

یک مدل ریاضی برای بررسی جریان خون به عنوان جریان سیال کراس در طول رگ گرفته شده

احمد رضا حقیقی^{۱*}، نیکو پیرهادی^۲، محمد شهبازی اصل^۳

^(۱) دانشیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، تهران، ایران
^(۲) کارشناسی ارشد، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران
^(۳) دکتری، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۳/۲۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۲/۰۷

چکیده

در پژوهش حاضر یک مدل یک‌بعدی برای جریان خون پالسی در طول رگ مخروطی با گرفتگی غیرمتقارن شبیه‌سازی شده است. جریان خون به‌عنوان سیال کراس در یک لوله استوانه الاستیک با گرفتگی غیرمتقارن نسبت به جهت محوری و هندسه‌ی وابسته به زمان مدل‌سازی می‌شود. دیواره عروق گرفته شده در طول رگ انعطاف‌پذیر و غیرانعطاف‌پذیر باهم مقایسه شده است. از فرض گرفتگی خفیف برای ساده کردن معادلات حاکم بر جریان استفاده می‌شود. با اعمال نگاهت مناسب شبکه‌ی کسینوسی گرفته شده به یک شبکه‌ی مستطیلی و صلب تبدیل می‌گردد. معادلات ناویر-استوکس حاکم بر جریان خون برای میدان سرعت با استفاده از روش تفاضلات متناهی حل می‌شود. به منظور اثبات درستی نتایج به دست آمده در تحقیق حاضر، نتایج حاصل با نتایج تحقیقات پیشین مورد مقایسه قرار گرفته و درستی مدل ارایه شده به اثبات رسیده است. مشخصه‌های اصلی جریان خون از قبیل دبی حجمی، مقاومت در برابر جریان، تنش برشی دیواره از روی پروفیل سرعت بدست آمده است. نمودارهای دویعدی برای پارامترهای مختلفی از توزیع سرعت در شکل‌های مختلف ارایه شده است.

واژه‌های کلیدی: گرفتگی نامتقارن، سیال کراس، جریان خون پالسی، روش تفاضلات متناهی، رگ مخروطی.

۱- مقدمه

از دلایل اساسی مرگ‌ومیر در سراسر جهان بیماری قلبی-عروقی است. از علل مهم بیماری قلبی-عروقی آتروسکلروز "یکی از شایع‌ترین بیماری‌های قرن بیست و یکم" می‌باشد. دیواره داخلی رگ‌های بدن انسان که خون را به قلب می‌رساند ممکن است به علت رسوبات چربی و کلسترول در طی سال‌های قبل تنگ‌تر شده و کم‌کم راه عبور خون به قلب را مسدود نمایند. به این اتفاق در علوم پزشکی آتروسکلروز می‌گویند [۳-۱]. همچنین این تجمع موجب گرفتگی رگ می‌شود، که این گرفتگی بیشتر در عروق کرونر دیده می‌شود. جریان خون در عروق کرونر و عروق نرمال رفتار متفاوتی دارد [۴-۵].

