دسترسی در سایت http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و دوم، مهر و آبان ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا در تحلیل پوششی داده‌ها براساس بازی همکارانه

ساناز اسدی رحمتی[1]، رضا فلاح‌نژاد[2*]

[(۱و۲)] گروه ریاضی، واحد خرم‌آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، خرم‌آباد، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۱۲/۰۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۲/۲۵

چکیده

ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده در دستگاه‌های اقتصادی و مدیریتی بسیار بااهمیت است. یکی از تکنیک‌های علمی و کاربردی برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده، تحلیل پوششی داده‌ها است. در مدل‌های معمول تحلیل پوششی داده‌ها، واحدها به دو دسته کارا و ناکارا تقسیم می‌شوند که میزان کارایی هر واحد کارا یک است و هیچ تمایزی بین واحدهای کارا وجود ندارد. این مطالعه قصد دارد که یک روش جدید برای رتبه‌بندی واحدهای کارا بر اساس مفاهیم بازی همکارانه ارائه دهد. روش پیشنهادی به این‌گونه است که واحدهای کارا به‌عنوان بازیکنان یک بازی همکارانه در نظر گرفته می‌شوند. یک زیرمجموعه از این بازیکنان به‌عنوان ائتلاف S تعریف می‌شوند. سپس مجموع کارایی واحدهای ناکارا با توجه به مجموعه امکان تولید که توسط واحدهای ناکارا و اعضای ائتلاف S ساخته‌شده است به‌عنوان تابع مشخصه ائتلاف S تعریف می‌شود که از آن برای تعیین تأثیر حاشیه‌ای واحدهای کارا در ائتلاف‌های مختلف استفاده می‌شود. در آخر از مقدار شپلی برای تعیین راه‌حل بازی همکارانه و رتبه‌بندی واحدهای کارا استفاده می‌شود. در این روش که قادر به رتبه‌بندی واحدهای کارای غیر رأسی نیز هست، واحدهای ناکارا هم در رتبه‌بندی تأثیرگذار هستند و هم‌چنین در هر شرایط بازده به مقیاس شدنی است.

واژه‌های کلیدی: بازی همکارانه، مقدار شپلی، رتبه‌بندی واحدهای کارا، تحلیل پوششی داده‌ها.

* عهده‌دار مکاتبات: Email:R.fallahnejad@khoiau.ac.ir, r.fallahnejad@gmail.com

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)[1] یک روش غیر پارامتری برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم گیرنده (DMU)[2] است. این روش عملکرد واحدهای همگنی که از ورودی‌های مشابه برای تولید خروجی‌های مشابه استفاده می‌کنند را بررسی می‌کند. در ابتدا چارنز، کوپر و رودز [۱] یک روش برنامه‌ریزی خطی (CCR) برای ارزیابی کارایی واحدها معرفی کردند که نیازی به دانستن تابع تولید نداشت. سپس بنکر و همکاران [۲] با اضافه کردن شرط بازده به مقیاس متغیر مدل BCC را ارائه کردند. در ادامه مدل بر پایه اسلک برای ارزیابی کارایی توسط تن [۳] معرفی شد. علیرغم اینکه این مدل‌ها کمک بزرگی برای ارزیابی واحدها می‌کنند، تفاوتی بین واحدهای کارا قائل نمی‌شود. برای رفع این کمبود روش‌های مختلفی برای رتبه‌بندی واحدهای کارا ارائه‌شده است. حسین‌زاده‌لطفی و همکاران [۴] با مروری بر روش‌های رتبه‌بندی آنها را به هفت دسته تقسیم کرده‌اند. الدمک و ذولفقاری [۵] روش‌های رتبه‌ای را براساس ساختارشان به ده دسته تقسیم‌بندی کرده‌اند که سه تا از آن‌ها به شرح زیر هستند:

اول، روش کارایی متقاطع[3]؛ این روش توسط سکتون و همکاران[۶] پیشنهاد شد. ایده اصلی این روش بر اساس همتا ارزیابی بجای خودارزیابی است. بطوریکه یک واحد موردنظر بهترین وزن خودش را انتخاب می‌کند که براساس آن وزن‌ها کارایی بقیه واحدها محاسبه می‌شود و میانگین کارایی همه واحدها با وزن آن واحد به‌عنوان کارایی متقاطع واحد موردنظر معرفی می‌شود.

دوم، روش‌های بر پایه مرجع؛ این روش‌ها نیازمند شناسایی و تعیین یک استاندارد برای تشخیص واحدهای کارا به‌عنوان مرجعی برای واحدهای دیگر هستند. استرن و همکاران [۷] ادعا کردند که رتبه‌بندی یک واحد کارا وابسته به تعداد دفعاتی است که آن واحد به‌عنوان مرجع واحدهای دیگر انتخاب می‌شود. جهانشاهلو و همکاران [۸] یک روش رتبه‌بندی دیگر براساس حذف واحدهای کارا از مجموعه مرجع بیان کردند. در این روش تأثیر واحد حذف‌شده از مجموعه مرجع بر روی مجموع کارایی واحدهای دیگر اندازه‌گیری می‌شود. هر چه تأثیر حذف بیشتر باشد، آن واحد کارا رتبه بهتری دارد. رضاییانی و فروغی [۹] از میزان سهم هر واحد در ساختن مرز مرجع برای رتبه‌بندی استفاده کردند.

