



حلقه نزدیک شبه - ارزیاب و N - زیرگروه شبه - ارزیاب

مهديه صادقی گوغری^۱، طاهره رودباری لر^{۲*}

(^{۲۹}) گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد کرمان، کرمان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۶/۱۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۱۰/۱۹

چکیده

در این مقاله تعاریف ایده‌آل اول قوی، N -زیرگروه اول قوی، حلقه‌ی نزدیک شبه-ارزیاب و N -زیرگروه شبه-ارزیاب ارائه داده شده است. همچنین برخی از خواص آنها با آوردن قضایایی اثبات شده است. سپس نشان داده شده است که اگر N یک حلقه‌ی نزدیک با میدان خارج قسمتی K و P یک ایده‌آل اول قوی از N باشد، آنگاه برای هر مجموعه‌ی ضربی بسته S از N ، P_S یک ایده‌آل اول قوی از N_S است. علاوه بر این رابطه بین ایده‌آل اول قوی و N -زیرگروه اول قوی و رابطه بین حلقه‌ی نزدیک شبه-ارزیاب و N -زیرگروه شبه-ارزیاب را با آوردن قضایایی به دست آوردند. همچنین نشان داده شده است که اگر هر N -زیرگروه یک ایده‌آل از M و P یک N -زیرگروه اول قوی از M باشد، آنگاه $(P : M)$ یک ایده‌آل اول قوی از N است. و در انتها ثابت شده است که اگر P, L دو تا N -زیرگروه از M و $P \subseteq L$ باشد و برای هر $y \in K$ ، $y^{-1}P \subseteq P$ ، آنگاه L, N -زیرگروه اول قوی از M است اگر و فقط اگر $\frac{L}{P}, N$ -زیرگروه اول قوی از $\frac{M}{P}$ باشد.

واژه‌های کلیدی: ایده‌آل اول قوی، N -زیرگروه اول قوی، حلقه‌ی نزدیک شبه-ارزیاب، N -زیرگروه شبه-ارزیاب.

۱- مقدمه

هاستون و هدرستروم ایده‌آل اول قوی و دامنه‌ی شبه ارزیاب را نخستین بار در سال ۱۹۷۸ تعریف کردند [۱]، به دنبال آن اندرسون، دایز و بدایوی به مطالعه‌ی بیشتر این حلقه‌ها پرداختند و در سال ۱۹۹۷ ایده‌آل اول قوی را برای حلقه‌های جابجایی و یکدار تعمیم دادند و حلقه‌ی شبه ارزیاب را تعریف کردند. سپس در سال ۲۰۰۲، بدایوی با معرفی ایده‌آل‌های اول شبه قوی، تعمیمی دیگر از دامنه‌های شبه ارزیابی را تحت عنوان دامنه‌های شبه تقریباً ارزیابی ارائه و مورد بررسی قرار داد [۲]. و در سال ۲۰۱۱ مقدری و نکوئی روی زیرمدول‌های اول قوی و مدول‌های شبه- ارزیاب کار کردند و نتایج جالبی بدست آوردند [۳]. در اینجا نیز ما بر آن شدیم تا این نتایج را روی حلقه‌های نزدیک دنبال کنیم.

یک حلقه‌ی نزدیک راست، مجموعه‌ی نا تهی N همراه با دو عمل دوتایی "+" و "." است. بطوریکه:

$$(1) (N, +) \text{ یک گروه باشد (لزوماً اَبلی نباشد)،}$$

$$(2) (N, \cdot) \text{ یک نیم‌گروه باشد،}$$

$$(3) \text{ برای هر } n_1, n_2, n_3 \in N$$

$$(n_1 + n_2) \cdot n_3 = n_1 n_3 + n_2 n_3 \text{ برقرار باشد [۴].}$$

در این مقاله همه‌ی حلقه‌های نزدیک N راست، جابجایی (تحت عمل ضرب) و یکدار هستند. M یک N -گروه یکانی است.

زیرگروه I از $(N, +)$ را یک زیرگروه نرمال گوئیم هرگاه برای هر $n \in N, i \in I$ داشته باشیم

$$[4] \quad n+i-n \in I$$

زیرگروه نرمال I از $(N, +)$ را یک ایده‌آل از N می‌گوئیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

$$(1) \quad IN \subseteq I,$$

$$(2) \quad \text{برای هر } n, n' \in N, i \in I \quad n'(n+i)-n'n \in I,$$

اکنون هر زیرگروه نرمال R از $(N, +)$ که در شرط (۱)

صدق کند را ایده‌آل راست از N می‌گوئیم و با

$$R <_r N$$

نمایش می‌دهیم و هر زیرگروه نرمال L از

$$(N, +) \text{ که در شرط (۲) صدق کند را ایده‌آل چپ از } N$$

می‌گوئیم و با $L <_l N$ نمایش می‌دهیم [۵].

فرض کنید $(M, +)$ همراه با صفر یک گروه، N یک

حلقه نزدیک آنگاه M را همراه با تابع $N \times M \rightarrow M$

(تصویر (n, m)) تحت این تابع با nm نمایش داده

می‌شود ($-N$ گروه گفته می‌شود اگر برای هر

$$n, n' \in N, m \in M \text{ در شرایط زیر صدق کند:}$$

$$(الف) \quad (n+n')m = nm + n'm,$$

$$(ب) \quad (nn')m = n(n'm).$$

و $-N$ گروه M با نماد ${}_N M$ نمایش داده می‌شود

[۴].