خون، نوعی سیال است که از سلول‌های خونی و یک مایع حاوی آب به نام پلاسما تشکیل شده است. زمانی که آهنگ برشی خون کمتر از می‌باشد، خون از فرض نیوتنی پیروی می‌کند. چنین وضعیتی در رگ‌های با قطر داخلی زیاد اتفاق می‌افتد. در رگ‌های با قطر داخلی کم و سرعت برشی بالا از فرض نیوتنی پیروی نمی‌کنند. از آنجایی که سیالات نیوتنی توانایی توصیف تمام مشخصه‌های رئولوژیکی جریان خون را ندارند، بنابراین خون به عنوان سیال نیوتنی مدل‌بندی نمی‌شود [۸-۶]. عوامل دینامیکی نقش اساسی در توصیف گرفتگی رگ ایفا می‌کنند که منجر به بیماری قلبی-عروقی و حمله قلبی می‌شود. بنابراین مطالعه جریان خون در رگ گرفته شده با توجه به رفتار مکانیکی در دیواره رگ‌های خونی حائز اهمیت است. بسیاری از محققان، تحقیقات نظری و تجربی در زمینه جریان خون در طول رگ گرفته شده انجام داده‌اند [۹]. یک مدل ریاضی دوبعدی از سیال میکروپلار برای جریان خون در عروق مخروطی با گرفتگی تنه‌ای سینوسی توسط عبدالله و همکاران مورد مطالعه قرار گرفت. آن‌ها سرعت و مشخصه‌های جریان ناشی از عملکرد سینوسی گرادیان فشار را مورد مطالعه قرار دادند [۱۰]. پوناگوسامی و اسلیو جریان خون را به صورت سیال دولایه در نظر گرفتند به طوری که لایه مرکزی سیال کاسون و لایه جانبی سیال پلاسما می‌باشد، آن‌ها به این نتیجه رسیدند که مناطق پایین دست گرفتگی برای تشخیص بیماری قلبی-عروقی بهتر

است [۱۱]. در برخی تحقیقات یک مدل ریاضی برای جریان خون در طول رگ گرفته شده را به صورت دولایه در نظر گرفتند و در مورد تاثیر پارامترهای مختلف رو پروفیل سرعت بحث کردند. جریان خون را در طول رگ به صورت الاستیک و هندسه مفروض را وابسته به زمان فرض کردند [۱۲]. لایک و مخوپادهای جریان خون پالسی را به صورت سیال نیوتنی، لایه‌ای، تراکم‌ناپذیر و متقارن محور در نظر گرفتند که در آن رفتار دیواره رگ به صورت دایره‌ی یکنواخت بی‌حرکت با هندسه مستقل از زمان فرض شده است [۱۳]. همچنین یک مدل ریاضی برای جریان خون دوبعدی در طول رگ گرفته شده را شبیه‌سازی کردند. با اعمال نگاهت مناسب رگ الاستیک تبدیل به رگ مستطیلی و صلب شد. مشخصه‌های دینامیکی جریان خون از جمله پروفیل سرعت، دبی‌حجمی، مقاومت در برابر جریان را به دست آوردند [۱۴]. علی و همکاران یک مدل ریاضی برای جریان خون پالسی ناپایا در طول رگ گرفته شده را با استفاده از معادلات ساختاری سیال سیسکو مورد مطالعه قرار دادند. از تبدیل مختصات مناسب برای بی‌حرکت کردن اثر دیواره رگ استفاده کردند و با استفاده از روش صریح به گسسته‌سازی معادلات پرداختند [۱۵]. مدل رفتار جریان خون را به صورت غیرنیوتنی و معادلات به صورت غیرخطی در نظر گرفت و با استفاده از روش عددی به حل معادلات حاکم پرداخت. جریان خون را در رگ با استفاده از سیال پاورلاو در لوله دایره‌ای یکنواخت با گرفتگی تنه‌ای کسینوسی که نسبت به جهت محوری متقارن می‌باشد مورد مطالعه قرار داد [۱۶]. با توجه به گرادیان فشار ضربانی که توسط قلب تولید می‌شود، در [۱۷] جریان خون ضربانی دوبعدی در طول رگ مخروطی با دو گرفتگی متوالی با استفاده از روش عددی تفاضلات محدود حل شده است و از روی پروفیل سرعت دبی حجمی و مقاومت در برابر جریان را محاسبه کردند. سانکار به بررسی رفتار جریان خون در طول رگ مخروطی با گرفتگی متوالی پرداخت، سانکار رفتار جریان خون به صورت سیال غیرنیوتنی مدل‌بندی شده است. برای حل سیستم غیرخطی معادلات از روش اختلال استفاده کرد و اثر پارامترهای فیزیکی مختلف مانند

مناسب و اعمال شرط گرفتگی خفیف پرداخته شده است. بخش ۴ مربوط به حل عددی با استفاده از روش تفاضل متناهی می‌باشد. بررسی پایداری روش ارائه شده در بخش ۵ مورد بررسی قرار گرفته است نتایج شبیه‌سازی عددی در بخش ۶ ارائه شده است. و در نهایت یک نتیجه‌گیری کلی ارائه شده است.