سوم، اندرسن و پیترسن [۱۰] مدل ابرکارایی را برای رتبه‌بندی واحدهای کارا معرفی کردند که در آن، حذف یک واحد کارا یک مرز جدید تولید می‌کند که مرزی برای اندازه‌گیری ابرکارایی آن واحد خواهد بود. هر چه ابرکارایی یک واحد بیشتر باشد، رتبه بهتری دارد. به نظر می‌رسد که مدل ابرکارایی سه مشکل دارد. ابتدا نشدنی بودن در حالت بازده به مقیاس متغیر. دوم، غیرقابل مقایسه بودن، چون هر واحد کارا با چارچوب متفاوتی ارزیابی می‌شود. سوم، قادر نبودن به رتبه‌بندی واحدهای کارای غیر رأسی.

برای رفع مشکلات روش‌های رتبه‌بندی معمولی با در نظر گرفتن ویژگی رقابتی واحدهای کارا در رتبه‌بندی، DEA با نظریه بازی ترکیب شده است. راه حل مقدار شپلی و بازی چانه‌زنی نقش مهمی در این رتبه‌بندی ها را دارند. ناکابایاشی و تون[۱۱] از راه حل مقدار شپلی و نوکلئولوس برای تقسیم عادلانه جایزه بازیکنان بازی همکارانه استفاده کردند. لوزانو و همکاران [۱۲] حالت‌های مختلف

[1] Data Envelopment Analysis
[2] Decision Making Unit
[3] Cross Efficiency

ترکیب DEA و بازی همکارانه را به همراه بازی چانه‌زنی مطالعه کردند. لی [۱۳] یک مدل DEA برای تعیین استراتژی ترکیبی تعادل نش معرفی کردند. عمرانی و همکاران [۱۴] کارایی انرژی بخش‌های حمل و نقل در ایران را با ترکیب تعادل نش بررسی کردند. عمرانی و همکاران [۱۵] یک روش براساس DEA و نظریه بازی برای بالا بردن قدرت تمایز واحدهای کارا معرفی کردند. یکی از ایرادات روش کارایی متقاطع وجود جواب‌های بهینه دگرین است که باعث رتبه‌بندی‌های متفاوت می‌شود. برای برطرف کردن این ایراد دویل و گرین [۱۶] کارایی متقاطع خوش‌بینانه و بدبینانه را برای به دست آوردن وزن‌های قطعی پیشنهاد کردند. جای و همکاران [۱۷] با بررسی جواب‌های بهینه دگرین در کارایی متقاطع، بازی کارایی متقاطع را گسترش دادند، به این ترتیب که هر واحد تصمیم گیرنده یک بازیکن است که سعی دارد کارایی خودش را بیشینه کند، بطوریکه کارایی بقیه بازیکنان از مقدار کارایی متقاطعشان کمتر نشود. یک سؤال در مورد امتیاز کارایی متقاطع این است که چرا میانگین کارایی‌ها به‌عنوان امتیاز کارایی متقاطع در نظر گرفته‌شده است؟ وو و همکاران [۱۸] با استفاده از نظریه بازی همکارانه و راه‌حل نوکلئولوس[4] یک وزن نهایی ارائه کردند. وو و همکاران [۱۹] در مطالعه دیگری هر واحد را به‌عنوان یک بازیکن بازی همکارانه و زیرمجموعه‌ای از واحدها را به‌عنوان یک ائتلاف در نظر گرفتند و با معرفی یک تابع مشخصه از مقدار شپلی برای به دست آوردن راه‌حل بازی همکارانه استفاده کردند. سپس با استفاده از وزن‌های مشترک متناظر با راه‌حل مقدار شپلی امتیازات کارایی متقاطع نهایی را مشخص کردند.

برای حل مشکل غیرقابل مقایسه بودن ابرکارایی‌ها در روش اندرسن پیترسن، لی و همکاران [۲۰] با در نظر گرفتن واحدها به‌عنوان بازیکنان یک بازی همکارانه یک چارچوب مشترک برای ارزیابی و رتبه‌بندی واحدها ایجاد کردند. به‌این‌ترتیب که با در نظر گرفتن زیرمجموعه‌ای از واحدهای کارا به‌عنوان یک ائتلاف، تأثیر حذف یک ائتلاف روی هر واحد کارا به‌عنوان سهم تغییر کارایی[5] (ECP) معرفی می‌شود. آن‌ها یک تابع مشخصه به‌صورت مجموع ECPهای همه واحدهای موجود در یک ائتلاف معرفی کردند و برای رتبه‌بندی واحدها از طریق یک‌راه حل بازی همکارانه از مقدار شپلی[6] استفاده کردند. این مدل بر اساس مدل ابرکارایی اندرسن و پیترسن [۱۰] است، بنابراین ویژگی‌های آن من جمله کمبودهایش را دارا است. به عنوان مثال، نشدنی بودن و ناتوانی رتبه‌بندی واحدهای کارای غیرراسی. در مطالعه حاضر، روش بدین‌صورت است: واحدهای کارا به‌عنوان بازیکنان بازی همکارانه و زیرمجموعه‌ای از آن‌ها به‌عنوان ائتلاف S تعریف می‌شوند. مجموع کارایی واحدهای ناکارا با توجه به مجموعه امکان تولید[7] ساخته‌شده توسط واحدهای ناکارا و اعضای ائتلاف S به‌عنوان تابع مشخصه ائتلاف S معرفی می‌شود که برای تعیین تأثیر حاشیه‌ای واحدهای کارا در ائتلاف‌های مختلف از آن استفاده می‌شود. نهایتاً، مقدار شپلی برای تعیین راه‌حل بازی همکارانه و رتبه‌بندی واحدهای کارا مورداستفاده قرار می‌گیرد.

