

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال دهم، شماره پنجاه و یکم، آذر و دی ۱۴۰۳

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸X

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

# دستگاه معادلات ناویر استوکس در سطح پیچش بر روی خمینه‌های دو بُعدی

مهسا عباس‌وند<sup>۱</sup>، هاجر قهرمانی گل<sup>۲\*</sup>

(<sup>۱</sup>) و (<sup>۲</sup>) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۰۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۷/۲۵

## چکیده

دستگاه معادلات ناویر استوکس برای پیش‌بینی رفتار سیالات تراکم‌ناپذیر یکی از معادلات اساسی در ریاضیات است که نقش اساسی در آیرودینامیک، ژئوفیزیک و برخی علوم مهندسی ایفا می‌کنند. در فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^n$  بررسی وجود جواب و ویژگی‌های معادله ناویر استوکس و همچنین مدلسازی آن در مسایل عملی بسیار مورد تحقیق و پژوهش قرار گرفته است. همچنین این معادلات در سطح پیچش برای مطالعه گرداب و برخی پدیده‌های فیزیکی بسیار مورد توجه هستند. در سال‌های اخیر تحقیق درباره دستگاه معادلات ناویر استوکس وقتی ناحیه سیال یک خمینه ریمانی باشد، مورد توجه قرار گرفته است. در این مقاله جریان‌های پیچشی حاصل از معادلات ناویر استوکس بر روی خمینه‌های ریمانی دو بُعدی از جمله کره دو بُعدی را به دست می‌آوریم و در نهایت جواب-های دستگاه معادلات پیچش بر روی کره دو بُعدی در حالت خاص را محاسبه کرده و آن را شبیه‌سازی می‌کنیم.

**واژه‌های کلیدی:** معادلات ناویر استوکس، پیچش، خمینه ریمانی، دیورژانس.

## ۱- تعاریف و مقدمات اولیه

دستگاه معادلات ناویر استوکس یکی از معادلات اساسی در مکانیک سیالات است که نقش اساسی در آیرودینامیک، ژئوفیزیک و برخی علوم مهندسی ایفا می‌کند. در فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^n$  دستگاه معادلات ناویر استوکس برای سیال تراکم‌ناپذیر به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u - \mu \Delta u + \text{grad}(p) &= 0 \\ \text{div } u &= 0 \end{aligned}$$

که در آن  $u: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  سرعت سیال و  $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  تابع فشار و  $\mu$  ضریب چسبندگی سیال است. معادله دوم شرط بدون دیورژانس بودن سیال است که نشان می‌دهد سیال تراکم‌ناپذیر است. این معادلات یکی از دقیق‌ترین مدل‌ها است که برای بررسی دینامیک سیالات مورد استفاده قرار می‌گیرد. در فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^n$  بررسی وجود جواب و ویژگی‌های معادله ناویر استوکس و همچنین مدل‌سازی آن در مسایل عملی بسیار مورد تحقیق و پژوهش قرار گرفته است. در سال‌های اخیر تحقیق درباره دستگاه معادلات ناویر استوکس وقتی ناحیه سیال یک خمینه ریمانی باشد مورد توجه قرار گرفته است. اگر ناحیه سیال یک خمینه ریمانی در نظر گرفته شوند، تمام عبارات در معادله برحسب عملگرها در خمینه‌های ریمانی تغییر خواهد کرد. به عبارت دیگر اگر یک خمینه ریمانی باشد دستگاه معادله ناویر استوکس بر روی سیال تراکم‌ناپذیر به شکل زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_u u - \mu \Delta u + \text{grad}(p) = 0 \\ \text{div}_g u = 0 \end{cases} \quad (1)$$

فرمول‌بندی‌های متفاوتی برای معادله ناویر استوکس با توجه به وجود عملگرهای لاپلاسیس متفاوت (غیر هم ارز) می‌توان ارائه داد. اولین مطالعه از این

معادلات بر روی خمینه‌ها توسط ابین<sup>۱</sup> و مارسدین<sup>۲</sup> در سال ۱۹۷۰ انجام شد [۱]. پس از آن مطالعات دیگری بروی این معادلات توسط محققان انجام شد که برخی آنها را می‌توان در مقاله‌های [۲-۵] دید. از طرفی خمینه‌های دو بُعدی در مکانیک سیالات و مدل‌های هواشناسی مورد توجه است. همچنین برای بررسی جریان‌های پیچشی از جمله وجود گرداب‌ها در سیالات، دستگاه معادلات پیچش با گرفتن کرل از دستگاه معادلات ناویر استوکس بدست می‌آید.