فرض کنید N, N' حلقه‌های نزدیک باشند و M, M'

$-N$ گروه باشند. آنگاه:

(الف) نگاشت $h: N \rightarrow N'$ را همریختی گویند، اگر

$$\text{برای هر } m, n \in N \text{ داشته باشیم: } h(m+n) =$$

$$h(m) + h(n), h(m \cdot n) = h(m) \cdot h(n)$$

(ب) نگاشت $h: M \rightarrow M'$ را $-N$ همریختی گویند،

اگر برای هر $n \in N, m_1, m_2 \in M$ داشته باشیم:

$$[4] \quad h(m_1 + m_2) = h(m_1) + h(m_2), \quad h(nm_1) = n \cdot h(m_1).$$

فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک باشد آنگاه S را یک

زیر مجموعه‌ی ضربی بسته از (N, \cdot) می‌گویند هرگاه

$$1_N \in S \text{ و برای هر } a, b \in S \quad a \cdot b \in S \text{ [۴].}$$

قرارداد: η_1 ، مجموعه‌ی همه‌ی حلقه‌های نزدیک و

یکدار می‌باشد [۴].

فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک و S یک زیر

مجموعه‌ی ضربی بسته (N, \cdot) باشد. آنگاه N_S را

یک حلقه‌ی نزدیک خارج قسمتی چپ (راست) از N گفته

می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$(1) \quad N_S \in \eta_1$$

$$(2) \quad h: N \rightarrow N_S \text{ (} h \text{ تکریختی باشد)}$$

$$(3) \quad \text{برای هر } s \in S \text{ در } (N, \cdot) \text{ وارون‌پذیر باشد،}$$

$$(4) \quad \text{برای هر } q \in N_S \text{ وجود داشته باشد } n \in N, s \in S$$

$$\text{بطوریکه } q = h(n)h(s)^{-1} \text{ [۴].}$$

N از دامنه صحیح نزدیک K حلقه خارج قسمتی میدان

خارج قسمتی نزدیک گفته می‌شود هرگاه هر عضو

مخالف صفر آن وارون‌پذیر باشد.

فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک، M یک $-N$ گروه و

S یک زیر مجموعه‌ی ضربی بسته از (N, \cdot) باشد، آنگاه

فرض کنید M یک N -گروه باشد. آنگاه M را با وفا^۱ گویند اگر $(0 : M) = \{0\}$. [۴]

حلقه‌ی نزدیک N را میدان- نزدیک گویند اگر $(N - \{0\}, \cdot)$ یک گروه باشد [۴].

قضیه ۱.۱. فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک و S یک زیر مجموعه‌ی ضربی بسته از (N, \cdot) باشد. آنگاه N_S را یک حلقه‌ی نزدیک خارج قسمتی چپ از N است اگر و فقط اگر

(۱) S یک زیر مجموعه‌ی ناتهی باشد،

(۲) برای هر $s \in S$ ؛ s حذف پذیر باشد،

(۳) در شرط اور چپ صدق کند. [۴]

فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک و S یک مجموعه‌ی ضربی بسته از (N, \cdot) باشد، آنگاه N در شرط اور^۲ چپ صدق می‌کند اگر برای هر $(n, s) \in N \times S$ وجود داشته

باشد $(n_1, s_1) \in N \times S$ به طوری که $ns_1 = sn_1$. [۴]

فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک و S یک مجموعه‌ی ضربی بسته از (N, \cdot) باشد و N در شرط اور چپ صدق می‌کند، آنگاه در [۵]، جمع و ضرب N_S را بصورت زیر تعریف کردند. برای هر $m, n' \in N, s, s' \in S$

وجود دارد به طوری که:

$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{ns_1 + n's_1}{ss_1} \cdot \frac{n}{s} \cdot \frac{n'}{s'} = \frac{n'n_1}{ss_1}$$

قضیه ۱.۲. فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک، M یک N -گروه، S یک زیرمجموعه‌ی ضربی بسته از (N, \cdot) ، در شرط اور چپ صدق کند و همچنین S وارون پذیر باشد. آنگاه M دارای N -زیرگروه چپ M_S است اگر و فقط اگر:

(۱) S یک مجموعه‌ی ناتهی باشد،

(۲) برای هر s عضو S ؛ s حذف پذیر باشد. [۵]

۲- حلقه‌های نزدیک شبه ارزیاب

در این بخش مفاهیم حلقه‌های نزدیک شبه ارزیاب،

M_S را یک N -گروه خارج قسمتی چپ (راست) از M گویند، اگر شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) M_S یک N -گروه یکدار باشد،

(۲) $h : M \rightarrow M_S$ ، h تکریختی باشد

(۳) برای هر $s \in S$: $s : S$ در (N, \cdot) وارون پذیر باشد،

(۴) برای هر $q \in M_S$ وجود داشته باشد $s \in S, m \in M$

بطوریکه $(q = s^{-1}h(m))$. [۵]

فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک، M یک N -گروه و S یک زیر مجموعه‌ی ضربی بسته از (N, \cdot) باشد. در [۵]، رابطه‌ی هم ارزی : روی $M \times S$ را به صورت

$(m, s) : (n, t) \Leftrightarrow \exists (s_1, s_2) \in S \times S$ به طوری که $ms_1 = ns_2, ss_1 = ts_2$

تعریف کردند و کلاس‌های هم ارزی (m, s) را به صورت $[m, s]$ نمایش می‌دهند و در [۵]، جمع و ضرب از N -گروه‌های کسری M_S را به صورت زیر تعریف کردند. برای هر $m, m' \in M$ و بعضی از $s_1, s_2 \in S$ داریم:

$$(m, s) \cdot (m', s') = (m's_2, ss_1)$$

$$(m, s) + (m', s') = (ms_1 + m's_2, ss_1),$$

فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک و M یک N -گروه باشد. آنگاه M, N گروه ضربی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر N -زیرگروه K از M ، ایده‌آل I از N وجود داشته باشد به طوری که $K = IM$. [۶]

