

## عملگر $L_1$ و نگاشت گاوس رویه‌های درجه دوم

اکرم محمدپوری<sup>۱\*</sup>، لیلا کفیلی<sup>۲</sup>، رحیم حسین اوغلی<sup>۳</sup>

(۲۰۲۰) گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۱۰/۰۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۴/۱۵

### چکیده

چندجمله‌ای‌های درجه دوم بر حسب متغیرهای  $x, y, z$  یک رویه درجه دوم را مشخص می‌کند. در این مقاله با استفاده از عملگر  $L_1$  (عملگر چنگ-یاو) که بر تابع‌های هموار روی رویه‌ها اثر می‌کند به مطالعه نگاشت گاوس رویه‌های درجه دوم در فضای اقلیدسی سه بعدی  $\mathcal{R}^3$  می‌پردازیم. فرض کنید  $f$  یک تابع هموار بر رویه  $M$  باشد، آنگاه  $L_1 f = \text{tr}(P_1 \circ \nabla^2 f)$  که  $P_1$  اولین تبدیل نیوتن وابسته به دومین فرم اساسی رویه و  $\nabla^2 f$  عملگر خودالحاق و هم‌ارزی متری با هسیان  $f$  است،  $G = (G_1, G_2, G_3)$  و  $L_1 G = (L_1 G_1, L_1 G_2, L_1 G_3)$ . در این مقاله نشان می‌دهیم تنها رویه‌های درجه دوم با نگاشت گاوس  $G$  صادق در شرط  $L_1 G = AG$  که در آن  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  است، کره‌ها و رویه‌های درجه دوم تخت هستند. بعلاوه کره‌ها تنها رویه‌های درجه دوم فشرده با نگاشت گاوس  $G$  صادق در شرط  $L_1 G = AG$  برای یک ماتریس  $3 \times 3$  مانند  $A$  هستند.

**واژه‌های کلیدی:** رویه‌های درجه دوم، رویه‌های خطی، عملگر خطی شده  $L_1$ ، نگاشت گاوس.

## ۱. مقدمه

مفهوم نگاشت گاوس متناهی نوع در مطالعه هندسه ابر رویه‌ها نقش مهم و اساسی دارد (مرجع‌های [۳،۲،۱] را ببینید). ابر رویه اقلیدسی جهت‌پذیر  $M$ ، نگاشت گاوس  $G$ ،  $-1$  نوع دارد، اگر  $G$  در شرط  $\Delta G = \lambda(G + C)$ ، برای یک  $\lambda \in \mathcal{R}$  صدق کند. در سال ۱۹۸۷ چن و پیچینی به مطالعه ابر رویه‌های فشرده با نگاشت گاوس متناهی نوع پرداختند. آنها نشان دادند که ابر رویه فشرده  $M$  در  $\mathcal{R}^{n+1}$  نگاشت گاوس  $G$ ،  $-1$  نوع دارد اگر و تنها اگر  $M$  یک ابر کره باشد. همچنین ابر رویه‌های صادق در شرط  $\Delta G = \lambda G$ ،  $(C = 0)$ ، یعنی حالتی که نگاشت گاوس  $G$  یک تابع ویژه لاپلاسیان است، را در برخی حالت‌های خاص رده‌بندی کردند [۴]. با تعمیم این معادله، دیلن و دیگران ثابت کردند تنها رویه‌های دوار  $\mathcal{R}^3$  صادق در شرط  $\Delta G = AG$ ،  $A \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$  صفحه‌ها، کره‌ها و استوانه‌های دوارند [۵]. همچنین بایکوسیسی و بلیر ثابت کردند تنها رویه‌های خطی  $\mathcal{R}^3$  صادق در شرط بالا، صفحه‌ها و استوانه‌های مدورند [۲]. در این راستا کیم، ابر رویه‌های درجه دوم در فضای اقلیدسی  $\mathcal{R}^{n+1}$  را مطالعه و قضیه زیر را ثابت کرد [۶].

**قضیه ۱ [۶]:** تنها ابر رویه‌های درجه دوم در فضای اقلیدسی  $\mathcal{R}^{n+1}$  با نگاشت گاوس  $G$  که در شرط زیر صدق می‌کند، ابر صفحه‌ها، ابر کره‌ها و استوانه‌های مدورند.

$$\Delta G = AG, \quad A \in \mathcal{R}^{(n+1) \times (n+1)} \quad (1)$$

چنانچه می‌دانیم عملگر لاپلاس ابر رویه  $M$ ، در فضای اقلیدسی  $\mathcal{R}^{n+1}$ ، یک عملگر دیفرانسیل‌پذیر خطی مرتبه دوم است که بخش خطی تغییر اول خمیدگی میانگین برای تغییرهای نرمال ابر رویه است. با این دیدگاه، عملگر لاپلاس، عضو اول مجموعه‌ای از  $n$  عملگر  $L_0 = \Delta, L_1, \dots, L_{n-1}$  است که در آن  $L_r$ ، عملگر خطی شده تغییر اول  $(r+1)$ -امین خمیدگی میانگین برای تغییرات نرمال ابر رویه است [۷]،  $L_1 = \square$  عملگر چنگ یا معرفی شده در مرجع [۸] است. این عملگرها برای هر  $f \in C^\infty(M)$  با رابطه

## ۲. مفهوم‌های پایه‌ای

در این بخش ابتدا به معرفی و مطالعه خواص عملگر  $L_r$  پرداخته و در ادامه ابر رویه‌های درجه دوم را معرفی می‌کنیم. در پایان نیز مثال‌هایی از ابر رویه‌های اقلیدسی  $n$  بعدی که در شرط  $L_r G = AG$ ،  $A \in \mathcal{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  صدق می‌کند، ارائه می‌دهیم [۱۴، ۱۳].