دستگاه معادلات ناویر استوکس بر روی کره دو بُعدی در برخی پژوهش‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است که در اکثر مقالات فقط بر روی جواب‌های معادله ناویر استوکس با شرایط خاص از جمله کرنداری و یا پایداری آن‌ها بحث شده است. می‌توانید به مقالات [۲، ۶-۹] مراجعه کنید. از آن جا که عملگر لاپلاسیس در معادله ناویر استوکس منحصر به فرد نیست مطالعه آن‌ها درباره آن بر روی کره دو بُعدی نیز به نتایج متفاوتی وابسته به لاپلاسیس منجر شده است.

اما در این مقاله قصد داریم دستگاه معادلات پیچش بر روی کره دو بُعدی را مورد مطالعه قرار دهیم. از آن جایی که دستگاه معادلات پیچش فارغ از لاپلاسیس است، ظاهر معادله پیچش و جواب‌های آن بر روی کره دو بُعدی به دست آمده در این مقاله یکتا است.

### ۱-۱- تعاریف هندسه ریمانی

در این بخش، تعاریف مورد نیاز از هندسه ریمانی که برای مطالعه معادلات ناویر استوکس و همچنین معادلات پیچش لازم است را بیان می‌کنیم. برای مطالعه می‌توان به کتاب [۱۰] مراجعه کرد.

<sup>۱</sup> Ebin

<sup>۲</sup> Marsden

$$\begin{aligned} \text{grad}(f) &= \# \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i \right) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \#(dx^i) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) g^{ji} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

همچنین مفهوم التصاق در خمینه‌های ریمانی برای بازنویسی مشتق جهتی در معادلات ناوبر استوکس بر روی خمینه ریمانی به کار می‌رود.

**قضیه ۱-۳:** [۱۱] بر روی هر خمینه ریمانی  $(M, g)$  یک التصاق  $\nabla$  سازگار و بدون تاب منحصر به فرد وجود دارد که به آن التصاق لوی چویتا<sup>۳</sup> گوئیم و در دستگاه مختصات موضعی با میدان‌های برداری پایه‌ای  $\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}$  ضرایب التصاق لوی چویتا به صورت زیر است:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x_l}$$

که در آن

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) \quad (۲)$$

می‌باشد. به  $\Gamma_{ij}^l$  ها، ضرایب کریستوفل گویند.

**تعریف ۱-۴:** [۱۰] اگر  $X \in \mathfrak{X}M$  یک میدان برداری باشد، آنگاه دیورژانس میدان برداری  $X$  یک تابع هموار و در واقع یک تانسور از مرتبه  $(0, 0)$  می‌باشد که در دستگاه مختصات موضعی با میدان‌های برداری پایه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{div}X = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \Gamma_{im}^i X^m \quad (۳)$$

اگر  $(M, g)$  یک خمینه ریمانی با التصاق لوی چویتا  $\nabla$  باشد، عملگر لاپلاسیان بر روی هر تابع هموار  $f \in C^\infty(M)$  به صورت زیر عمل می‌کند:

$$\Delta f = g^{ij} \nabla_i \nabla_j f \quad (۴)$$

یک خمینه هموار  $n$  بُعدی، فضای توپولوژیک هاسدورف و پیرا فشرده است که هر نقطه آن یک همسایگی باز هومیومورف با یک باز  $\mathbb{R}^n$  دارد. فضای مماس بر خمینه در هر نقطه آن یک فضای برداری است و اجتماع آن‌ها را که با  $TM$  نشان می‌دهند یک کلاف مماس نامیده می‌شود. مجموعه توابع حقیقی مقدار هموار بر روی خمینه  $M$  را با  $C^\infty(M)$  نشان می‌دهند. اگر  $M$  یک خمینه هموار (دیفرانسیل پذیر) باشد و  $g$  یک ضرب ریمانی روی کلاف مماس  $TM$  باشد آنگاه،  $(M, g)$  را خمینه ریمانی گویند. ضرب ریمانی  $g \in \Gamma(S^2(T^*M))$  یک تانسور متقارن مرتبه دو همگشت می‌باشد که در هر نقطه یک ضرب داخلی بر روی فضای مماس می‌باشد و در دستگاه مختصات موضعی به شکل زیر است:

$$g = g_{ij} dx^i dx^j, \quad g_{ij} = g_{ji}$$

یک میدان برداری بر روی خمینه  $M$  عبارت است از نگاشت  $X: M \rightarrow TM$  که به هر نقطه از خمینه یک بردار از فضای مماس بر خمینه نظیر می‌کند. مجموعه میدان‌های برداری هموار بر روی خمینه را با  $\mathfrak{X}M$  نشان می‌دهند.

**ملاحظه ۱-۱:** در سرتاسر این مقاله از قرارداد جمع-بندی انیشتین استفاده شده است. به این صورت که در فرمول‌ها، جمع‌بندی بر روی اندیسی که یک بار در بالا و یک بار در پایین ظاهر شده باشد، صورت می‌گیرد.

**تعریف ۱-۲:** [۱۰] اگر  $(M, g)$  یک خمینه ریمانی باشد، برای هر تابع هموار  $f \in C^\infty(M)$  عملگر گرادیان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{grad}(f) = \#(df)$$

که در دستگاه مختصات موضعی به شکل زیر است:

<sup>۳</sup> Levi-Civita

همچنین گزاره زیر مورد نیاز است.

**گزاره ۱-۸:** [۹] اگر  $(M, g)$  یک خمینه ریمانی دو بُعدی با التصاق لوی چویتا  $\nabla$  و  $u \in \mathfrak{X}M$  یک میدان برداری دلخواه باشد، عملگر  $rot$  بر روی میدان برداری  $\nabla_u u$  به صورت زیر عمل می‌کند:

$$rot(\nabla_u u) = \zeta \operatorname{div}(u) + \nabla_j \zeta u^j \quad (۶)$$

که در آن  $\zeta = rot(u)$  می‌باشد.

## ۲- معادله پیچش بر روی کره دو بُعدی

دستگاه معادلات ناویر استوکس برای پیش‌بینی رفتار سیالات تراکم‌ناپذیر بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای بررسی جریان‌های پیچشی از جمله وجود گرداب‌ها در سیالات، دستگاه معادلات پیچش به کار می‌آید. در این بخش ابتدا دستگاه معادلات پیچش برای خمینه‌های دو بُعدی را بدست می‌آوریم، سپس دستگاه معادلات پیچش بر روی کره  $S^2$  را بطور کامل مشخص می‌کنیم. در ادامه سعی می‌کنیم، جواب‌هایی برای معادله پیچش بر روی کره  $S^2$  در حالت‌های خاص پیدا کنیم. ما از عملگر  $rot$  استفاده می‌کنیم تا جریان پیچش را روی خمینه ریمانی دو بُعدی  $(M, g)$  ارائه دهیم.

## گزاره ۲-۱: دستگاه معادله پیچش بر روی خمینه

ریمانی دو بُعدی  $(M, g)$  به شکل زیر است:

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u^1 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + u^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} - \Delta \zeta = 0 \\ \operatorname{div}_g u = 0 \end{cases} \quad (۷)$$

که در آن  $\zeta = rot(u)$  و  $\mu = 1$  می‌باشد.