فرض کنید P یک N -گروه از M باشد، آنگاه [۵]،

$$(P : M) = \{x \in N \mid xM \subseteq P\}$$

فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک و P یک ایده‌آل از N باشد، آنگاه P را یک ایده‌آل اول از N گویند. اگر برای هر $x, y \in N$ و $xNy \subseteq P$ ایجاب کند $x \in P$ یا $y \in P$ است. چون N یکدار است بنابراین اگر $xNy \subseteq P$ باشد آنگاه $(xy \in P)$ در نتیجه $[y \in P$ یا $x \in P$]. [۷]

فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک و $d \in N$ باشد. آنگاه d عضو منظم از N گفته می‌شود اگر برای $y \in N$ ،

$$dy = 0 \text{ ایجاب کند } d = 0 \text{ یا } y = 0 \text{ [۴].}$$

1. faithful

2. Left ore condition

$(n'', t'') \in N \times S$ وجود دارد بطوریکه
 آنگاه $yt'' = sn'' \Rightarrow n'' = s^{-1}yt''$

$$\frac{y}{s'} \cdot \frac{x}{s} = \frac{xn''}{s't''} = \frac{xs^{-1}yt''}{s't''} = \frac{xs^{-1}y}{s'} = \frac{xy}{s's}$$

لم ۴.۲. فرض کنید P ایده‌ال اول از حلقه‌ی نزدیک خارج قسمتی N_s و K میدان خارج قسمتی از حلقه نزدیک N باشد. آنگاه برای هر $\frac{x}{t}, \frac{y}{s} \in K$

$$\frac{y}{s} N_s \subseteq \frac{x}{t} P \quad \text{یا} \quad \frac{x}{t} P \subseteq \frac{y}{s} N_s$$

اثبات. فرض کنید $\frac{x}{t}, \frac{y}{s} \in K$ باشند. نشان می‌دهیم

که $\frac{y}{s} N_s \subseteq \frac{x}{t} P$ چون P ایده‌ال اول از حلقه‌ی نزدیک خارج قسمتی N_s است کافی است نشان می‌دهیم که $\frac{y}{s} \in \frac{x}{t} P$. $\frac{y}{s} \in \frac{x}{t} P$ در نظر می‌گیریم. چون یک حلقه نزدیک جابجایی است بنا به لم ۳.۲. N_s نیز جابجایی است.

$$\frac{p_1}{t_1} \cdot \frac{x}{t} = \frac{x}{t} \cdot \frac{p_1}{t_1} \in \frac{x}{t} P$$

حال $(ys^{-1}t_1, x) \in N \times S$ را در نظر می‌گیریم. و چون N در شرط اور چپ صدق می‌کند. بنابراین $(n_1, s_1) \in N \times S$ وجود دارد بطوریکه
 $ys^{-1}t_1s_1 = xn_1 \Rightarrow n_1 = x^{-1}ys^{-1}t_1s_1$

$$\frac{p_1}{t_1} \cdot \frac{x}{t} = \frac{xn_1}{t_1s_1} = \frac{xx^{-1}ys^{-1}t_1s_1}{t_1s_1} = \frac{ys^{-1}}{1} = \frac{y}{s}$$

$$\frac{y}{s} \in \frac{x}{t} P$$

تعریف ۵.۲. فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک باشد، آنگاه N را حلقه‌ی نزدیک شبه ارزیاب می‌نامیم اگر هر ایده‌ال اول P از N ایده‌ال اول قوی باشد.

مثال ۶.۲. مثال ۲.۲. یک حلقه‌ی نزدیک شبه ارزیاب است.

ایده‌ال‌های اول قوی را معرفی و بعضی خواص آنها را بررسی می‌شود.

تعریف ۱.۲. ایده‌ال اول P از حلقه‌ی نزدیک N را، ایده‌ال اول قوی می‌نامیم اگر برای هر $a, b \in N$ aP, bN تحت عمل زیر مجموعه قابل مقایسه باشند.

مثال ۲.۲. حلقه‌ی نزدیک $(N, +, \cdot)$ را در نظر می‌گیریم که $(N, +)$ گروه چهارتایی کلاین روی $\{0, a, b, c\}$ و " آن را به صورت زیر تعریف شده است [۸].

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	a	b	b
c	0	a	b	c

با محاسباتی ساده می‌بینیم که $I_1 = \{0\}$ ، $I_2 = \{0, a\}$ و N تنها ایده‌ال‌های N هستند. $I_2 = \{0, a\}$ تنها ایده‌ال اول N است. واضح است که برای هر $a, b \in N$ $aI_2 \subseteq bN$ در نتیجه I_2 یک ایده‌ال اول قوی است.

لم ۳.۲. فرض کنید N یک حلقه نزدیک جابجایی باشد. آنگاه N_s یک حلقه نزدیک جابجایی است.

اثبات: فرض کنید N یک حلقه نزدیک جابجایی باشد، حال نشان می‌دهیم که N_s یک حلقه نزدیک جابجایی است.

$\frac{x}{s}, \frac{y}{s'} \in N_s$ برای هر $(x, s'), (y, s) \in N \times S$ در شرط اور چپ صدق N را در نظر می‌گیریم. بنابراین بطوریکه $(n', t') \in N \times S$ وجود دارد. بطوریکه
 $xt' = s'n' \Rightarrow n' = s'^{-1}xt'$

$$\frac{x}{s} \cdot \frac{y}{s'} = \frac{yn'}{st'} = \frac{ys'^{-1}xt'}{st'} = \frac{ys'^{-1}x}{s} = \frac{yx}{ss'} = \frac{xy}{ss'}$$

در $(y, s) \in N \times S$ را در نظر می‌گیریم و چون N در شرط اور چپ صدق می‌کند. بنابراین

$$\frac{ns_1s_2 + xn_1s_2 - ns_1s_2}{ss_1s_2} \in P_S$$

بنابراین P_S یک زیرمجموعه نرمال از N_S است.
(۴) نشان می‌دهیم که P_S یک ایده‌ال راست از N_S است.