ابرویه فرو برده شده  $x: M^n \rightarrow \mathcal{R}^{n+1}$  را در فضای اقلیدسی با نگاشت گاوس  $G$  در نظر بگیرید. فرض کنید  $\nabla^0$  و  $\nabla$  به ترتیب مشتق‌های لوی سویتا روی  $\mathcal{R}^{n+1}$  و

$$L_r(f) = \text{tr}(P_r \circ \nabla^2 f)$$

تبدیل نیوتن وابسته به دومین فرم اساسی ابر رویه  $\nabla^2 f$  هسیان  $f$  است. پس از این دیدگاه، طبیعی و جالب به نظر می‌رسد اگر مفهوم نگاشت گاوس متناهی نوع برای ابر رویه‌های اقلیدسی را با جایگذاری  $L_r$  به جای  $\Delta$  گسترش دهیم و به مطالعه و رده‌بندی چنین ابر رویه‌هایی پردازیم. در این راستا محققان مختلفی رویه‌های اقلیدسی صادق در شرط  $L_1 G = f(G + C)$  را مطالعه و با اعمال برخی شرایط هندسی چنین رویه‌هایی را رده‌بندی کردند [۱۰، ۹]. به ویژه اثبات شد که تنها رویه‌های دوار صادق در شرط  $L_1 G = AG$ ،  $A \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$ ، صفحه‌ها، مخروط‌های مدور، استوانه‌های مدور و کره‌ها هستند [۹]. با تعمیم این نتایج به حالت ابر رویه‌ها نویسنده اول در مراجع [۱۲، ۱۱] به بررسی و رده‌بندی برخی از ابر رویه‌های صادق در شرط  $L_r G = f(G + C)$  پرداخته است. در همین راستا در این مقاله نیز به تعمیم طبیعی قضیه برای رویه‌های درجه دوم با جایگذاری عملگر  $L_1$  به جای  $\Delta$  می‌پردازیم و هم‌همی رویه‌های درجه دوم که نگاشت گاوس  $G$  آنها در شرط زیر صدق می‌کند، رده‌بندی خواهیم کرد

$$L_1 G = AG, \quad A \in \mathcal{R}^{(3) \times (3)}. \quad (2)$$

این مقاله ادامه کارهایی است که در مرجع‌های [۱۳، ۱۲] اثبات شده‌اند. در مرجع [۱۳] نویسنده اول و کاشانی به رده‌بندی ابر رویه‌های درجه دوم  $L_r$  متناهی نوع پرداخته‌اند.

تبدیل‌های نیوتن کلاسیک  $P_r: \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ ، وابسته به عملگر شکلی  $S$ ، برای هر  $r = 1, \dots, n$  بصورت استقرائی چنین تعریف می‌شود.

$$P_0 = I, \quad P_r = \binom{n}{r} H_r I - \text{So}P_{r-1},$$

که  $I$  تبدیل همانی در  $\mathcal{X}(M)$  را نشان می‌دهد. معادلاً داریم:

$$P_r = \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{n}{r-j} H_{r-j} S^j. \quad (۴)$$

از اینرو با استفاده از قضیه کیلی-همیلتن که بیان می‌کند هر عملگری توسط چند جمله‌ای مشخصه اش پوچ می‌شود، نتیجه می‌گیریم که  $P_n = 0$  برای هر  $p \in M$ ،  $P_r(p)$  عملگر خطی خود الحاق است که با  $S(p)$  جابجا می‌شود. در واقع  $S(p)$  و  $P_r(p)$  همزمان قطری شدنی هستند. اگر  $\{e_1, \dots, e_n\}$  بردارهای ویژه  $S(p)$  به ترتیب متناظر با مقادیر ویژه  $\lambda_1(p), \dots, \lambda_n(p)$  باشد، آنگاه آنها همچنین بردارهای ویژه  $P_r(p)$  متناظر با مقادیر ویژه زیر می‌باشند.

$$\mu_{i,r}(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_r, i_j \neq i} \lambda_{i_1}(p) \dots \lambda_{i_r}(p), \quad (۵)$$

که در آن  $1 \leq i \leq n$ .

عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه دوم  $L_r: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ ، وابسته به تبدیل نیوتن  $P_r$  چنین تعریف می‌شود

$$L_r(f) = \text{tr}(P_r \circ \nabla^2 f),$$

که  $\nabla^2 f: \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ ، عملگر خطی خود الحاق است که با هسیان  $f$  هم ارز متریکی است و چنین تعریف می‌شود

$$\langle \nabla^2 f(X), Y \rangle = \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle,$$

که در آن  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  و  $\nabla f$  گرادیان  $f$  است. فرض کنید  $\{E_1, \dots, E_n\}$  قاب متعامد موضعی بر  $M$  باشد، آنگاه داریم

$$P_r(\nabla f) = \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{E_i} P_r)(\nabla f), E_i \rangle$$

$M$  باشند. بنابراین فرمول گاوس و وینگاتن ابررویه‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \nabla_X^0 Y &= \nabla_X Y + \langle SX, Y \rangle G, \\ SX &= \nabla_X^0 G, \end{aligned}$$

که  $S: \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  و  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  عملگر شکلی  $M$  نسبت به نگاشت گاوس  $G$  است.  $S$  یک عملگر خطی خود الحاق روی صفحه مماس  $T_p M$  تعریف می‌کند و مقادیر ویژه وابسته به این عملگر،  $\kappa_1(p), \dots, \kappa_n(p)$  خمیدگی‌های اصلی ابررویه نامیده می‌شود. متناظر با عملگر شکلی،  $n$  پایای جبری به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$S_r(P) = \sigma_r(\kappa_1(p), \dots, \kappa_n(p)), \quad 1 \leq r \leq n,$$

که  $\sigma_r: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  تابع متقارن مقدماتی در  $\mathcal{R}^n$  است که با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_r(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_r} x_{i_1} \dots x_{i_r}.$$

چند جمله‌ای مشخصه  $S$  را می‌توان به صورت جملاتی بر حسب  $S_r$  نوشت،

$$Q_S(t) = \det(tI - S) = \sum_{r=0}^n (-1)^r S_r t^{n-r}, \quad (۳)$$

که  $S_0 = 1$  تعریف شده است.  $-r$  امین خمیدگی اصلی  $H_r$  از ابررویه به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\binom{n}{r} H_r = S_r, \quad 0 \leq r \leq n.$$

به ویژه برای  $r = 1$  و  $r = n$  به ترتیب داریم

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \kappa_i = \frac{1}{n} \text{tr}(S) = H, \\ H_n &= \kappa_1 \dots \kappa_n. \end{aligned}$$

$H_1$  همان خمیدگی میانگین  $M$  است و  $H_n$  خمیدگی گاوس-کرونکر  $M$  نامیده می‌شود. ابررویه با  $(-r+1)$ -امین خمیدگی میانگین صفر در  $\mathcal{R}^{n+1}$ ،  $r$ -مینیمال نامیده می‌شود.

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} X_i X_k + \sum_{i=1}^n b_i X_i + c = 0, \quad (11)$$

که در آن  $a_{ik}, b_i, c$  اعداد حقیقی‌اند.

بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم ماتریس  $\mathcal{A} = (a_{ik})$  متقارن و ناصفر است. با تغییر مختصات می‌توان فرض کرد (۱۱) به صورت یکی از فرم‌های استاندارد زیر است.

$$(I) \quad \sum_{i=1}^s a_i X_i^2 + 2X_{s+1} = 0,$$

$$(II) \quad \sum_{i=1}^s a_i X_i^2 + 1 = 0,$$

$$(III) \quad \sum_{i=1}^s a_i X_i^2 = 0,$$

که  $\{a_1, \dots, a_s, 0, \dots, 0\}$  (با  $n-s$  صفر) متناظر با

مقدارهای ویژه ماتریس  $\mathcal{A}$   $1 \leq s \leq n$  است. در (II) و (III) وقتی  $s = n$  و در (I) وقتی  $s+1 = n$  مبر رویه درجه دوم  $(n-1)$ - بعدی سره نامیده می‌شود، در بقیه حالت‌ها  $M$  ابر رویه استوانه‌ای درجه دوم نامیده می‌شود. ابر رویه درجه دوم،  $(n-1)$ - بعدی سره از نوع (III)، ابر رویه مخروطی جبری نامیده می‌شود. در حالت‌های (II) و (III) ابر رویه استوانه‌ای درجه دوم، حاصلضرب زیر فضای خطی  $(n-s)$ - بعدی و ابر رویه درجه دوم سره  $(s-1)$ - بعدی است. در حالت (I)، ابر رویه استوانه‌ای درجه دوم، حاصلضرب زیر فضای خطی  $(n-s-1)$ - بعدی و ابر رویه درجه دوم سره  $s$ - بعدی است.

فرض کنید  $M$  یک ابر رویه اقلیدسی در  $\mathcal{R}^{n+1}$  باشد.

