap Z_n(L)\cong T_1^{n+1}\cap Z_n(T_1)$$

در نتیجه $Z(T_1)\cap T_1^n=0$. اکنون، به وسیله قسمت الف از لم۲ . ۲ داریم $Z_n(T_1)\cap T_1^n=0$ و بنابراین به وسیله قسمت ب از لم۲ . ۲، $Z_n(T_1)\subseteq Z_{n-1}(T_1)$ و لذا $Z_{n-1}(T_1)\cap T_1^n=0$.

به طور مشابه، یک جبر لی T_2 وجود دارد به طوری‌که $T_1 \sim_{n-1} T_2$.

با ادامه این فرایند، جبرهای لی T_{n-1} و T_n وجود دارند به طوری‌که $T_{n-1}\sim_1 T_n$ و $Z(T_n)\cap T_n\subseteq T_n^2$ در نتیجه

$$Z(T_n)=Z(T_n)\cap T_n^2\cong Z(T_{n-1})\cap T_{n-1}^2=0$$

قرار می‌دهیم $T_n=S$ و بنابراین داریم $Z_n(S)=0$.

اکنون فرض کنیم S_1 جبر لی دیگری باشد به طوری‌که $S_1\sim_n L$ و $Z_n(S_1)\subseteq S_1^{n+1}$. لذا با توجه به لم ۲. ۱، $S\sim_n S_1$ و $Z_n(S)\cap S^{n+1}\cong Z_n(S_1)\cap S_1^{n+1}$ بنابراین $Z_n(S)\cong Z_n(S_1)=0$ و $S\cong S_1$.

قضیه۸.۲: فرض کنیم L_1 و L_2 دو جبر لی باشند، به طوری‌که $\Phi(L_i)\cap Z(L_i)=0\quad (i=1,2)$ در این صورت $L_1\sim L_2$ اگر و تنها اگر

$$L_1/Z(L_1)\cong L_2/Z(L_2).$$

برهان: فرض کنیم L یک جبر لی باشد به طوری‌که $L^2\cap Z(L)=0$ و S یک جبر لی تنه‌ای باشد به طوری که $S\sim L$ در این صورت، نشان می‌دهیم که به ازای هر n، $Z_n(S)=0$. چون $S\sim L$، بنابراین

$$Z(L)\cap L^2\cong Z(S)\cap S^2$$

لذا، با توجه به گزاره ۲ . ۴،

$$Z_n(S)\cap S^2=0\ ,\ Z_n(S)\subseteq Z(S)$$

بنابراین $Z(S)$ یک ابرمرکز از S است و در نتیجه برای هر n داریم: $Z_n(S)=0$.

اکنون، فرض کنیم Ψ یک خانواده از جبرهای لی آیزوکلینیک مانند L باشد، به طوری که $Z(L)\cap L^2=0$. چون مرکز هر جبر لی تنه‌ای از Ψ بدیهی است، بنابراین، خانواده Ψ دارای یک جبر لی تنه‌ای یکتای $L/Z(L)$ است و در نتیجه حکم ثابت است.

نتایج زیر با توجه به گزاره ۲ . ۴ و قضیه۲ . ۸ به دست می‌آیند.

نتیجه۹.۲: فرض کنیم L_1 و L_2 دو جبر لی باشند به طوری‌که $\Phi(L_i)\cap Z(L_i)=0\quad (i=1,2)$ و $L_1/Z_n(L_1)\cong L_2/Z_n(L_2)$. در این‌صورت $L_1\sim L_2$.

نتیجه ۱۰.۲: فرض کنیم L_1 و L_2 دو جبر لی باشند به طوری‌که

$$\Phi(L_i)\cap Z(L_i)=0\quad (i=1,2).$$

در این‌صورت $L_1\sim L_2$ اگر و تنها اگر $L_1\sim_n L_2$.

فهرست منابع

[1] P. Hall, The classification of prime-power groups, J. Reine Angew. Math. 182 (1940) 130-141.

[2] N. S. Hekster, On the structure of n-isoclinism classes of groups, J. Pure Appl. Algebra 40 (1986) 63-85.

[3] N. S. Hekster, Varieties of groups and isologisms, J. Aust. Math. Soc. (Series A) 46 (1989) 22-60.

[4] M. Chakaneh, A. Kaheni, S. Kayvanfar, On *c*-capability and n-isoclinic families of a specific class of groups, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. (2019) 129:50.

[5] Y. Taghavi, S. Kayvanfar, M. Chakaneh, On the converse of Baer's theorem for generalizations of groups with trivial Frattini subgroups, Algebraic Structures and Their Applications 6(1) (2019) 139-148.

[6] K. Moneyhun, Isoclinisms in Lie algebras, Algebras, Groups and Geometries 11 (1994) 9–22.

[7] A.R. Salemkar, H. Bigdely, V. Alamian, Some properties on isoclinism of Lie algebras and covers, J. Algebra Appl. 7(4) (2008) 507–516.

[8] H. Arabyani, F. Saeedi, On dimensions of derived algebra and central factor of a Lie algebra, Bull. Iranian Math. Soc. 41(5) (2015) 1093-1102.

[9] A.R. Salemkar, F. Mirzaei, Characterizing *n*-isoclinism classes of Lie algebras, Comm. Algebra 35 (2010) 3392-3403.

[10] D.W. Barnes, Nilpotency of Lie algebras, Math. Z. 79 (1962) 237–238.