**اثبات:** کافی است عملگر  $rot$  را بر معادله ناویر استوکس (۱) روی هر خمینه ریمانی فشرده  $(M, g)$  اعمال کنیم، یعنی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + rot(\nabla_u u) - \mu \Delta(rot(u))$$

همانطور که در ریاضی عمومی داشتیم کرل یک میدان برداری در فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^3$ ، یک میدان برداری می‌باشد. در حالتی که دو میدان برداری در فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^2$  باشند کرل آن‌ها با اضافه کردن مولفه سوم صفر به آن‌ها محاسبه می‌شود که در نتیجه آن کرل یک میدان برداری در فضای اقلیدسی  $\mathbb{R}^3$  است که فقط مولفه سوم ناصفر دارد. از این رو در مسایل مربوط به معادلات پیچش و حرکت گرداب در فضای دو بعد، میدان برداری کرل را به عنوان یک تابع در نظر می‌گیرند و لذا محاسبات آسان‌تر می‌شود. در نتیجه عملگر کرل دو خمینه ریمانی دو بُعدی نیز تبدیل به عملگر دیگری با عنوان عملگر  $rot$  می‌شود که با اثر بروی میدان برداری، یک تابع هموار  $C^\infty(M)$  مشخص می‌کند. برای اینکه عملگر  $rot$  را به صورت دقیق در دستگاه مختصات موضعی مشخص کنیم، ابتدا دو فرمی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon = \sqrt{\det(g)} (dx_1 \otimes dx_2 - dx_2 \otimes dx_1)$$

**تعریف ۱-۵:** اگر  $(M, g)$  یک خمینه ریمانی دو بُعدی و  $u \in \mathfrak{X}M$  میدان برداری دلخواه با مولفه‌های  $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  باشد. عملگر به  $K$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$(Ku)^k = g^{ki} \varepsilon_{ij} u^j = \varepsilon_j^k u^j$$

**لم ۱-۶:** عملگر  $rot$  در دستگاه مختصات موضعی بر روی هر میدان برداری  $u \in \mathfrak{X}M$  به صورت زیر عمل می‌کند:

$$rot(u) = \operatorname{div}(Ku) = \varepsilon_j^k (\nabla_k u^j) \quad (۵)$$

**نتیجه ۱-۷:** اگر  $(M, g)$  یک خمینه ریمانی دو بُعدی با التصاق لوی چویتا  $\nabla$  باشد، اثر عملگر  $rot$  بر روی گردایان تابع هموار دلخواه  $f \in C^\infty(M)$ ، صفر می‌باشد. یعنی:

$$rot(\operatorname{grad}(f)) = 0$$

اثبات. برای هر میدان برداری  $u$  عملگر دیورژانس را با استفاده از رابطه (۳) و نمادهای کریستوفل ناصفر بالا، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_g u &= \frac{\partial u^1}{\partial \theta} + \frac{\partial u^2}{\partial \varphi} + u^1 \Gamma_{1j}^j + u^2 \Gamma_{2j}^j \\ &= \frac{\partial u^1}{\partial \theta} + \frac{\partial u^2}{\partial \varphi} + u^2 \cot \varphi \end{aligned}$$

حال می‌توان عملگر  $\operatorname{rot}$  را برای میدان برداری  $u$  بر کره دوبعدی  $\mathbb{S}^2$  محاسبه کرد.

**قضیه ۲-۳:** عملگر  $\operatorname{rot}(u)$  برای هر میدان برداری  $u$  روی کره  $\mathbb{S}^2$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \zeta = \operatorname{rot} u &= \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial u^2}{\partial \theta} - u^2 \cos \varphi \\ &\quad - \sin \varphi \frac{\partial u^1}{\partial \varphi} - u^1 \cos \varphi \end{aligned} \quad (10)$$

**اثبات:** عملگر  $\operatorname{rot}$  را با استفاده از نمادهای کریستوفل غیرصفر برای کره، با استفاده از رابطه (۵) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \zeta &= g^{11} \varepsilon_{1l} \nabla_l u^1 + g^{22} \varepsilon_{2l} \nabla_l u^2 \\ &= \frac{1}{\sin^2 \varphi} (\varepsilon_{11} \nabla_1 u^1 + \varepsilon_{12} \nabla_1 u^2) \\ &\quad + \varepsilon_{21} \nabla_2 u^1 + \varepsilon_{22} \nabla_2 u^2 \\ &= \frac{1}{\sin^2 \varphi} (\cdot + \sqrt{|g|} \nabla_1 u^2) \\ &\quad + (\cdot - \sqrt{|g|} \nabla_2 u^1) \\ &= \frac{1}{\sin^2 \varphi} (\sin \varphi) \left( \frac{\partial u^2}{\partial \theta} - u^2 \cos \varphi \sin \varphi \right) \\ &\quad + (-\sin \varphi) \left( \frac{\partial u^1}{\partial \varphi} + u^1 \cot \varphi \right) \\ &= \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial u^2}{\partial \theta} - u^2 \cos \varphi - \sin \varphi \frac{\partial u^1}{\partial \varphi} \\ &\quad - u^1 \cos \varphi \end{aligned}$$