یعنی $P_S \cdot N_S \subseteq P_S$ یا (برای هر $\frac{x_i}{s_i} \in P_S, \frac{n_i}{s'_i} \in N_S$)

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{s_i} \cdot \frac{n_i}{s'_i} \right) \subseteq P_S$$

بدون اینکه به کلیت مسئله خللی وارد شود $n = 2$ در نظر می‌گیریم؛ با استفاده از لم ۱.۲ N_S یک حلقه‌ی نزدیک جابجایی است. بنابراین

$$\frac{x_1}{s_1} \cdot \frac{n_1}{s'_1} + \frac{x_2}{s_2} \cdot \frac{n_2}{s'_2} =$$

$$\frac{n_1}{s'_1} \cdot \frac{x_1}{s_1} + \frac{n_2}{s'_2} \cdot \frac{x_2}{s_2} =$$

$$\frac{x_1 n'_1}{s'_1 t'_1} + \frac{x_2 n''_2}{s'_2 t''_2} =$$

$$\frac{x_1 n'_1 r + x_2 n''_2 m}{s'_1 t'_1 r} \in P_S$$

$$(\exists n', n'', m \in N, t', t'', r \in S)$$

(۵) برای هر $\frac{n}{s}, \frac{n'}{s'} \in N_S, \frac{x}{t} \in P_S$ نشان می‌دهیم.

P_S یک ایده‌ال چپ است. یعنی

$$\left(\frac{n'}{s'} \left(\frac{n}{s} + \frac{x}{t} \right) - \frac{n'}{s'} \cdot \frac{n}{s} \right) \in P_S$$

در $(s, t) \in N \times S$ در نظر می‌گیریم و چون N در شرط اور چپ صدق می‌کند، بنابراین $(n_1, t_1) \in N \times S$ وجود دارد به طوری که $st_1 = tn_1$ باشد، آنگاه

$$\frac{n}{s} + \frac{x}{t} = \frac{nt_1 + xn_1}{st_1} \text{ و } (1, t_1) \in N \times S \text{ در نظر}$$

می‌گیریم و چون N در شرط اور چپ صدق می‌کند، در نتیجه $(n_2, t_2) \in N \times S$ وجود دارد بطوریکه $t_1 n_2 = t_2$ باشد. آنگاه

$$\frac{n'}{s'} \left(\frac{nt_1 + xn_1}{st_1} \right) =$$

$$\frac{(nt_1 + xn_1)n_2}{s't_2} =$$

قضیه ۲.۷. فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک با میدان خارج قسمتی K و P یک ایده‌ال اول قوی از N باشد. آنگاه برای هر مجموعه‌ی ضربی بسته S از N به طوریکه $1 \in S, P_S$ یک ایده‌ال اول قوی از N_S است. **اثبات.** فرض کنید P ایده‌ال اول قوی از حلقه‌ی نزدیک N باشد. ابتدا نشان می‌دهیم که P_S یک ایده‌ال اول از N_S است.

(۱) چون $\frac{0}{1} \in P_S$ است، پس P_S یک مجموعه‌ی ناتهی است.

(۲) برای هر $(s, s') \in N \times S, \frac{x}{s}, \frac{y}{s'} \in P_S$ را در نظر می‌گیریم و چون N در شرط اور چپ صدق می‌کند، بنابراین $(n', t') \in N \times S$ وجود دارد بطوریکه $st' = s'n'$

$$\frac{x}{s} - \frac{y}{s'} = \frac{xt' - yn'}{st'} \in P_S$$

(۳) حال نشان می‌دهیم که P_S یک زیرمجموعه نرمال از N_S است. کافی است نشان دهیم که برای هر

$$\frac{n}{s} + \frac{x}{s'} - \frac{n}{s} \in P_S, \frac{x}{s'} \in P_S, \frac{n}{s} \in N_S$$

را در $(s, s') \in N \times S$ در نظر می‌گیریم و چون N در شرط اور چپ صدق می‌کند، بنابراین $(n_1, s_1) \in N \times S$ وجود دارد، بطوریکه $ss_1 = s'n_1$ باشد. آنگاه

$$\frac{n}{s} + \frac{x}{s'} = \frac{ns_1 + xn_1}{ss_1}$$

و $(s_1, 1) \in N \times S$ در نظر می‌گیریم و چون N در شرط اور چپ صدق می‌کند، بنابراین $(n_2, s_2) \in N \times S$ وجود دارد بطوریکه $s_1 s_2 = 1n_2$ باشد، آنگاه

$$\frac{n}{s} + \frac{x}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{ns_1 + xn_1}{ss_1} - \frac{n}{s} =$$

$$= \frac{(ns_1 + xn_1)s_2 - nn_2}{ss_1s_2} =$$

$$\frac{ns_1s_2 + xn_1s_2 - nn_2}{ss_1s_2} =$$

بنابراین $\frac{y}{t} \in P_S$ است. در نتیجه P_S یک ایده‌ال اول

از N_S است. برای هر $\frac{x}{t}, \frac{y}{s} \in K$ ، اگر $\frac{x}{t} \cdot \frac{y}{s} \in P_S$

باشد آنگاه واضح است که $\frac{y}{s} \in P_S$. در نتیجه P_S یک ایده‌ال اول قوی از N_S است.

نتیجه ۲.۸. فرض کنید P ایده‌ال اول قوی از حلقه‌ی نزدیک N باشد. آنگاه N_S یک حلقه نزدیک شبه ارزیاب است.