پرمایش زیر را برای  $M$  در نظر بگیرید

$$X(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_n, v),$$

که  $\partial_i v = \frac{\partial v}{\partial u_i}$  را با  $v_i$  نشان

می‌دهیم. آنگاه

$$g_{ij} = \delta_{ij} + v_i v_j, \quad g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{v_i v_j}{g}, \quad (12)$$

$$g = \det(g_{ij}) = 1 + \sum_{i=1}^n v_i^2, \quad (13)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla_{E_i} \nabla f), E_i \rangle = \langle \operatorname{div} P_r, \nabla f \rangle + L_r(f), \quad (6)$$

که  $\operatorname{div}$  عملگر دیورژانس بر  $M$  است. چون

$$\operatorname{div} P_r = 0, \quad (6) \text{ نتیجه می‌گیریم} \\ L_r(f) = (\operatorname{div} P_r)(\nabla f). \quad (7)$$

با استفاده از (۷) می‌توان فرمول صریحی در دستگاه مختصات موضعی برای  $L_r$  بیان کرد. در دستگاه مختصات موضعی،  $\operatorname{div} X$  برای میدان برداری  $X$  بر  $M$  چنین بیان می‌شود

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_i \partial_i (\sqrt{|g|} X^i), \quad (8)$$

که  $X_i$  ها مولفه‌های میدان برداری  $X$  و  $|g| = |\det g^{ij}|$  قدر مطلق دترمینان مولفه‌های تانسور متریک است.

با استفاده از (۷)، (۸) و تعریف گرادینان فرمول زیر بدست می‌آید

$$L_r(f) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j,k} \partial_i (\sqrt{|g|} g^{jk} P_{ri,k} \partial_j f), \quad (9)$$

که

$$P_i \partial_i = \sum_k P_{ri,k} \partial_k.$$

در سراسر مقاله برای محاسبه عملگر  $L_r$  از فرمول (۹) استفاده می‌کنیم.

**لم ۲:** [۱۴] فرض کنید  $X: M^n \rightarrow \mathcal{R}^{n+1}$  ابر رویه فرو برده شده جهت پذیر هموار بتوی فضای اقلیدسی  $\mathcal{R}^{n+1}$ ، با نگاشت گاوس  $G$  باشد. آنگاه نگاشت گاوس  $G$  از  $M$  در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$L_r G = \binom{n}{r+1} \nabla H_{r+1} + \binom{n}{r+1} (nH_1 H_{r+1} - (n-r-1)H_{r+2}) G \quad (10)$$

## ۲.۱. ابر رویه‌های درجه دوم

**تعریف ۳:** زیر مجموعه  $M$  از فضای اقلیدسی  $n$ -بعدی  $\mathcal{R}^n$  متشکل از نقاط  $(x_1, \dots, x_n)$  ابر رویه درجه دوم نامیده می‌شود، هرگاه  $M$  در رابطه زیر صدق کند،

**ج) استوانه مدور [۱۴]:** فرض کنید  $M$  یک استوانه مدور به صورت  $S^m(a) \times \mathcal{R}^{n-m}$  باشد، که شعاع  $a$  و  $1 \leq m \leq n-1$  با توجه به مرجع [۱۴] و با استفاده از رابطه (۱۰) نتیجه می‌گیریم  $M$  در شرط (۲) به صورت زیر صدق می‌کند.

$$\text{برای } r+1 \leq m \\ L_r G = -(n-m+r+1) \binom{m}{r+1} \frac{1}{a^{r+2}} G,$$

در نتیجه

$$A = -(n-m+r+1) \binom{m}{r+1} \frac{1}{a^{r+2}} I.$$

و برای  $r+1 \geq m+1$ ،  $L_r G = 0$  و در نتیجه  $A = 0$

**د) ابرویه  $n$ -مینیمال [۱۴]:** فرض کنید  $M^n$  یک ابرویه  $n$ -مینیمال در  $\mathcal{R}^{n+1}$  باشد، با توجه به رابطه (۱۰) نتیجه می‌گیریم  $L_{n-1} G = 0$ ، بنابراین  $M$  در شرط (۲) با در نظر گرفتن  $A = 0$  صدق می‌کند، به ویژه مخروط مدور در  $\mathcal{R}^3$  در شرط  $L_1 G = 0$  صدق می‌کند. چون خمیدگی گاوس آن،  $H_2$  برابر صفر است.

### ۳. قضیه رده‌بندی

فرض کنید  $M$  رویه درجه دوم باشد، در اینصورت  $M$  یا رویه درجه دوم سره از نوع  $I$  یا رویه درجه دوم سره از نوع  $II$  و یا رویه درجه دوم خطی است. رویه‌های درجه دوم خطی در مرجع [۱۵] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند و ثابت شده است که تنها رویه‌های خطی صادق در شرط  $L_1 G = AG$ ،  $A \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$ ، رویه‌های تخت‌اند. بنابراین کافیت برای رده‌بندی رویه‌های درجه دوم صادق در شرط (۲)، رویه‌های درجه دوم سره از نوع  $I$  یا رویه‌های درجه دوم سره از نوع  $II$  را در نظر بگیریم. برای این منظور در بخش ۳.۱ نشان می‌دهیم هیچ رویه درجه دوم سره از نوع  $I$  صادق در شرط (۲) وجود ندارد و در بخش ۳.۲ نشان می‌دهیم که رویه‌های درجه دوم سره از نوع  $II$  صادق در شرط (۲)، کره‌ها هستند. پس قضیه رده‌بندی زیر اثبات می‌شود.