حال می‌توان دستگاه معادلات پیچش بر روی کره را مشخص کرد.

$$+\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(p)) = \cdot$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla_j \zeta u^j - \mu \Delta \zeta + \cdot &= \cdot \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u^1 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + u^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} - \Delta \zeta &= \cdot \end{aligned}$$

که در آن تساوی دوم با استفاده از گزاره ۱-۸ و رابطه (۶) و نتیجه (۷-۱) به دست آمده است.

در ادامه می‌خواهیم با در نظر گرفتن خمینه دوبعدی کره دستگاه معادلات پیچش بر روی این خمینه به دست آورده و جواب‌های آن را در حالت-های خاص بررسی کنیم. اگر  $M = \mathbb{S}^2$  کره دوبعدی باشد، برای مشخص کردن برخی کمیت‌های هندسی  $\mathbb{S}^2$  که در این بخش مورد نیاز است، دستگامختصات کروی  $(\theta, \varphi)$  را در نظر می‌گیریم.

$$x = \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \cos \varphi$$

متریک ریمانی القایی روی کره، به فرم  $g = \sin^2 \varphi d^2 \theta + d^2 \varphi$  ماتریسی متریک  $g$  و وارون آن  $g^{-1}$  به صورت زیر خواهد بود:

$$g = \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2 \varphi} & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

با در نظر گرفتن  $(i, j) = (\theta, \varphi)$  در رابطه (۲)، ضرایب کریستوفل ناصفر در التصاق چویتا برای کره  $\mathbb{S}^2$  عبارتند از:

$$\Gamma_{11}^2 = -\sin \varphi \cos \varphi, \quad \Gamma_{12}^1 = -\cot \varphi \quad (8)$$

**گزاره ۲-۲:** دیورژانس میدان برداری  $u = u^1 \frac{\partial}{\partial \theta} + u^2 \frac{\partial}{\partial \varphi}$  بر روی کره  $\mathbb{S}^2$  به صورت زیر است:

$$\operatorname{div}_g u = \frac{\partial u^1}{\partial \theta} + \frac{\partial u^2}{\partial \varphi} + u^2 \cot \varphi \quad (9)$$

های مربوط به معادله اول دستگاه (۱۱) را بدست آوریم.

$$۱. \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial u^r}{\partial \theta} - u^r \cos \varphi - \sin \varphi \frac{\partial u^1}{\partial \varphi} - u^1 \cos \varphi \right\}$$

$$= \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial^2 u^r}{\partial t \partial \theta} - \cos \varphi \frac{\partial u^r}{\partial t} - \sin \varphi \frac{\partial^2 u^1}{\partial t \partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial u^1}{\partial t}$$

$$۲. \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} u^1 = \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial u^r}{\partial \theta} - u^r \cos \varphi - \sin \varphi \frac{\partial u^1}{\partial \varphi} - u^1 \cos \varphi \right\} u^1$$

$$= \frac{u^1}{\sin \varphi} \frac{\partial^2 u^r}{\partial \theta^2} - u^1 \cos \varphi \frac{\partial u^r}{\partial \theta} - u^1 \sin \varphi \frac{\partial^2 u^1}{\partial \theta \partial \varphi} - u^1 \cos \varphi \frac{\partial u^1}{\partial \theta}$$

$$۳. \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} u^r = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial u^r}{\partial \theta} - u^r \cos \varphi - \sin \varphi \frac{\partial u^1}{\partial \varphi} - u^1 \cos \varphi \right\} u^r$$

$$= -\frac{u^r \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial u^r}{\partial \theta} + \frac{u^r}{\sin \varphi} \frac{\partial^2 u^r}{\partial \varphi \partial \theta} + u^r u^1 \sin \varphi - u^r \cos \varphi \frac{\partial u^1}{\partial \varphi}$$