۳- گروه شبه ارزیاب در حلقه‌های نزدیک

در این بخش، مفاهیمی از N -گروه شبه ارزیاب در حلقه‌های نزدیک، ایده‌ال کسری، N -زیرگروه کسری و N -زیرگروه اول قوی در حلقه‌های نزدیک را معرفی می‌کنیم. هدف ما پیدا کردن رابطه بین حلقه‌ی نزدیک شبه ارزیاب و N -گروه شبه ارزیاب است و رابطه بین N -زیرگروه اول قوی و ایده‌ال اول قوی، با اثبات چند قضیه نشان داده شده است. در این بخش K میدان خارج قسمتی از حلقه نزدیک یکدار N است.

تعریف ۳.۱. فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک و M

یک N -گروه یکدار باشد، آنگاه P را N -زیرگروه اول گوئیم اگر $P \neq M$ و برای هر $n \in N, m \in M$ ، $nm \in P$ باشد، آنگاه $m \in P$ یا $n \in (P : M)$.

مثال ۳.۲. فرض کنید

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{0} \\ \bar{b} & \bar{c} \end{pmatrix} \mid \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in Z_2 \right\}$$

ضرب ماتریس‌ها یک حلقه‌ی نزدیک و $M = {}_N N$

$$\text{باشد. } S = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \right\}$$

را مجموعه ضربی بسته از N در نظر می‌گیریم، بنابراین با کمی محاسبات داریم

$$\frac{nt_1n_2 + xn_1n_2}{s't_2}$$

و $(t_1n_2, 1) \in N \times S$ در نظر می‌گیریم و چون N در شرط اور چپ صدق می‌کند، بنابراین

$(n_3, t_3) \in N \times S$ وجود دارد بطوریکه

$$t_1n_2t_3 = n_3 \in S \text{ باشد. } \frac{n'}{s'} \cdot \frac{n}{s} = \frac{nn_3}{s's_3}$$

و $(t_1n_2, n_3) \in N \times S$ در نظر می‌گیریم و چون N در

شرط اور چپ صدق می‌کند، در نتیجه

$(n_4, t_4) \in N \times S$ وجود دارد بطوریکه

$$t_1n_2t_4 = n_3n_4 \text{ پس}$$

$$\frac{n'}{s'} \left(\frac{nt_1 + xn_1}{st_1} \right) - \frac{n'}{s'} \cdot \frac{n}{s} =$$

$$\frac{(nt_1 + xn_1)n_2}{s't_2} - \frac{nn_3}{s't_3} =$$

$$\frac{nt_1n_2t_4 + xn_1n_2t_4 - nn_3n_4}{s't_2t_4} =$$

$$\frac{nt_1n_2t_4 + xn_1n_2t_4 - nt_1n_2t_4}{s't_2t_4} \in P_S$$

در نتیجه P_S یک ایده‌ال چپ از N_S است. از

محاسبات بالا نتیجه می‌گیریم که P_S یک ایده‌ال از

N_S است. اکنون نشان می‌دهیم P_S یک ایده‌ال اول از

N_S است.

فرض کنید $\frac{x}{s}, \frac{y}{t} \in N_S$ اگر $\frac{x}{s} \cdot \frac{y}{t} \in P_S$ باشد.

آنگاه نشان می‌دهیم که $\frac{x}{s} \in P_S$ یا $\frac{y}{t} \in P_S$. فرض

کنید $\frac{x}{s} \notin P_S$ و $\frac{x}{s} \cdot \frac{y}{t} \in P_S$ باشد. $(s, 1) \in N \times S$

در نظر می‌گیریم و چون N در شرط اور چپ صدق

می‌کند. بنابراین $(n_1, t_1) \in N \times S$ وجود دارد بطوریکه

$$st_1 = n_1 \text{ باشد.}$$

$$\frac{x}{s} \cdot \frac{y}{t} = \frac{yn_1}{st_1} = \frac{yn_1}{n_1} =$$

$$\frac{y}{1} \in P_S \Rightarrow y \in P$$

مثال ۳.۳. در مثال ۳.۲.

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \right\}$$

است که L ، N -زیرگروهی از M_S است. قرار می‌دهیم، لذا داریم

$$rL = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} \right\} \subseteq M$$

زیرگروه کسری از M است.

اگر N یک حلقه‌ی نزدیک باشد. برای $y \in K$ و $x \in M_S$ پس واضح است که Ny یک ایده‌ال کسری از N و Nx یک N -زیرگروه کسری از M است.

قضیه ۳.۷. فرض کنید P یک N -زیرگروه حقیقی از M باشد. آنگاه P یک N -زیرگروه اول قوی است اگر و فقط اگر برای هر ایده‌ال I از N و هر N -زیرگروه کسری L از M ، $IL \subseteq P$ نتیجه دهد که $L \subseteq P$ یا $I \subseteq (P:M)$.

اثبات. فرض کنید P یک N -زیرگروه اول قوی باشد، $L \not\subseteq P$ و $I \not\subseteq (P:M)$ نشان می‌دهیم $L \not\subseteq P$ چون $L \not\subseteq P$ بنابراین $x \in L$ وجود دارد که $x \notin P$ اکنون $x \in I$ در نظر بگیرید. پس $yx \in IL$.

از طرفی $IL \subseteq P$ بنابراین $yx \in P$ ، چون P یک N -زیرگروه اول قوی است و $x \notin P$ بنا به فرض $y \in (P:M)$ در نتیجه $y \in (P:M)$.