فاکتورهای قابل‌تمایز روش پیشنهادی در مقایسه با روش لی و همکاران [۲۰] بدین‌صورت است: این روش واحدها را به مجموعه امکان تولید اضافه می‌کند بنابراین با مشکل نشدنی بودن برخورد نمی‌کند و برای هر شرایط بازده به مقیاس شدنی با هر مدل تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی کارایی قابل‌استفاده است. درروش پیشنهادی تابع مشخصه

[4] Nucleulus

[5] Efficiency Change Proportion

[6] Shapley Value

[7] Production Possibility Set

شامل مجموع کارایی همه واحدهای ناکاراست، بنابراین واحدهای ناکارا در رتبه‌بندی تأثیرگذار هستند. روش پیشنهادی قادر به رتبه بندی واحدهای کارای غیرراسی می‌باشد.

ادامه این مطالعه بدین ترتیب خواهد بود: بخش ۲ شامل سه قسمت است، معرفی یک مدل تحلیل پوششی داده‌ها، نظریه بازی و بازی تحلیل پوششی داده‌ها. در بخش ۳، روش پیشنهادی ارائه می‌شود. بخش ۴ شامل یک مثال ساده برای تشریح روش، یک مثال برای مقایسه با روش‌های دیگر و یک مثال واقعی است.

۲- مفاهیم پایه و مروری بر ادبیات موضوع

۲-۱ یک مدل تحلیل پوششی داده‌ها

در این بخش مدل‌های CCR [۱] و BCC [۲] بطورخلاصه مرور می‌شوند. n واحد تصمیم‌گیرنده که هر $DMU_j\,(i \in \{1,2,\dots,n\})$ از m ورودی $x_{ij}\,(i \in \{1,2,\dots,m\})$ برای تولید S خروجی $y_{rj}\,(r \in \{1,2,\dots,s\})$ استفاده می‌کند. مجموعه امکان تولید با فرض بازده به مقیاس ثابت[8] مجموعه (x,y)هایی است که ورودی x می‌تواند خروج y را تولید کند:

$$T_c=\{(x,y), x\ge\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j, y\le\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j,\ \lambda_j\ge 0, j=1,2,\dots,n\}$$

با اضافه کردن محدودیت $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1$، مجموعه امکان تولید به حالت بازده به مقیاس[9] متغیر تبدیل می‌شود.

$$T_v=\{(x,y), x\ge\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j, y\le\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j,\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1, \lambda_j\ge 0, j=1,2,\dots,n\}$$

کارایی DMU_o با استفاده از مدل CCR به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\theta_o=\min\ \theta-\xi\Big(\sum_{i=1}^{n}s_i^-+\sum_{r=1}^{n}s_r^+\Big)\\
&S.t\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}+s_i^-=\theta x_{io}, && i=1,\dots,m\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}-s_r^+=y_{ro}, && r=1,\dots,s\\
&\qquad \lambda_j\ge 0, && j=1,\dots,s\\
&\qquad s_i^-\ge 0, && i=1,\dots,m\\
&\qquad s_r^+\ge 0, && r=1,\dots,s\\
&\qquad \theta\ free
\end{aligned}\tag{1}$$

که θ_o کارایی DMU_o است وقتی‌که مجموعه امکان تولید توسط $DMU_1, DMU_2,\dots,DMU_n$ ساخته‌شده باشد. اگر $\theta_o \prec 1$ آنگاه DMU_o ناکارا می‌باشد. اگر $\theta_o=1$، $s_i^-=0, s_r^+=0$، آنگاه DMU_o کارای قوی CCR است و اگر $\theta_o=1$ و در بعضی جواب های بهینه حداقل یک متغیر کمکی مخالف صفر موجود باشد آنگاه DMU_o کارای ضعیف CCR است.

با اضافه کردن محدودیت $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1$ به مدل CCR، مدل BBC به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\theta_o=\min\theta-\xi\Big(\sum_{i=1}^{n}s_i^-+\sum_{r=1}^{n}s_r^+\Big)\\
&S.t\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}+s_i^-=\theta x_{io}, && i=1,\dots,m\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}-s_r^+=y_{ro}, && r=1,\dots,s\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1\\
&\qquad \lambda_j\ge 0, && j=1,\dots,s\\
&\qquad s_i^-\ge 0, && i=1,\dots,m\\
&\qquad s_r^+\ge 0, && r=1,\dots,s\\
&\qquad \theta free
\end{aligned}\tag{2}$$

[8] Constant return to scale
[9] Variable return to scale

در ارزیابی با این روش‌ها، کارایی همه DMUهای کارا یک است و تفاوتی بین آن‌ها وجود ندارد. برای ایجاد تمایز بین واحدهای کارا، روش‌ها رتبه‌بندی مختلف پیشنهادشده است.

۲-۲ نظریه بازی

هنگامی‌که تصمیم‌گیرندگان مختلف منافع متضاد دارند، نظریه بازی قابل‌استفاده است. شرایط رقابتی با یک مجموعه از بازیکنان را در نظر بگیرید، بازیکنان می‌توانند به دو طریق باهم رقابت کنند:

بازی غیرهمکارانه: بازیکنان به‌طور انفرادی بازی خود را انجام می‌دهند و دستاوردشان شخصی است. در این بازی، هر بازیکن استراتژی خود را انتخاب می‌کند که باعث می‌شود بیشترین دستاورد را داشته باشد.

بازی همکارانه: در این بازی پیش‌بینی‌شده است که بازیکنان برای بیشتر کردن دستاوردهایشان ائتلاف تشکیل دهند. بازی همکارانه با بازیکنان و یک تابع مشخصه به‌صورت $\langle N, C(S)\rangle$ نمایش داده می‌شود. اگر S زیرمجموعه‌ای از بازیکنان باشد، مقدار تابع مشخصه $C(S)$ که دستاورد بازیکنان ائتلاف S است، چیزی است که اعضای ائتلاف S می‌توانند مطمئن باشند که از همکاری با همدیگر به‌دست خواهند آورد. روشن است آنچه بازیکنان ائتلاف به دست می‌آورند باید به‌طور عادلانه‌ای میان آن‌ها تقسیم شود. فرض کنید $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ بردار جایزه بازیکنان باشد؛ یعنی x_i جایزه بازیکن iام است. بردار جایزه باید دو شرط زیر را داشته باشد:

الف) عقلانیت گروه $C(N)=\sum_{i=1}^{n} x_i$.