$$-u^r \cos \varphi \frac{\partial u^1}{\partial \varphi} u^r \sin \varphi \frac{\partial^2 u^1}{\partial \varphi^2} + u^r u^1 \sin \varphi - u^r \cos \varphi \frac{\partial u^1}{\partial \varphi}$$

$$۴. \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left\{ \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial^2 u^r}{\partial \theta^2} - \cos \varphi \frac{\partial^2 u^r}{\partial \theta^2} - \sin \varphi \frac{\partial^2 u^1}{\partial \theta^2 \partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial^2 u^1}{\partial \theta^2} \right\}$$

$$۵. \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} = \left\{ \frac{-\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u^r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial^2 u^r}{\partial \varphi \partial \theta^2} + \sin \varphi \frac{\partial u^r}{\partial \theta} - \cos \varphi \frac{\partial^2 u^r}{\partial \varphi \partial \theta} - \cos \varphi \frac{\partial^2 u^1}{\partial \theta \partial \varphi} - \sin \varphi \frac{\partial^2 u^1}{\partial \theta \partial \varphi^2} + \sin \varphi \frac{\partial u^1}{\partial \theta} - \cos \varphi \frac{\partial^2 u^1}{\partial \varphi \partial \theta} \right\}$$

اگر پنج رابطه فوق را در معادله دستگاه (۱۱) جایگذاری کنیم، داریم:

قضیه ۲-۴: اگر  $(S^2, g)$  کره ریمانی دو بُعدی باشد. دستگاه معادلات پیچش بر روی کره به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u^1 \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + u^r \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} - \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} = \cdot \\ \frac{\partial u^1}{\partial \theta} + \frac{\partial u^r}{\partial \varphi} + u^r \cot \varphi = \cdot \end{cases} \quad (۱۱)$$

که در آن  $\zeta$  اثر عملگر  $rot$  بر روی میدان برداری دلخواه  $u$  در کره دو بُعدی است که در قضیه ۲-۳ با رابطه (۱۰) محاسبه شده است.

اثبات: ابتدا، لاپلاسیان تابع اسکالر  $\zeta$  را روی کره  $S^2$  بدست می‌آوریم، با استفاده از رابطه (۴) داریم:

$$\Delta \zeta = g^{11} \nabla_1 \nabla_1 \zeta + g^{22} \nabla_2 \nabla_2 \zeta$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2}$$

با جایگذاری معادله بالا در دستگاه معادلات پیچش در رابطه (۷) داریم:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u^1 \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + u^r \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} - \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} = \cdot$$

همچنین از آن جا که میدان برداری بدون دیورژانس است، بنابر گزاره ۲-۲ داریم:

$$\frac{\partial u^1}{\partial \theta} + \frac{\partial u^r}{\partial \varphi} + u^r \cot \varphi = \cdot$$

در نتیجه دستگاه معادلات پیچش بر روی کره دو بُعدی  $S^2$  به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u^1 \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + u^r \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} - \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} = \cdot \\ \frac{\partial u^1}{\partial \theta} + \frac{\partial u^r}{\partial \varphi} + u^r \cot \varphi = \cdot \end{cases}$$

ملاحظه ۲-۵: برای بیان دقیق‌تر دستگاه معادلات پیچش بر روی کره به دست آمده در قضیه قبل می‌توان با استفاده از رابطه (۱۰)، هریک از عبارت-

لذا فقط عبارت  $-\cos\varphi \frac{\partial u^1}{\partial t} = 0$  باقی می‌ماند، در نتیجه،  $\frac{\partial u^1}{\partial t} = 0$  پس میدان برداری  $u$  در طول زمان ثابت است.