و  $\langle \partial_i X, \partial_j X \rangle = g_{ij}$  با استفاده از فرمول (۹)، عملگر  $L_r$  از  $M$  به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$L_r = -\sum_{i,j,k} \left( \frac{\partial_i g}{2g} g^{jk} P_{ri,k} + \partial_i g^{jk} P_{ri,k} + \partial_i P_{ri,k} g^{jk} \right) \partial_j - \sum_{i,j,k} g^{jk} P_{ri,k} \partial_i \partial_j. \quad (۱۴)$$

با توجه به تعریف تابع هسیان  $L_r$  زیر به راحتی اثبات می‌شود.

**لم ۴:** برای هر  $f \in C^\infty(M)$  و تابع هموار  $\varphi: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  داریم

$$L_r(\varphi \circ f) = \varphi'(f) L_r(f) + \varphi''(f) \langle P_r(\nabla f), \nabla f \rangle. \quad (۱۵)$$

### ۲.۲: مثال‌ها

الیاس و گوربوز در بخش ۳ از مرجع [۱۴] نشان دادند که ابر صفحه‌ها، ابر کره‌ها و استوانه‌های مدور در شرط  $L_r X = AX + b$  صدق می‌کند، مشابهاً در این بخش نشان می‌دهیم که این ابر رویه‌ها در شرط  $L_r G = AG$  و همچنین  $n$ -مینیمال‌ها در شرط  $L_{n-1} G = AG$  صدق می‌کنند.

**الف) ابر صفحه [۱۴]:** در این حالت  $G$  ثابت است، و برای هر  $r = 0, \dots, n-1$ ،  $L_r G = 0$ ، لذا ابر صفحه‌ها در شرط  $L_r G = AG$  با فرض  $A = 0$  صدق می‌کند.

**ب) ابر کره [۱۴]:** فرض کنید  $S^n(a)$  یک ابر کره به مرکز  $0$  و شعاع  $a$  در  $\mathcal{R}^{n+1}$  باشد. با توجه به مرجع [۱۴] و با استفاده از رابطه (۱۰)،  $L_r G$  به ازای هر  $r = 0, \dots, n-1$  در رابطه زیر صدق می‌کند

$$L_r G = -(r+1) \binom{n}{r+1} \frac{1}{a^{r+2}}. \quad (۱۶)$$

از این رو  $S^n(a)$  در شرط (۲) با فرض

$$A = -(r+1) \binom{n}{r+1} \frac{1}{a^{r+2}} I$$

صدق می‌کند.

با استفاده از (۹) و (۱۴) بدست می‌آوریم

$$L_1 = g^{-\frac{3}{2}} \left( \sum_{i,j,k=1}^2 \frac{\partial_i g}{g} g^{jk} Q_{1i,k} + \partial_i g^{jk} Q_{1i,k} + \partial_i Q_{1i,k} g^{jk} \right) \partial_j + \sum_{i,j,k=1}^2 g^{jk} Q_{1i,k} \partial_i \partial_j. \quad (21)$$

با توجه به رابطه‌های (۱۷) و (۲۱) لم زیر را داریم

**لم ۶:**  $L_1 g$  در رابطه زیر صدق می‌کند،

$$g^{\frac{7}{2}} L_1 g = Q_1(u_1, u_2) + g T_1(u_1, u_2), \quad (22)$$

بعلاوه داریم

$$\langle P_1 \nabla g, \nabla g \rangle = -\frac{1}{2} g^{-\frac{5}{2}} Q_1(u_1, u_2), \quad (23)$$

که  $Q_1$  و  $T_1$  چند جمله‌ای‌هایی بر حسب  $u_1, u_2$  است.

**برهان:** از رابطه‌های (۱۷) و (۲۱) بدست می‌آوریم

$$L_1 g = g^{-\frac{7}{2}} \left( \sum_{i,j,k=1}^2 (g \partial_i g g^{jk} Q_{1i,k} + g^2 \partial_i g^{jk} Q_{1i,k} + g^2 \partial_i Q_{1i,k} g^{jk} \partial_j g + \sum_{i,j,k=1}^2 g^2 g^{jk} Q_{1i,k} \partial_i g \partial_j g) \right). \quad (24)$$

چون  $g g^{ij}$  و  $g^2 \partial_i g^{jk}$  چند جمله‌ای‌اند پس اگر قرار دهیم

$$Q_1 = \sum_{i,j,k=1}^2 (g \partial_i g g^{jk} Q_{1i,k} + g^2 \partial_i g^{jk} Q_{1i,k}) \partial_j g, \quad (25)$$

و

$$T_1 = \sum_{i,j,k=1}^2 g \partial_i Q_{1i,k} g^{jk} \partial_j g + \sum_{i,j,k=1}^2 g g^{jk} Q_{1i,k} \partial_i g \partial_j g,$$

آنگاه (۲۲) بدست می‌آید. واضح است که  $Q_1$  و  $T_1$  چندجمله‌ای‌هایی بر حسب  $u_1, u_2$  هستند. رابطه (۲۳) از تعریف  $\nabla g$  و رابطه‌های (۱۷) و (۲۵) بدست می‌آید.

**لم ۷:** برای  $L_1 g^{-\frac{1}{2}}$  رابطه زیر را داریم:

$$L_1 g^{-\frac{1}{2}} = -g^{-5} \left( \left( \frac{1}{8} \right) Q_1 + \frac{1}{2} T_1 \right).$$

**قضیه:** تنها رویه‌های درجه دوم صادق در شرط  $L_1 G = AG$ ،  $A \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$ ، کره‌ها و رویه‌های تخت‌اند.