ب) عقلانیت شخصی $x_i \geq C(\{i\})$.

راه‌های مختلفی برای یافتن مقادیر بردار جایزه وجود دارد؛ مانند روش کرنل[10]، مجموعه ثابت[11]، هسته، نوکلئولوس و مقدار شپلی[۲۱]، که از بین آن‌ها راه‌حل مقدار شپلی قابل فهم‌تر و برای تقسیم جایزه بازی پرکاربردتر است. در راه‌حل مقدار شپلی مقدار جایزه بازیکن iام به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$x_i=\sum_{\forall S\subseteq N, i\notin S}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}(C(S)-C(S\cup\{i\})) \quad (3)$$

۳- روش پیشنهادی

در این روش ابتدا با استفاده از یک مدل مناسب تحلیل پوششی داده‌ها (CCR، BBC یا SBM) کارایی واحد تصمیم‌گیرنده محاسبه می‌شود و واحدها به دودسته کارا و ناکارا تقسیم می‌شوند:

$$E=\{DMU_j \mid \theta_j=1\}$$
$$N=\{DMU_j \mid \theta_j \prec 1\}$$

سپس تابع مشخصه برای یک ائتلاف به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

اگر ائتلاف S یک زیرمجموعه از واحدهای کارا باشد، آنگاه تابع مشخصه ائتلاف S که مقدار دستاورد اعضای ائتلاف S است به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(S)=\sum_{t\in N}\theta_t^S$$

$C(S)$ مجموع کارایی واحدهای ناکارا است، وقتی‌که مجموعه امکان تولید توسط همه واحدهای ناکارا و واحدهای عضو ائتلاف S ساخته‌شده باشد و θ_t^S به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\theta_t^S=\min\ \theta\\
&\sum_{j\in(N\cup S)}\lambda_j x_{ij}+s_i^-=\theta x_{it},\ i=1,...,m\\
St\quad &\sum_{j\in(N\cup S)}\lambda_j y_{rj}-s_r^+=y_{rt},\ r=1,...,s\\
&\lambda_j\geq 0, \qquad j=1,...,s \qquad (4)\\
&s_i^-\geq 0, \qquad i=1,...,m\\
&s_r^+\geq 0, \qquad r=1,...,s\\
&\theta\ free
\end{aligned}$$

[10] Kernel
[11] Stable Set

بعلاوه، دستاورد اعضای کارای ائتلاف S به همراه واحدهای کارای k $(k \notin S)$ به‌صورت زیر است:

$$C(S \cup \{k\}) = \sum_{t \in N} \theta_t^{S \cup \{k\}}$$

$\theta_t^{S \cup \{K\}}$ کارایی واحد ناکارای t است وقتی که مجموعه امکان تولید توسط واحدهای ناکارا و اعضای ائتلاف S و واحد کارای k ساخته‌شده است و به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\theta_t^{S \cup \{k\}} = \min \quad \theta \\
&\quad \sum_{j \in (N \cup S \cup \{k\})} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{it}, \quad i = 1,\dots,m \\
st &\quad \sum_{j \in (N \cup S \cup \{k\})} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rt}, \quad r = 1,\dots,s \\
&\quad \lambda_j \geq 0, \qquad j = 1,\dots,s \qquad (5) \\
&\quad s_i^- \geq 0, \qquad i = 1,\dots,m \\
&\quad s_r^+ \geq 0, \qquad r = 1,\dots,s \\
&\quad \theta \ free
\end{aligned}$$

اگر S ائتلاف کل باشد، آنگاه $C(S)$ مجموع کارایی همه واحدهای ناکارا است وقتی‌که مجموعه امکان تولید توسط همه واحدها ساخته‌شده است. اگر S ائتلاف تهی باشد، آنگاه $C(S)$ مجموع کارایی همه واحدهای ناکارا است وقتی‌که مجموعه امکان تولید توسط واحدهای ناکارا ساخته‌شده است.

در قدم بعدی تأثیر حاشیه‌ای ورود یک واحد کارا بر کارایی واحدهای ناکارا تعیین می‌شود. اختلاف بین $C(S)$ و $C(S \cup \{k\})$ تأثیر حاشیه‌ای واحد کارای k در ورود به ائتلاف S است؛ که $C(S)$ مجموع کارایی واحدهای ناکارا در مجموعه امکان تولید ساخته‌شده توسط واحدهای ناکارا و اعضای ائتلاف S و هم‌چنین $C(S \cup \{k\})$ مجموع کارایی واحدهای ناکارا در مجموعه امکان تولید ساخته شده توسط واحدهای ناکارا و اعضای ائتلاف S و واحد تصمیم گیرنده k است.

$$EP^S(k) = C(S) - C(S \cup \{k\})$$

از آنجا که با اضافه شدن یک واحد جدید به مجموعه امکان تولید، مجموعه امکان تولید گسترش می‌یابد یا بدون تغییر می‌ماند، تأثیر حاشیه‌ای همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. هر چه تأثیر حاشیه‌ای یک واحد کارا در یک ائتلاف بیشتر باشد، آن واحد کارا در آن ائتلاف تأثیرگذارتر است. درنهایت مقدار شپلی به‌عنوان یک‌راه حل بازی همکارانه برای رتبه‌بندی واحدهای کارا به‌کاربرده می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\varphi_k(C) \\
&= \sum_{\forall S \subseteq E, k \notin S} \frac{(s-1)!(p-s)!}{p!} (C(S) - C(S \cup \{k\})) \quad (6) \\
&= \sum_{\forall S \subseteq E, k \notin S} \frac{(s-1)!(p-s)!}{p!} (EP^S\{k\})
\end{aligned}$$

که E مجموعه همه واحدهای کارا، p تعداد همه واحدهای کارا، ائتلاف S زیرمجموعه‌ای از واحدهای کارا و s تعداد اعضای ائتلاف S است.