حالت دوم: اگر  $u^1 = 0$ ،  $u^2 = u^2\varphi$  باشد،  
آنگاه:

$$\begin{aligned} & -\cos\varphi \frac{\partial u^2}{\partial t} - u^2 \cos\varphi \frac{\partial u^2}{\partial \varphi} \\ & + (u^2)^2 \sin\varphi = 0 \\ \nabla u = 0 \rightarrow \frac{\partial u^2}{\partial \varphi} & = -u^2 \cot\varphi \\ & -\cos\varphi \frac{\partial u^2}{\partial t} - u^2 \cos\varphi (-u^2 \cot\varphi) \\ & + (u^2)^2 \sin\varphi = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial u^2}{\partial t} & = (u^2)^2 (\tan\varphi + \cot\varphi) \\ & = \frac{2(u^2)^2}{\sin 2\varphi} \end{aligned}$$

حالت سوم:  $u^1 = u^1(\varphi)$ ،  $u^2 = u^2(\theta)$

$$\begin{aligned} & -\cos\varphi \frac{\partial}{\partial t} (u^1 + u^2) + \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \frac{\partial^2 u^1}{\partial \theta^2} \\ & - (u^1 \cos\varphi + \sin\varphi) \frac{\partial u^1}{\partial \theta} - u^2 \cos\varphi \frac{\partial u^2}{\partial \varphi} \\ & + u^2 \sin\varphi (u^2 + u^1) = 0 \\ \nabla u = 0 \rightarrow \frac{\partial u^1}{\partial \theta} & = -u^2 \cot\varphi - \frac{\partial u^2}{\partial \varphi} \Rightarrow \frac{\partial^2 u^1}{\partial \theta^2} \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\cos\varphi \frac{\partial}{\partial t} (u^1 + u^2) \\ & + (-u^1 \cos\varphi - \sin\varphi) \frac{\partial u^1}{\partial \theta} \\ & + u^2 \cos\varphi \left( \frac{\partial u^1}{\partial \theta} + u^2 \cot\varphi \right) = 0 \\ & -\cos\varphi \frac{\partial}{\partial t} (u^1 + u^2) \\ & + (u^2 \cos\varphi - u^1 \cos\varphi - \sin\varphi) \frac{\partial u^1}{\partial \theta} \\ & + (u^2)^2 \sin\varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial^2 u^2}{\partial t \partial \theta} - \sin\varphi \frac{\partial^2 u^1}{\partial t \partial \varphi} \\ & - \cos\varphi \frac{\partial}{\partial t} (u^1 + u^2) + \sin\varphi \frac{\partial^2 u^1}{\partial \theta \partial \varphi} \\ & + \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial^2 (u^1 - u^2)}{\partial \varphi \partial \theta^2} - \frac{1}{\sin^2\varphi} \frac{\partial^2 u^2}{\partial \theta^2} \\ & + (-u^1 \sin\varphi + 2\cos\varphi) \frac{\partial^2 u^1}{\partial \theta \partial \varphi} \\ & + \left( \frac{u^2}{\sin\varphi} + \cos\varphi \right) \frac{\partial^2 u^2}{\partial \varphi \partial \theta} \\ & - u^2 \sin\varphi \frac{\partial^2 u^1}{\partial \varphi^2} \\ & + \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \frac{\partial^2 u^1}{\partial \theta^2} + \left( \frac{u^1}{\sin\varphi} \right. \\ & \left. + 2 \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \right) \frac{\partial^2 u^2}{\partial \theta^2} \\ & + \left( -u^1 \cos\varphi - \frac{u^2 \cos\varphi}{\sin^2\varphi} - \sin\varphi \right) \frac{\partial u^2}{\partial \theta} \\ & + (-u^1 \cos\varphi - \sin\varphi) \frac{\partial u^1}{\partial \theta} - u^2 \cos\varphi \\ & \frac{\partial (u^2 + 2u^1)}{\partial \varphi} + u^2 \sin\varphi (u^2 + u^1) = 0 \end{aligned}$$

همانطور که مشاهده می‌کنیم، دستگاه معادلات پیچش حتی برای کره دوبعدی نیز پیچیده است. حال جواب‌های دستگاه (۱۱) را در حالت‌های خاص بررسی می‌کنیم.