برعکس، واضح است که P یک N -زیرگروه اول از M است. فرض کنید $y \in K$ و $x \in M_S$ و $yx \in P$ و $x \notin P$. $I = Ny$ یک ایده‌ال کسری از N و $L = Nx$ یک N -زیرگروه کسری از M در نظر می‌گیریم، بنابراین به راحتی دیده می‌شود $IL \subseteq P$ ، آنگاه $L = Nx \subseteq P$ یا $I = Ny \subseteq (P:M)$. پس $x \in P$ یا $NyM \subseteq P$ از طرفی $x \notin P$ بنابراین $NyM \subseteq P$. چون N یک حلقه‌ی نزدیک یک‌دار است لذا $yM \subseteq P$ در نتیجه $y \in (P:M)$.

$$M_S = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \right\}$$

$$P_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} \right\}$$

$$P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \right\}$$

$$P_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \right\}$$

$$P_4 = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \right\}$$

و $M = {}_N N$ تنها N -زیرگروه‌های غیر صفر از M هستند. اکنون نشان می‌دهیم که P_3 یک N -زیرگروه اول از M است. فرض کنید

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \in N, \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \in M$$

بطوریکه $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \in P_3$ و واضح است که $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \in P_3$ با محاسبات مشابه می‌بینیم که $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \in M \subseteq P_3$.

P_3 یک N -زیرگروه اول از M است.

تعریف ۳.۳. فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک با میدان خارج قسمتی K و M یک N -گروه باشد، آنگاه N -زیرگروه اول P از M را N -زیرگروه اول قوی می‌گوئیم اگر برای هر $x \in M_S$ و $y \in K$ ، $yx \in P$ ، $yx \in P$ یا $x \in (P:M)$.

مثال ۳.۴. حلقه‌ی نزدیک \mathbb{Z} با میدان خارج قسمتی \mathbb{Q} و \mathbb{Z} را به عنوان یک \mathbb{Z} -گروه در نظر بگیرید. آنگاه واضح است که $2\mathbb{Z}$ یک \mathbb{Z} -زیرگروه اول قوی از \mathbb{Z} است.

تعریف ۳.۵. اگر N یک حلقه‌ی نزدیک و M یک N -گروه باشد. N -زیرگروه L از M_S را N -زیرگروه کسری می‌گوئیم، اگر $r \in S$ وجود داشته باشد، بطوریکه $rL \subseteq M$.

است اگر و فقط اگر $\frac{L}{P}$ ، N -زیرگروه اول قوی از $\frac{M}{P}$ باشد.

اثبات. فرض کنید L ، N -زیرگروه اول قوی از M و $y \in K$ باشد. بنا به قضیه ۳.۱۰. $y^{-1}L \subseteq L$ یا $y \in (P:M)$ ، بنابراین $y^{-1}\frac{L}{P} \subseteq \frac{L}{P}$ یا $y \in (\frac{L}{P} : \frac{M}{P})$.

برعکس. فرض کنید $\frac{L}{P}$ ، N -زیرگروه اول قوی از $\frac{M}{P}$ باشد. پس $y^{-1}\frac{L}{P} \subseteq \frac{L}{P}$ یا $y \in (\frac{L}{P} : \frac{M}{P})$ است. آنگاه $y^{-1}L \subseteq L$ یا $y \in (L:M)$ و بنا به قضیه ۳.۹. L ، N -زیرگروه اول قوی از M است.

قضیه ۳.۱۱. فرض کنید هر N -زیرگروه یک ایده‌ال از M و P یک N -زیرگروه اول قوی از M باشد. آنگاه $(P:M)$ یک ایده‌ال اول قوی از N است.

اثبات. بنا به فرض P یک N -زیرگروه اول قوی از M است. حال نشان می‌دهیم که $(P:M) \in \text{spec}(N)$. چون $0 \in (P:M)$

(۲) فرض کنید $a, b \in (P:M)$ آنگاه واضح است که $a-b \in (P:M)$

(۳) نشان می‌دهیم که $(P:M)$ ، یک زیرگروه نرمال از N است. $n \in N$ و $a \in (P:M)$ در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم $n+a-n \in (P:M)$. چون P یک N -زیرگروه و هر N -زیرگروه یک ایده‌ال است. پس $(n+a-n)M = (nM+aM-nM) \subseteq P$ بنابراین $(P:M)$ یک زیرگروه نرمال از N است.

(۴) نشان می‌دهیم که $(P:M)$ ایده‌ال راست است، یعنی $(P:M)N \subseteq (P:M)$. فرض کنید $a_i \in (P:M)$ و $n_i \in N$ باشد. آنگاه

نتیجه در $\sum_{i=1}^n (a_i n_i)M \subseteq \sum_{i=1}^n a_i (n_i M) \subseteq \sum_{i=1}^n a_i M \subseteq P$ است. $(P:M)N \subseteq (P:M)$

قضیه ۳.۸. فرض کنید P یک N -زیرگروه حقیقی از M باشد. آنگاه P یک N -زیرگروه اول قوی است اگر و فقط اگر برای هر $y \in K$ و هر N -زیرگروه کسری L از M ، $yL \subseteq P$ ایجاب کند $L \subseteq P$ یا $y \in (P:M)$.

اثبات. فرض کنید P یک N -زیرگروه اول قوی از M و $y \in K$ و $x \in L$ بطوریکه $yx \in P$ باشد. در نتیجه $x \in P$ یا $y \in (P:M)$ است. پس $L \subseteq P$ یا $y \in (P:M)$.

برعکس. واضح است که P یک N -زیرگروه اول است. فرض کنید $y \in K$ و $x \in M_S$ بطوریکه $yx \in P$. $L = Nx$ ، یک N -زیرگروه کسری از M در نظر می‌گیریم. بنابراین $yL \subseteq P$ ، آنگاه $L = Nx \subseteq P$ یا $y \in (P:M)$. چون یک حلقه نزدیک یکدار است بنابراین $x \in P$ یا $y \in (P:M)$. لذا P یک N -زیرگروه اول قوی از M است.