برای به دست آوردن $\varphi_k(C)$، میانگین تأثیر حاشیه‌ای واحد کارای DMU_k در تمام ائتلاف‌های ممکن از زیرمجموعه‌های واحدهای کارا محاسبه می‌شود. هر چه $\varphi(C)$ یک واحد کارا بیشتر باشد، رتبه بهتری دارد.

در بخش بعدی، ابتدا روش پیشنهادشده با استفاده از یک مثال ساده تشریح می‌شود. روش ارائه‌شده با مدل‌های دیگر مقایسه شده می‌شود و در آخر کاربردی بودن روش با استفاده از یک مثال واقعی تشریح می‌گردد.

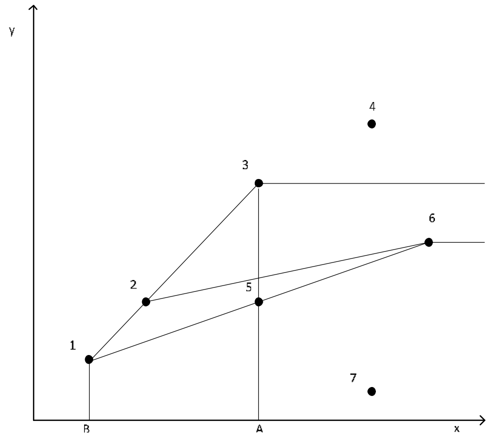
۴- مثال‌های عددی

در این بخش برای تشریح روش، مقایسه آن با روش‌های دیگر و کاربردی بودن آن مثال‌هایی مطرح می‌شود.

۴-۱: مثال تشریحی

هفت واحد تصمیم‌گیرنده که دارای یک ورودی و یک خروجی هستند (جدول ۱) را در نظر بگیرید.

بر اساس مدل BCC واحدهای ۱، ۲، ۳ و ۴ کارا هستند. این ۴ واحد کارا به‌عنوان بازیکنان بازی همکارانه برای رتبه‌بندی در نظر گرفته می‌شوند. مقدار شپلی هر واحد با استفاده از تأثیر حاشیه‌ای‌اش به دست می‌آید.



شکل (۱): مجموعه امکان تولیدهای ساخته‌شده توسط ائتلاف‌های مختلف

جدول(۱): مقادیر ورودی، خروجی و کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده

واحد تصمیم گیرنده	ورودی	خروجی	θ_{BCC}
DMU_1	1	1	1
DMU_2	2	2	1
DMU_3	4	4	1
DMU_4	6	5	1
DMU_5	4	2	0.50
DMU_6	7	3	0.43
DMU_7	6	0.5	0.17

جدول (۲):تأثیر حاشیه‌ای واحدهای کارا در ائتلاف‌های مختلف

ائتلاف	DMU_1	DMU_2	DMU_3	DMU_4
{}	0.5	0.8334	0.4287	0.3333
{1}	0	0.5	1.0174	0.9375
{2}	0.1666	0	0.5719	0.5238
{3}	1.1427	0.9761	0	0
{4}	1.1042	1.0239	0.0954	0
{1,2}	0	0	0.5714	0.5238
{1,3}	0	0	0	0
{1,4}	0	0.0863	0.1339	0
{2,3}	0.1666	0	0	0
{2,4}	0.1666	0	0.0476	0
{3,4}	1.1427	0.9761	0	0
{1,2,3}	0	0	0	0
{1,2,4}	0	0	0.0476	0
{1,3,4}	0	0	0	0
{2,3,4}	0.1666	0	0	0

در اولین ستون جدول ۲ همه ائتلاف‌های ممکن از واحدهای کارا آورده شده است. در ستون دوم جدول ۲ تأثیر حاشیه‌ای DMU_1 در ائتلاف‌های مختلف دیده می‌شود؛ به‌این‌ترتیب که $C(S)$ یعنی مجموع کارایی واحدهای ناکارا با توجه به مجموعه امکان تولید ساخته‌شده توسط واحدهای ناکارا و واحدهای کارای ائتلاف S و هم‌چنین $C(S \cup \{1\})$ یعنی مجموع کارایی واحدهای ناکارا با توجه به مجموعه امکان تولید ساخته‌شده توسط واحدهای ناکارا، واحدهای کارای ائتلاف S و DMU_1 محاسبه می‌شود. اختلاف این دو مقدار، تأثیر حاشیه‌ای DMU_1 در اضافه شدن به ائتلاف S است. ستون سوم، چهارم و پنجم جدول ۲ به ترتیب تأثیر حاشیه‌ای DMU_2، DMU_3 و DMU_4 در ائتلاف‌های مختلف را نشان می‌دهد.