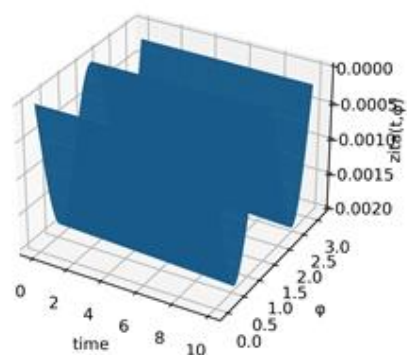
حالت اول: اگر  $u = u^1 \frac{\partial}{\partial \theta}$ ،  $u^2 = 0$  باشد،  
آنگاه با جایگذاری داریم:

$$\begin{aligned} & \cos\varphi \frac{\partial u^1}{\partial t} + \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \frac{\partial^2 u^1}{\partial \theta^2} \\ & + (-u^1 \cos\varphi - \sin\varphi) \frac{\partial u^1}{\partial \theta} = 0 \\ \nabla u = 0 \rightarrow \frac{\partial u^1}{\partial \theta} & + u^2 \cot\varphi + \frac{\partial u^2}{\partial \varphi} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial u^1}{\partial \theta} & = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tan\varphi \left\{ (u^2)^2 - \frac{\partial u^1}{\partial \theta} \right\}$$

$$= (u^1 - u^2) \frac{\partial u^1}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial t} (u^1 + u^2)$$

**نتیجه ۲-۶:** جواب های دستگاه معادلات پیچش بر روی کره دو بُعدی در حالت خاص دوم با استفاده از روش عددی اویلر و پیاده‌سازی با استفاده از زبان برنامه‌نویسی پایتون به شکل زیر می‌باشد. به ازای تغییرات  $(t, \varphi)$  در بازه معین، تابع جریان پیچش به صورت نوسانی به شکل زیر نشان داده می‌شود. هر چه مقدار مقدار ثابت در فضای جواب کوچکتر باشد دامنه نوسان تیزتر بوده و با افزایش مقدار ثابت در فضای جواب، دامنه نوسان پهن‌تر خواهد بود.



شکل ۱: نمودار جریان پیچش برای حالت دوم



- [۹] M. Samavaki, J.J.J.o.G. Tuomela, Physics, Navier–Stokes equations on Riemannian manifolds, ۱۴۸ (۲۰۲۰) ۱۰۳۵۴۳.
- [۱۰] J. Jost, J. Jost, Riemannian geometry and geometric analysis, Springer ۲۰۰۸.
- [۱۱] J.A. Viaclovsky, Math ۸۶۵, Topics in Riemannian Geometry, ۲۰۰۷.
- [۱] D.G. Ebin, J.J.A.o.M. Marsden, Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid, (۱۹۷۰) ۱۰۲-۱۶۳.
- [۲] C.H. Chan, M. Czubak, M.M.J.J.o.G. Disconzi, Physics, The formulation of the Navier–Stokes equations on Riemannian manifolds, ۱۲۱ (۲۰۱۷) ۳۳۵-۳۴۶.
- [۳] M. Dindoş, M.J.A.f.r.m. Mitrea, analysis, The stationary Navier-Stokes system in nonsmooth manifolds: the Poisson problem in Lipschitz and  $C^1$  domains, ۱۷۴ (۲۰۰۴) ۱-۴۷.
- [۴] B. Khesin, G.J.P.o.t.N.A.o.S. Misiołek, Euler and Navier–Stokes equations on the hyperbolic plane, ۱۰۹(۴۵) (۲۰۱۲) ۱۸۳۲۴-۱۸۳۲۶.
- [۵] T.J.N.A.T. Nagasawa, Methods, Applications, Navier-Stokes flow on Riemannian manifolds, ۳۰(۲) (۱۹۹۷) ۸۲۵-۸۳۲.
- [۶] C.H. Chan, T.J.a.p.a. Yoneda, On the stationary Navier-Stokes flow with isotropic streamlines in all latitudes on a sphere or a ۲D hyperbolic space, (۲۰۱۳).
- [۷] M. Mitrea, M.J.M.A. Taylor, Navier-Stokes equations on Lipschitz domains in Riemannian manifolds, ۳۲۱(۴) (۲۰۰۱) ۹۵۵-۹۸۷.
- [۸] D. Phan, S.S.J.J.o.F.A. Rodrigues, Gevrey regularity for Navier–Stokes equations under Lions boundary conditions, ۲۷۲(۷) (۲۰۱۷) ۲۸۶۵-۲۸۹۸.