۲- پیشینه تحقیق

جریان خون تراکم‌ناپذیر، لایه‌ای، پالسی، کاملاً توسعه‌یافته و غیرمتقارن در جهت z در طول رگ استوانه‌ای با گرفتگی خفیف در نظر گرفته شده است. سیستم مختصات استوانه‌ای (r, ϕ, z) که u و v مولفه‌های سرعت در راستای r و z هستند. هندسه گرفتگی را به صورت زیر توصیف می‌کنیم [۲۳-۲۰ و ۱۳].

$$R(z, t) = \begin{cases} (1 + \xi z) \left(1 - A \left(l_0^{\gamma-1} (z-d) - (z-d)^\gamma \right) \right) & (1) \\ a_1(t) & d \leq z \leq d + l_0, \\ (1 + \xi z) a_1(t) & O. W \end{cases}$$

که در آن روابط زیر برقراراند

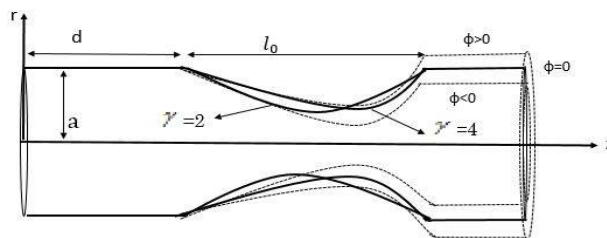
$$\bar{\phi}_j(x) = \frac{\rho_j(x)}{\|\rho_j(x)\|_{W_2}}, \quad A = \frac{\tau_m \gamma^{\gamma(\gamma-1)}}{a l_0^\gamma (\gamma-1)},$$

$$a_1(t) = 1 + k_r \cos(\omega t - \varphi).$$

در رابطه (۱) پارامتر a شعاع رگ، d طول ناحیه غیرگرفته، $\gamma \geq 2$ پارامتر مربوط به نوع گرفتگی، l_0 طول ناحیه گرفتگی، φ زاویه فاز، k_r پارامتر نوسان می‌باشد. زمانی که $\gamma=2$ نشان دهنده‌ی متقارن بودن گرفتگی می‌باشد.

شاخص پاورلاو، عدد رینولدز، دامنه پالسی روی سرعت جریان خون را بررسی کرد [۱۸]. نصیر علی و اکبر زمان ویژگی‌های جریان خون ناپایا در طول رگ با گرفتگی متوالی را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. و با به‌کاربردن شرط گرفتگی خفیف به ساده‌سازی معادلات پرداختند و سپس به حل معادلات با روش عددی پرداختند [۱۹]. شبیه‌سازی یک مدل دو بعدی و دو لایه‌ای از جریان خون غیردایم در طول سرخرگ گرفته‌شده با استفاده از روش تفاضل محدود انجام شده است که در آن نوع گرفتگی هندسه نسبت به جهت محوری غیرمتقارن و نسبت به جهت شعاعی متقارن در نظر گرفته شده است. همچنین با فرض جریان خون به صورت سیال غیرنیوتونی یک مدل ریاضی برای جریان خون در طول سرخرگ گرفته شده ارائه کردند. جریان خون در این مطالعه به صورت پالسی و متقارن محور و تراکم‌ناپذیر فرض شده است و معادلات حاکم از روش متناهی حل شده‌اند [۲۵].