در ادامه تأثیر حاشیه‌ای DMU_3 در ائتلاف‌های مختلف (ستون چهارم جدول ۲) تشریح می‌شود:

اگر DMU_3 به ائتلاف تهی $S=\{\}$ اضافه شود: در مجموعه امکان تولید نتیجه شده که توسط واحدهای ناکارا و $S=\{\}$ ساخته‌شده است و در شکل ۱ خطی است که از نقطه A، DMU_5 و DMU_6 عبور می‌کند و به سمت راست ادامه می‌یابد، DMU_5، DMU_6 کارا هستند و DMU_7 با مقدار کارایی $\theta_7=0.6667$ ناکارا است. با اضافه شدن DMU_3 به ائتلاف تهی، در مجموعه امکان تولید نتیجه شده که توسط واحدهای ناکارا، $S=\{\}$ و DMU_3 ساخته‌شده است و در شکل ۱ خطی است که از نقطه A و DMU_3 عبور می‌کند و به سمت راست ادامه می‌یابد، DMU_5 کارا می‌ماند، DMU_6 با مقدار کارایی $\theta_6=0.5714$ ناکارا می‌شود و مقدار کارایی DMU_7 به $\theta_7=0.6667$ تغییر می‌یابد؛ بنابراین تأثیر حاشیه‌ای DMU_3 به ائتلاف تهی به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&EP^{\{\}}(3)\\
&=(1+1+0.6667)-(1+0.5714+0.6666)\\
&=0.4287
\end{aligned}
$$

اگر DMU_3 به ائتلاف تهی $S=\{1\}$ اضافه شود: در مجموعه امکان تولید نتیجه شده که توسط واحدهای ناکارا و $S=\{1\}$ ساخته‌شده است و در شکل ۱ خطی است که از نقطه B، DMU_1، DMU_5 و DMU_6 عبور می‌کند و به سمت راست ادامه می‌یابد، DMU_5 و DMU_6 کارا هستند و DMU_7 با مقدار کارایی $\theta_7=0.1667$ ناکارا است. با اضافه شدن DMU_3 به ائتلاف $S=\{1\}$ تهی، در مجموعه امکان تولید نتیجه شده که توسط واحدهای ناکارا، $S=\{1\}$ و DMU_3 ساخته شده است و در شکل ۱ خطی است که از نقطه B، DMU_1، DMU_2 و DMU_3 عبور می‌کند و به سمت راست ادامه می‌یابد، DMU_5 با مقدار کارایی $\theta_5=0.5000$ و DMU_6 با مقدار کارایی $\theta_6=0.4286$ ناکارا می‌شود و مقدار کارایی DMU_7 مقدار $\theta_7=0.1667$ می‌ماند؛ بنابراین تأثیر حاشیه‌ای DMU_3 به ائتلاف $S=\{1\}$ به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&EP^{\{1\}}(3)\\
&=(1+1+0.1667)-(0.5000+0.4286+0.1667)\\
&=1.0714
\end{aligned}
$$

اگر DMU_3 به ائتلاف تهی $S=\{1,2\}$ اضافه شود: در مجموعه امکان تولید نتیجه شده که توسط واحدهای ناکارا و $S=\{1,2\}$ ساخته‌شده است و در شکل ۱ خطی است که از نقطه B، DMU_1، DMU_2 و DMU_6 عبور می‌کند و به سمت راست ادامه می‌یابد، DMU_6 کارا است، DMU_5 با مقدار کارایی $\theta_5=0.5000$ و DMU_7 با مقدار کارایی $\theta_7=0.1667$ ناکارا هستند. با اضافه شدن DMU_3 به ائتلاف $S=\{1,2\}$، در مجموعه امکان تولید نتیجه شده که توسط واحدهای ناکارا، ائتلاف $S=\{1,2\}$ و DMU_3 ساخته شده است و در شکل ۱ خطی است که از نقطه B، DMU_1، DMU_2 و DMU_3 عبور می‌کند و به سمت راست ادامه می‌یابد، کارایی DMU_5 به مقدار

$\theta_5 = 0.5000$ و کارایی DMU_7 مقدار $\theta_7 = 0.1667$ باقی می‌ماند و DMU_6 با مقدار کارایی $\theta_6 = 0.4286$ ناکارا می‌شود؛ بنابراین تأثیر حاشیه‌ای DMU_3 به ائتلاف $S = \{1,2\}$ به‌صورت زیر است:

$$EP^{\{1,2\}}(3) = (0.5+1+0.1667)-(0.5000+0.4286+0.1667) = 0.5714$$

میانگین تأثیر حاشیه‌ای هرکدام از واحدهای کارا برابر با مقدار شپلی آن‌هاست (ستون دوم جدول ۳) که با استفاده از آن واحدها رتبه‌بندی شده‌اند (ستون سوم جدول ۳). این رتبه‌بندی می‌تواند به این صورت تفسیر شود که چون واحدهای ۱ و ۲ مرجع واحدهای بیشتری هستند، رتبه بهتری دارند.

۴-۲: مثال واقعی

برای اثبات کاربردی بودن روش ارائه‌شده، در جدول ۴ داده‌های ۲۰ شعبه یک بانک ایرانی که در مطالعه امیر تیموری و همکاران [۲۲] از آن استفاده‌شده، آورده شده است.این داده‌ها شامل سه ورودی (تعداد کارمندان، تعداد کامپیوترها و فضای شعبه‌ها) و سه خروجی (مقدار سپرده‌ها، مقدار وام‌ها و مقدار شارژ) است. بعلاوه کارایی واحدها که با استفاده از مدل CCR با ماهیت ورودی به‌دست‌آمده است در ستون هشتم جدول ۴ آورده شده است. واحدهای ۱، ۴، ۷، ۱۲، ۱۵، ۱۷ و ۲۰ کارا هستند. مقدار شپلی این واحدها در سطر دوم و رتبه آن‌ها در سطر سوم جدول ۵ آورده شده است.