قضیه ۳.۹. فرض کنید P یک N -زیرگروه اول از M باشد، آنگاه P یک N -زیرگروه اول قوی است اگر و فقط اگر برای هر $y \in K$ ، $y^{-1}P \subseteq P$ یا $y \in (P:M)$.

اثبات. فرض کنید $y \in K$ ، $y \notin (P:M)$ و $x \in P$ باشد. چون $x = yy^{-1}x \in P$ و $x \in P$ یک N -زیرگروه اول قوی است و از طرفی $y \notin (P:M)$ پس $y^{-1}x \in y^{-1}P \subseteq P$ بنابراین $y^{-1}x \in P$. **برعکس.** فرض کنید $y \in K$ و $x \in M_S$ بطوریکه $yx \in P$ است. اگر $y^{-1}P \subseteq P$ باشد، آنگاه $x = y^{-1}yx = y^{-1}(yx) \in y^{-1}P \subseteq P$ در غیر این صورت $y \in (P:M)$. بنابراین P یک N -زیرگروه اول قوی است.

قضیه ۳.۱۰. فرض کنید P و L ، N -زیرگروه‌هایی از M باشند بطوریکه $P \subseteq L$. اگر برای هر $y \in K$ ، $y^{-1}P \subseteq P$ ، آنگاه L ، N -زیرگروه اول قوی از M است.

زیرگروه از M یک ایده‌ال از آن باشند. آنگاه P یک ایده‌ال اول قوی از N است اگر و فقط اگر PM یک N -زیرگروه اول قوی از M باشد.

اثبات. فرض کنید P یک ایده‌ال اول از N باشد، حال نشان می‌دهیم PM یک N -زیرگروه اول از M است. فرض کنید برای هر $n \in N$ و $m \in M$ ، $nm \in PM$ باشد. آنگاه $nm \in nM \subseteq PM$ نتیجه $n \in (PM : M)$ بنابراین PM یک N -زیرگروه اول از M است. فرض کنید برای هر $x = \frac{a}{t} \in M_s$ ، $y = \frac{r}{s} \in K$ ، $yx \in PM$ باشد. اگر $y \notin P$ ، آنگاه $A = \{b \in N \mid bx \in PM\}$ قرار می‌دهیم. واضح است که A یک ایده‌ال از N است. اگر $A = N$ باشد. آنگاه $x \in PM$ است. حال اگر $A \neq N$ آنگاه ایده‌ال ماکسیمال Q از N وجود دارد بطوریکه $A \subseteq Q$. می‌دانیم که $1 \in M$ بنابراین طبق تعریف $T_Q(M)$ اگر $1 \in T_Q(M)$ باشد بنابراین $1 \in Q$ پس تناقض است در نتیجه، $1 \notin T_Q(M)$ ، لذا $M \neq T_Q(M)$ در نتیجه M, Q دوری است. پس $m \in M$ و $q \in Q$ وجود دارد به طوریکه $Nm \subseteq (1-q)M$. از طرفی $PM \subseteq (1-q)PM$.

حال $u \in N$ و $v \in P$ وجود دارد به طوریکه $(1-q)a = um$ و $(1-q)ra = stvm$ بنابراین $rum = stvm \in Pm$ در نتیجه $(nu)m \in Pm \subseteq PM$ چون PM یک N -زیرگروه اول است پس $m \in PM$ و $nu \in (PM; M)$ ایجاب می‌کند $nuM \subseteq PM$ بنابراین $p_1 \in P$ وجود دارد بطوریکه $nuM = p_1M$ در نتیجه $nuM - p_1M = 0$ لذا $(nu - p_1)M = 0$ و چون M با وفا است پس $nu - p_1 = 0$ در نتیجه $nu = p_1 \in P$ یعنی $ru \in P$.

حال اگر $(st)^{-1}ru = (s^{-1}r)(t^{-1}u) \in P$ در نتیجه $s^{-1}r \in P$ یا $(t^{-1}u) \in P$. اگر $s^{-1}r \in P$ آنگاه $s^{-1}r = \frac{r}{s} \in P$ بنابراین $1 \in PM$. $1 = \frac{r}{s} \cdot 1 \in PM$ یعنی $ru = p_1 \in P$ در نتیجه $ru - p_1 = 0$ در نتیجه $ru = p_1 \in P$.

حال اگر $(t^{-1}u) \in P$ آنگاه $s^{-1}r \notin P$ از طرفی $(1-q)a = um$

(۵) حال نشان می‌دهیم که $(P : M)$ ایده‌ال چپ است. یعنی برای هر $n, n' \in N$ و $a \in (P : M)$ داریم، $n'(n+a) - n'n \in (P : M)$. فرض کنید،

$$(n'(n+a) - n'n)M = n'(nM + aM) - n'nM \subseteq P$$

بنابراین $(P : M)$ ایده‌ال چپ است. نشان می‌دهیم که $(P : M)$ ایده‌ال اول از N است. فرض کنید $x, y \in N$ و $x \cdot y \in (P : M)$ در نتیجه $(xy)M = x(yM) \subseteq P$ یا $x \in P$ آنگاه $(xy)M \subseteq P$ فرض کنید $yM \subseteq P$ در نتیجه $y \in (P : M)$ در غیر این صورت $x \in P$ پس $xM \subseteq PM \subseteq P$ آنگاه $x \in (P : M)$ بنابراین $(P : M) \in \text{spec}(N)$. حال نشان می‌دهیم که $(P : M)$ یک ایده‌ال اول قوی از N است.