### ۳.۱. رویه‌های درجه دوم سره از نوع (I)

**گزاره ۵:** هیچ رویه درجه دوم سره از نوع (I) در  $\mathcal{R}^3$  صادق در شرط  $L_1 G = AG$ ،  $A \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$  وجود ندارد.

پیش از بیان برهان گزاره، نیاز به محاسبه عملگر  $L_1$  و بیان لم‌های ۶ و ۷ داریم. برای چنین رویه‌هایی پرمایش زیر را بکار می‌بریم

$$X = (u_1, u_2, v), \quad v = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 a_i u_i^2, \\ a_1, a_2 \neq 0$$

از (۱۲) و (۱۳) بدست می‌آوریم

$$g_{ij} = \delta_{ij} + a_i a_j u_i u_j, \\ g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{a_i a_j u_i u_j}{g}, \quad (17) \\ g = \det(g_{ij}) = 1 + \sum_{i=1}^2 a_i^2 u_i^2.$$

نگاشت گاوس  $M$  چنین بدست می‌آید

$$G = (G_1, G_2, G_3) \\ = \frac{1}{\sqrt{g}} ((-v_1, -v_2, 1)). \quad (18)$$

برای محاسبه عملگر  $L_1$  نیاز به محاسبه تبدیل نیوتن داریم.

با استفاده از (۱۸) بدست می‌آوریم

$$S X_1 = g^{-\frac{3}{2}} (a_1 (1 + a_2^2 u_2^2) x_1 - (a_2^2 a_1 u_1 u_2) x_2), \quad (19)$$

$$S X_2 = g^{-\frac{3}{2}} (-(a_1^2 a_2 u_1 u_2) x_1 + a_2 (1 + a_1^2 u_1^2) x_2).$$

با استفاده از تعریف  $P_1$  و (۱۹) نتیجه می‌گیریم

$$P_{1i,j} = g^{-\frac{3}{2}} Q_{1i,j}(u_1, u_2), \quad (20)$$

که در آن  $Q_{1i,j}$  چند جمله‌ای با ۲ متغیر است و  $\frac{Q_{1i,j}}{g}$  چندجمله‌ای بر حسب  $u_1, u_2$  نیست.

$$g = 1 + \frac{1}{v^2} \sum_{i=1}^2 (a_i u_i)^2, \quad (31)$$

$$\frac{1}{g} = 1 - \frac{1}{gv^2} \sum_{i=1}^2 (a_i u_i)^2$$

با استفاده از (۳۱) نتیجه می‌گیریم

$$\partial_i g = \frac{2}{v^2} (a_i u_i (1 + a_i - g)),$$

نگاشت گاوس  $M$  چنین بدست می‌آید

$$G = (G_1, G_2, G_3) = \frac{1}{\sqrt{g}} (-v_1, -v_2, 1) \quad (32)$$

برای محاسبه عملگر  $L_1$ ، نیاز به محاسبه تبدیل نیوتن  $P_1$  داریم با استفاده از (۳۲) بدست می‌آوریم

$$SX_1 = -\nabla_{X_1}^0 G = -\frac{g}{v} \left\{ v_1^2 (1 + a_1 - 2g) X_1 + v_1 v_2 (1 + a_2 - 2g) X_2 \right\},$$

$$SX_2 = -\nabla_{X_2}^0 G = -\frac{g}{v} \left\{ v_1 v_2 (1 + a_1 - 2g) X_1 + v_2^2 (1 + a_2 - 2g) X_2 \right\}. \quad (33)$$

با استفاده از تعریف  $P_1$  و رابطه (۳۳) نتیجه می‌گیریم

$$P_{1i,j} = g^{-\frac{3}{2}} Q_{1i,j}, \quad (34)$$

$$Q_{1i,j} = \frac{1}{v^3} S_{1i,j}(u_1, u_2) + g R_{1i,j}(u_1, u_2, \frac{1}{v}),$$

که در آن  $R_{1i,j}$  و  $S_{1i,j}$  به ترتیب چند جمله‌ای‌هایی با ۲ و ۳ متغیراند و ضریب‌های  $S_{1i,j}$  چنین بدست می‌آید

$$\prod_{k=1}^2 (-1)^{\alpha_k} (1 + a_j) (1 + a_k)^{\beta_k} a_k^{\gamma_k}, \quad (35)$$

که در آن  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$  اعداد صحیح‌اند، از رابطه‌های (۱۴) و (۳۴) بدست می‌آوریم

$$L_1 = g^{-\frac{3}{2}} \left( \sum_{i,j,k=1}^2 \frac{\partial_i g}{g} g^{jk} Q_{1i,k} \partial_j - \sum_{i,j,k=1}^2 \partial_i g^{jk} Q_{1i,k} \partial_j - g^{-\frac{3}{2}} \partial_i Q_{1i,k} g^{jk} \partial_j - \sum_{i,j,k=1}^2 g^{jk} Q_{1i,k} \partial_i \partial_j \right). \quad (36)$$

فرض کنید

$$A_j = -2g \sum_{i,k=1}^2 \partial_i g g^{jk} Q_{1i,k}, \quad (37)$$

**برهان:** با استفاده از لم ۴ داریم

$$L_1 \left( g^{-\frac{1}{2}} \right) = -\frac{1}{2} g^{-\frac{3}{2}} L_1 g - \frac{3}{4} g^{-\frac{5}{2}} < P_1 \nabla g, \nabla g >, >$$

با جایگذاری (۲۲) و (۲۳) در معادله بالا رابطه (۲۷) بدست می‌آید.