جدول (۳): مقدار شپلی و رتبه واحدهای کارا

رتبه	مقدار شپلی	واحد تصمیم گیرنده
1	0.3704	DMU_1
2	0.2930	DMU_2
3	0.1942	DMU_3
4	0.1545	DMU_4

جدول(۴): داده‌های ۲۰ شعبه بانک

DMU	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	θ_{CCR}
1	0.950	0.700	0.155	0.190	0.521	0.293	1.00
2	0.796	0.600	1.000	0.227	0.627	0.462	0.90
3	0.798	0.750	0.513	0.228	0.970	0.261	0.99
4	0.865	0.550	0.210	0.193	0.632	1.000	1.00
5	0.815	0.850	0.268	0.233	0.722	0.246	0.90
6	0.842	0.650	0.500	0.207	0.603	0.569	0.75
7	0.719	0.600	0.350	0.182	0.900	0.716	1.00
8	0.785	0.750	0.120	0.125	0.234	0.298	0.80
9	0.476	0.600	0.135	0.080	0.364	0.244	0.79
10	0.678	0.550	0.510	0.082	0.184	0.049	0.29
11	0.711	1.000	0.305	0.212	0.318	0.403	0.60
12	0.811	0.650	0.255	0.123	0.923	0.628	1.00
13	0.659	0.850	0.340	0.176	0.645	0.261	0.82
14	0.976	0.800	0.540	0.144	0.514	0.243	0.47
15	0.685	0.950	0.450	1.000	0.262	0.098	1.00
16	0.613	0.900	0.525	0.115	0.402	0.464	0.64
17	1.000	0.600	0.205	0.090	1.000	0.161	1.00
18	0.634	0.650	0.235	0.059	0.349	0.068	0.47
19	0.372	0.700	0.238	0.039	0.190	0.111	0.41
20	0.583	0.550	0.500	0.110	0.615	0.764	1.00

جدول(۵): مقدار شپلی و رتبه واحدهای کارا

DMU	1	4	7	12	15	17	20
مقدار شپلی	0.023	0.250	0.214	0.128	0.461	0.546	0.085
رتبه	7	3	4	5	2	1	6

در بخش بعدی روش ارائه‌شده با روش رتبه‌بندی برزگری‌نژاد و همکاران [۲۳] مقایسه می‌شود.

۴-۳: مثال مقایسه‌ای

مجموعه داده‌هایی که از مقاله جهانشهاهلو و همکاران [۲۴] برگرفته شده و شامل ۷ واحد تصمیم گیرنده با دو ورودی و دو خروجی است را در نظر بگیرید. مقدار کارایی CCR، رتبه‌بندی AP و رتبه‌بندی انجام‌شده توسط برزگری‌نژاد و همکاران [۲۳] در ستون‌های ۶، ۷ و ۸ جدول ۶ آورده شده است. مقادیر شپلی واحدهای کارا و رتبه‌بندی انجام‌شده با روش جدید ارائه شده در ستون نهم جدول نهم جدول ۶ ارائه شده است. همان‌طور که دیده می‌شود رتبه‌بندی عادلانه انجام‌شده، با اندکی اختلاف تقریباً مشابهت‌های بسیاری با روش‌های مذکور دارد. تفاوت در رتبه واحدهای A و C است که همانطور که امتیاز کارایی CCR بیان می‌کند کسب رتبه سوم توسط واحد C که کارایی آن بسیار نزدیک یک است، عادلانه‌تر است.

۵-نتیجه‌گیری

رتبه‌بندی واحدهای کارا یکی از مطالب چالش برانگیز در تحلیل پوششی داده‌ها است. مطالعه حاضر یک روش جدید برای رتبه‌بندی واحدهای کارا بر اساس نظریه بازی همکارانه ارائه کرده است؛ هر واحد کارا به‌عنوان بازیکن یک بازی همکارانه در نظر گرفته‌شده است که زیرمجموعه از آن‌ها یک ائتلاف معرفی می‌شود، با تعریف یک تابع مشخصه برای یک ائتلاف که به‌صورت مجموع کارایی واحدهای ناکارا در مجموعه امکان تولیدی که توسط واحدهای ناکارا و اعضای آن ائتلاف ساخته‌شده است، تأثیر حاشیه‌ای هر واحد کارا در ائتلاف‌های مختلف به دست آورده می‌شود و با استفاده از آن مقدار شپلی به‌عنوان یک‌راه حل بازی همکارانه حاصل می‌شود. هر چه مقدار شپلی واحد کارا بیشتر باشد، آن واحد رتبه بهتری خواهد داشت.

جدول (۶): مقادیر ورودی و خروجی و رتبه‌بندی با روش AP، برزگری نژاد و همکاران[۲۳]و روش ارائه‌شده جدید

DMU	ورودی ۱	ورودی ۲	خروجی ۱	خروجی ۲	کارایی CCR	رتبه‌بندی AP	رتبه‌بندی برزگری نژاد و همکاران	مقدار شپلی واحدهای کارا و رتبه‌بندی ارائه‌شده
A	۲	۳	۴	۵	۰,۹۲۵۴ (۴)	۰,۹۲۸۶ (۴)	۰,۸۶۶۷ (۳)	(۴)
B	۳	۴	۵	۶	۰,۷۶۰۲ (۵)	۰,۷۶۱۹ (۵)	۰,۷۱۷۳(۵)	(۵)
C	۲	۲	۴	۴	۱,۰۰۰۰(۳)	۱,۰۰۰۰ (۳)	۰,۸۵۷۱ (۴)	۰,۰۵۲۸ (۳)
D	۲	۳	۵	۴	۱,۰۰۰۰ (۱)	۱,۲۵۰۰ (۲)	۰,۹۳۳۳ (۲)	۰,۱۳۵۷ (۲)
E	۳	۴	۴	۵	۰,۶۱۷۴ (۷)	۰,۶۱۰۰ (۷)	۰,۵۹۰۹(۷)	(۷)
F	۲	۲	۴	۶	۱,۰۰۰۰ (۱)	۱,۵۰۰۰ (۱)	۱,۰۰۰۰(۱)	۰۱۴۷۱ (۱)
G	۳	۴	۵	۴	۰,۷۰۹۳ (۶)	۰,۷۱۴۳ (۶)	۰,۶۳۶۴ (۶)	(۶)