فرض می‌کنیم برای $a, b \in K$ ، $a \cdot b \in (P : M)$ بنابراین $a(bM) = abM \subseteq P$ چون P یک N -زیرگروه اول از M است بنا به قضیه ۳.۸. $a \in (P : M)$ یا $bM \subseteq P$ از طرفی $P \subset M$ لذا $b \in (P : M)$ در نتیجه $(P : M)$ یک ایده‌ال اول قوی از N است.

تعریف ۳.۱۲. N -گروه M را یک N -گروه شبه ارزیاب می‌گوئیم، اگر هر N -زیرگروه اول از M ، N -زیرگروه اول قوی از M باشد.

تعریف ۳.۱۳. فرض کنید M, N -گروه و P ایده‌ال از N باشد و $T_p(M)$ را به صورت $T_p(M) = \{m \in M \mid (1-p)m = 0, \exists p \in P\}$ تعریف می‌کنیم. اگر $M = T_p(M)$ ، آنگاه M را N -گروه، P -تابدار گوئیم. اگر $M \neq T_p(M)$ آنگاه M را N -گروه، P -دوری می‌نامیم، به طوریکه $m \in M$ ، $p \in P$ وجود داشته باشد، که $(1-p)M \subseteq Nm$.

قضیه ۳.۱۴. فرض کنید P یک ایده‌ال اول از N ، $M = {}_N N$ یک N -گروه ضربی با وفا و هر N -

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله مفاهیم ایده‌ال اول قوی، N -زیرگروه اول قوی، حلقه‌ی نزدیک شبه-ارزیاب و N -زیرگروه شبه-ارزیاب در حلقه‌های نزدیک مورد مطالعه قرار گرفته و همچنین برخی از خواص آنها بررسی شده است. در اینجا سعی شده با استفاده از قضایایی رابطه بین N -زیرگروه اول قوی و N -زیرگروه اول قوی از آن N -زیرگروه و همچنین رابطه بین حلقه‌ی نزدیک شبه-ارزیاب و N -زیرگروه شبه-ارزیاب را بدست بیاورند. در انتها پیشنهادهای زیر را می‌توان مطرح کرد: در این مقاله برخی مفاهیم مانند حلقه نزدیک ارزیاب و N -زیرگروه ارزیاب در حلقه‌های نزدیک مطرح نشده‌اند. می‌توان این مفاهیم را به عنوان ایده‌هایی برای تحقیق بیشتر در زمینه حلقه‌های نزدیک پیشنهاد کرد.

$$(1-q)x = (1-q)\frac{a}{t} = \frac{u}{t}m = t^{-1}um \in PM$$

پس $1-q \in A \subseteq Q$ ایجاب می‌کند $1 \in Q$. در نتیجه با ماکسیمال بودن Q در تناقض است. بنابراین PM یک N -زیرگروه اول قوی از M است. **برعکس.** فرض کنید PM یک N -زیرگروه اول قوی از M است. بنا به قضیه ۳.۱۲. $(PM : M)$ یک ایده‌ال اول قوی از N است. اکنون نشان می‌دهیم که $P = (PM : M)$ واضح است که $P \subseteq (PM : M)$ نشان می‌دهیم که $(PM : M) \subseteq P$. فرض کنید $x \in (PM : M)$ در نتیجه $xM \subseteq PM$ پس بنابراین $p_1 \in P$ وجود دارد بطوریکه $xM = p_1M \Rightarrow (x - p_1)M = 0$ و چون M با وفا است پس $x - p_1 = 0$ بنابراین $x = p_1 \in P$ در نتیجه P یک ایده‌ال اول قوی از N است.

قضیه ۳.۱۵. فرض کنید $M = {}_N N$ یک N -گروه ضربی با وفا و هر N -زیرگروه یک ایده‌ال از M باشند. آنگاه M یک N -گروه شبه ارزیاب است اگر و فقط اگر N حلقه‌ی نزدیک شبه ارزیاب باشد.

اثبات. فرض کنید M یک N -گروه شبه ارزیاب و P یک ایده‌ال اول از N باشد. چون M یک N -گروه ضربی با وفا و PM یک ایده‌ال اول از M است، بنا به قضیه ۳.۱۴. PM یک N -زیرگروه اول قوی از M است. P یک ایده‌ال اول قوی از N است، در نتیجه N حلقه‌ی نزدیک شبه ارزیاب است.

برعکس. فرض کنید L یک N -زیرگروه از M باشد. چون M یک N -گروه ضربی با وفا است، پس برای بعضی از ایده‌ال‌های اول N مانند P داریم $L = PM$. از طرفی N حلقه‌ی نزدیک شبه ارزیاب و P یک ایده‌ال اول قوی از N است، بنا به قضیه ۳.۱۴. N, L -زیرگروه اول قوی از M است. پس نتیجه می‌گیریم که M یک N -گروه شبه ارزیاب است.

فهرست منابع

- [1] Hedstrom. J. R and Houston E. G, (1978). Pseudo-valuation domains, Pacific Journal of Mathematics.
- [2] Anderson .D. F, Badawi .A, and Dobbs .D. E, (2000). Pseudo-valuation domain, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana
- [3] Moghaderi. J and Nekooei. R, (2011). Strongly Prime, Submodules and Pseudo- valuation Modules, International Electronic Journal of Algebra
- [4] Pilz. G, (1983). Near-Rings. North Holland, Amsterdam.
- [5] sadeghi Gougheri. M and Roubarylor. T, The Constraction of Fraction N-subgroups in Near Ring, submitted.
- [6] Khodadadpour. E and Roubarylor. T, Some types of Multiplication N-group in Near-Rings, submitted.
- [7] Birkenmeier. G, Heatherly. H, and Lee.E, (1993). Prime Ideals in Near-Rings, Results in Mathematics.
- [8] Dheena. P and Satheesh kumar. G, (2008). completley 2-primal Ideals in Near-rings, Tamsui oxford journal of mathematical sciences.