**اثبات گزاره ۵:** فرض کنید  $M$  در شرط (۲) برای  $A = (a_{ij})$ ،  $1 \leq i, j \leq 3$ ، صدق کند. با استفاده از رابطه‌های (۱۸) و (۲۷) داریم

$$g^{\frac{9}{2}} \left( -\sum_{j=1}^3 a_{3j} a_j u_j + a_{33} \right) = -\left( \frac{1}{8} Q_1 + \frac{1}{2} g T_1 \right) \quad (28)$$

چون طرف چپ تساوی بالا چندجمله‌ای است، نتیجه می‌گیریم  $\frac{1}{8} Q_1 + \frac{1}{2} g T_1 = 0$  و در نتیجه  $\frac{Q_1}{g}$  چند جمله‌ای است. از طرفی  $\frac{Q_1}{g} = \sum g^{jk} Q_{1i,k} \partial_i g \partial_j g$  با توجه به ضابطه  $g^{jk}$  در رابطه (۱۷) و از اینکه  $\frac{Q_{1i,k}}{g}$  چندجمله‌ای نیست، نتیجه می‌شود  $\frac{Q_1}{g}$  چندجمله‌ای نیست و این یک تناقض است. بدین ترتیب گزاره ۵ اثبات می‌شود.

### ۳.۲. رویه‌های سره از نوع (II)

**گزاره ۸:** فرض کنید  $M$  رویه درجه دوم سره از نوع (II) باشد. آنگاه  $M$  در شرط (۲) صدق می‌کند اگر و تنها اگر  $M$  یک کره باشد.

برای اثبات به محاسبه  $L_1$  و بیان لم ۹ نیاز داریم.

پرمایش زیر را برای  $M$  در نظر می‌گیریم

$$X = (u_1, u_2, v),$$

$$v^2 = a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + c, \quad (29)$$

$$a_1, a_2 \neq 0.$$

پس داریم  $v_i = \partial_i v = \frac{a_i u_i}{v}$  که  $i = 1, 2$  از (۱۲) و (۱۳) بدست می‌آوریم

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{a_i a_j u_i u_j}{v^2},$$

$$g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{a_i a_j u_i u_j}{g v^2}, \quad (30)$$

همچنین

حال با استفاده از رابطه (۴۱) و رابطه بالا رابطه (۴۲) بدست می‌آید.

**اثبات گزاره ۸:** فرض کنید  $M$  در شرط (۲) برای  $A = (a_{ij})$ ،  $1 \leq i, j \leq 3$ ، صدق کند. با استفاده از رابطه‌های (۴۲) و (۲) داریم

$$g^{\frac{9}{2}} \left\{ \sum_{j=1}^2 a_{3j} a_j \frac{u_j}{v} - a_{33} \right\} = -\frac{1}{8} g^{-\frac{9}{2}} \sum_{j=1}^2 A_j \partial_j g + g \tilde{P}_1.$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم چندجمله‌ای مانند  $\tilde{T}_1$  با ۳ متغیر وجود دارد چنانچه

$$\sum_{j=1}^2 A_j \partial_j g = g \tilde{T}_1 \left( u_1, u_2, \frac{1}{v} \right). \quad (۴۵)$$

بنابر رابطه (۳۴) می‌توان فرض کرد

$$B_j = -2g \sum_{i,j,k=1}^2 \partial_i g g^{jk} S_{1i,k} \quad (۴۶)$$

چون  $v^2$  چندجمله‌ای برحسب  $u_1, u_2$  است، از رابطه‌های (۴۵) و (۴۶) نتیجه می‌گیریم چندجمله‌ای مانند  $R_1$  بر حسب  $u_1, u_2$  وجود دارد چنانچه

$$v^{15} \left( \sum_{i=1}^2 B_i \partial_i g \right) = g R_1(u_1, u_2) \quad (۴۷)$$

در رابطه (۴۷) قرار می‌دهیم  $v_1 = 0$  یا  $v_2 = 0$ . آنگاه از رابطه‌های (۵)، (۲۸)، (۲۹) و (۴۷) بدست می‌آوریم

$$R_1(0, u_2) = 0, \quad R_1(u_1, 0) = 0.$$

در نتیجه،  $R_1 = 0$ . بنابراین از رابطه‌های (۲۱)، (۴۶) و (۴۷) نتیجه می‌گیریم،  $u_j = -1$  پس  $M$  کره است.