کاربردی بودن روش با ذکر مثال بررسی‌شده است.
در روش ارائه‌شده برخلاف بسیاری از روش‌های رتبه‌بندی واحدهای ناکارا نیز در رتبه‌بندی تأثیر گذار هستند و همچنین امکان رتبه‌بندی واحدهای کارای غیر رأسی نیز وجود دارد. این روش برای هر شرایط بازده به مقیاس شدنی است و برای ارزیابی کارایی‌ها هر مدل تحلیل پوششی داده‌ها قابل استفاده است.
در شرایطی که تعداد واحدهای تصمیم‌گیرنده بسیار زیاد باشند این روش بسیار وقت‌گیر خواهد بود که در این شرایط می‌توان از الگوریتم‌های فرا ابتکاری استفاده کرد.

فهرست منابع

[1] A. Charnes, W.W. Cooper and E. Rhodes. Measuring the efficiency of decision making units. European journal of operational research 2(6): 429-444 (1978).

[2] R.D. Banker, A. Charnes and W.W. Cooper. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management science 30(9): 1078-1092 (1984).

[3] K. Tone. A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. European journal of operational research. 130(3) 498-509 (2001).

[4] F. Hosseinzadeh Lotfi, G.R. Jahanshahloo, M. Khodabakhshi, M. Rostamy-Malkhlifeh, Z. Moghaddas, and M. Vaez-Ghasemi. A review of ranking models in data envelopment analysis. Journal of Applied Mathematics. 2013 (2013).

[5] A. Aldamak, S. Zolfaghari. Review of efficiency ranking methods in data envelopment analysis. Measurement 106: 161-172 (2017).

[6] T.R. Sexton, R.H. Silkman and A.J. Hogan. Data envelopment analysis: Critique and extensions. New Directions for Program Evaluation (32): 73-105 (1986).

[7] Z. Sinuany-Stern, A. Mehrez and A. Barboy. Academic departments efficiency via DEA. Computers & Operations Research. 21(5): 543-556 (1994).

[8] G.R. Jahanshahloo, H.V. Junior, F.H. Lotfi and D. Akbarian. A new DEA ranking system based on changing the reference set. European Journal of Operational Research. 181(1): 331-337 (2007).

[9] M. Rezaeiani, A. Foroughi. Ranking efficient decision making units in data envelopment analysis based on reference frontier share. European Journal of Operational Research. 264(2): 665-674 (2018).

[10] P. Andersen, N.C. Petersen. A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. Management science. 39(10): 1261-1264 (1993).

[11] K. Nakabayashi, K. Tone. Egoist's dilemma: A DEA game. Omega. 34, 135–148 (2006).

[12] S. Lozano. DEA production games. Eur. J. Oper. Res. 231, 405–413(2013).

[13] C.Y. Lee. Mixed-Strategy Nash Equilibrium in Data Envelopment Analysis. European Journal of Operational Research. 266(3): 1013-24(2018).

[14] H. Omrani, K. Shafaat and A. Alizadeh. Integrated data envelopment analysis and cooperative game for evaluating energy efficiency of transportation sector: a case of Iran. Annals of Operations Research. 274(1-2): 471-499 (2019).

[15] H. Omrani, M. Amini, M. Babaei and K. Shafaat. Use Shapley value for increasing power distinguish of data envelopment analysis model: An application for estimating environmental efficiency of industrial producers in Iran. Energy & Environment. 31(4):656-675 (2020).

[16] J. Doyle, R. Green. Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivations, meanings and uses. Journal of the operational research society 45(5): 567-578 (1994).

[17] W. Jie, L. Liang and Y.c. ZHA. Determination of the weights of ultimate

cross efficiency based on the solution of nucleolus in cooperative game. Systems Engineering-Theory & Practice 28(5): 92-97 (2008).

[18] J. Wu, L. Liang and Y.C. Zha. Determination of the weights of ultimate cross efficiency based on the solution of nucleolus. Xitong Gongcheng Lilun yu Shijian/System Eng. Theory Pract. 28: 92–97 (2008)

[19] J. Wu, L. Liang, F. Yang and H Yan. Bargaining game model in the evaluation of decision making units. Expert Systems with Applications 36(3): 4357-4362 (2009).

[20] Y. Li, J. Xie, M. Wang and L. Liang. Super efficiency evaluation using a common platform on a cooperative game. European Journal of Operational Research 255(3): 884-892 (2016).

[21] T.S.H. Driessen. Cooperative games, solutions and applications. Vol. 3: Springer Science & Business Media (2013).

[22] A. Amirteimoori and S. Kordrostami. Efficient surfaces and an efficiency index in DEA: a constant returns to scale. Applied Mathematics and Computation 163(2): 683-691 (2005).

[23] A. Barzegarinegad, G. R.Jahanshahloo and M. Rostamy-Malkhalifeh, A full ranking for decision making units using ideal and anti-ideal points in DEA. The Scientific World Journal,(2014).

[24] G.R. Jahanshahloo, F. Hosseinzadeh Lotfi, V. Rezaie and M. Khanmohammadi, Ranking DMUs by ideal points with interval data in DEA, Applied Mathematical Modelling, 35(1), 218–229, (2011).