آنگاه با استفاده از (۳۶) و (۳۷) داریم

$$\begin{aligned} L_1 = & g^{-\frac{7}{2}} \sum_{j=1}^2 A_j \partial_j - \\ & g^{-\frac{5}{2}} \sum_{i,j,k=1}^2 (2 \partial_i g Q_{1i,j} \\ & - \frac{2}{v^4} a_i a_j a_k u_i u_j u_k Q_{1i,k} + \\ & \frac{1}{v^2} a_j a_k u_j Q_{1k,k} \\ & + \frac{1}{v^2} a_j a_k u_k Q_{1j,k} + \frac{1}{v^2} a_i a_j u_i u_j \partial_i Q_{1j,k} \\ & - g \partial_i Q_{1i,k}) \partial_j - \\ & g^{-\frac{3}{2}} \sum_{i,j,k} g^{jk} Q_{1i,k} \partial_i \partial_j. \end{aligned} \quad (۳۸)$$

اگر قرار دهیم

$$c_{jk} = g g^{jk}, \quad (۳۹)$$

آنگاه از رابطه‌های (۳۰)، (۳۱) و (۳۹) نتیجه می‌گیریم

$$c_{jk} = \delta_{jk} + \frac{1}{v^2} (\delta_{jk} \sum_{i=1}^2 b_i^2 u_i^2 - a_k a_j u_k u_j). \quad (۴۰)$$

بنابراین از (۳۷) و (۴۰) بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k=1}^2 c_{jk} Q_{1i,k} \partial_i g \partial_j g = \\ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 A_j \partial_j g \end{aligned} \quad (۴۱)$$

**لم ۹:** برای  $L_1 g^{-\frac{1}{2}}$  رابطه زیر را داریم

$$\begin{aligned} L_1 g^{-\frac{1}{2}} = & -\frac{1}{8} g^{-5} \sum_{j=1}^2 A_j \partial_j g \\ & + g^{-4} \tilde{P}_1 \left( u_1, u_2, \frac{1}{v} \right), \end{aligned}$$

که  $\tilde{P}_1(u_1, u_2, \frac{1}{v})$  چندجمله‌ای با ۳ متغیر است.

**برهان:** با استفاده از رابطه‌ی (۳۸) داریم

$$\begin{aligned} L_1 g^{-\frac{1}{2}} = & -\frac{1}{2} g^{-\frac{3}{2}} L_1 g - \frac{3}{4} g^{-4} \\ & \sum_{i,j,k=1}^2 g^{jk} Q_{1i,k} \partial_i g \partial_j g \\ = & -\frac{1}{2} g^{-5} \sum_{j=1}^2 A_j \partial_j g + \\ & g^{-4} \tilde{P}_1 \left( u_1, u_2, \frac{1}{v} \right) \\ & - \frac{3}{4} g^{-5} \sum g g^{jk} Q_{ri,k} \partial_i g \partial_j g \end{aligned} \quad (۴۲)$$



Bulletin of the Korean Mathematical Society. (2013), 50, 935-949.

فهرست منابع

11. Mohammadpouri, A., Rotational hypersurfaces with  $L_r$ -pointwise 1-type Gauss map, Bulletin of Parana's Mathematical Society, (2018), 363, 195-205.
12. Mohammadpouri, A., Hypersurfaces  $L_r$ -pointwise 1-type Gauss map. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 14, (1), (2018), 67-77.
13. Mohammadpouri, A., Kashani, S.M.A., Quadric hypersurfaces of  $L_r$  finite type, Beiträge zur Algebra und Geometrie. (2012), 625-641.
14. Alias, L. J., Gurbuz, N., An extension of Takahashi theorem for the linearized operators of the higher order mean curvatures, Geometriae Dedicata, (2006), 121, 113-127.
15. Kim, D. S., Ruled surfaces and Gauss map, Bulletin of the Korean Mathematical Society, (2015), 52, 1661-1668.
1. Baikoussis, C., Ruled submanifolds with finite type Gauss map, Journal of Geometry, (1994), 49, 42-45.
2. Baikoussis, C., Blair D. E., On the Gauss map of ruled surfaces, Glasgow Mathematical, (1992), 34, 355-359.
3. Dursun, U., Hypersurfaces with pointwise 1-type Gauss map, Taiwanese Journal of Mathematics, (2007), 11, 1407-1416.
4. Chen, B.Y., Piccinni P., Submanifolds with finite type Gauss map, Bulletin of the Australian Mathematical Society, (1987), 35 (2) 161-186.
5. Dillen, F., Pas, J., Verstraelen, L., On the Gauss map of surfaces of revolution, Library of Institute of Mathematics, Academia Sinica, (1990), 18, 239-246.
6. Kim, D. S., On the Gauss map of quadric hypersurfaces, Korean Mathematical Society. (1994), 429-437.
7. Reilly, R. C., Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms, Journal of Differential Geometry, (1973), 8 (3), 465-477.
8. Cheng, S .Y., Yau, S. T., Hypersurfaces with constant scalar curvature, Mathematische Annalen, (1977), 225 (3), 195-204.
9. Kim, D. S., Kim, J. R., Kim, Y. H., Cheng-Yau operator and Gauss map of surfaces of revolution B. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, (2016), 39, 1319-1327.
10. Kim, Y. H., Turgay, N. C., Surfaces in  $E^3$  with  $L_1$ - pointwise 1-type Gauss map,