مطالعه حاضر به منظور بررسی عددی جریان خون در طول رگ الاستیک ارائه شده است. نوع گرفتگی نسبت به جهت محوری غیرمتقارن و جریان خون به صورت سیال تک‌لایه مدل‌بندی شده است. به‌طورکلی آتروسکلروز در سطح دیواره رگ دارای بی‌نظمی‌های زیادی است که این بی‌نظمی و نامتقارن بودن باعث پیچیدگی در شبیه‌سازی‌های تحلیلی و عددی می‌شود. به منظور تولید گرادیان فشار ضربانی ناشی از پمپاژ قلب در بدن انسان، جریان خون به صورت پالسی با استفاده از مدل غیرنیوتونی در نظر گرفته شده است. همچنین در این مطالعه با شرط گرفتگی خفیف به ساده‌سازی معادلات پرداخته شده است. در بخش ۲ هندسه مربوط به سرخرگ الاستیک با گرفتگی نامتقارن ارائه شده است. در بخش ۳ به توصیف معادلات حاکم با در نظر داشتن نگاهت



شکل ۱: هندسه رگ گرفته شده

۳- معادلات ساختاری

در مطالعه حاضر جریان خون به‌صورت سیال غیر نیوتنی، تراکم‌ناپذیر، لایه‌های و کاملاً توسعه‌یافته در نظر گرفته می‌شود. همچنین به‌منظور شبیه‌سازی هرچه بیشتر شرایط واقعی جریان به‌صورت پالسی در نظر گرفته خواهد شد. و جریان در طول رگ با گرفتگی غیرمتقارن نسبت به جهت محوری مدل‌بندی می‌شود. میدان سرعت به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U = [u, 0, u_z], \quad (2)$$

که در آن u_r مولفه‌ی سرعت شعاعی و u_z مولفه‌ی سرعت محوری می‌باشد.

باتوجه به مفروضات یادشده، معادلات حاکم بر جریان خون به‌صورت زیر می‌باشند:

شکل بی‌بعد معادله‌ی پیوستگی:

$$\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

شکل بی‌بعد معادلات مومنتوم برای سیال غیرنیوتنی کراس [۲۴، ۲۹]:

$$\text{Re} \sigma \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon (\tau u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z}) \right) = \quad (4)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S^r) + \frac{\partial}{\partial z} (S^z) \right),$$

$$\text{Re} \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right] + \text{Re} (\sigma \varepsilon u \frac{\partial v}{\partial r} + \varepsilon v \frac{\partial v}{\partial z}) = \quad (5)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S^z) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial z} (S^z) \right)$$

که در آن [۱۵، ۲۹، ۳۰]:

$$S^z = (M + (1-M)S^{-1}) \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \sigma \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (6)$$

$$S^r = (M + (1-M)S^{-1}) (\varepsilon \sigma \frac{\partial u}{\partial r}), \quad (7)$$

$$S^z = (M + (1-M)S^{-1}) (\varepsilon \frac{\partial v}{\partial z}), \quad (8)$$

$$S = 1 + \left\{ W \varepsilon^2 \left[2 \left[\sigma \varepsilon \left(\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \right] \right. \\ \left. + \left(\sigma \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \right\}^{\frac{n-1}{2}}. \quad (9)$$

متغیرهای استفاده شده به‌منظور بی‌بعد سازی معادلات

بالا به‌صورت زیر است:

$$S^r = \frac{l_0}{U_0 \mu_0} S^{*r}, S^z = \frac{l_0}{U_0 \mu_0} S^{*z}, S^{rz} = \frac{a}{U_0 \mu_0} S^{*rz},$$

$$u = \frac{u^* l_0}{\sigma^* U_0}, v = \frac{v^*}{U_0}, r = \frac{r^*}{a}, z = \frac{z^*}{l_0}, t = \frac{t^* U_0}{a},$$

$$M = \frac{\mu_\infty}{\mu_0}, p = \frac{p^* a^2}{l_0 \mu_0 U_0}, R = \frac{R^*}{a}, \quad (10)$$

پارامترهای بی‌بعد در معادلات بالا به‌صورت زیر هستند:

$$We = \frac{\Gamma U_0}{a}, \text{Re} = \frac{\rho U_0 a}{\mu_0}. \quad (11)$$

که در آن U_0 سرعت میانگین در پارامترهای رینولدز و ویسبرگ می‌باشد و $\partial p / \partial z$ گرادیان فشار ضربانی برای بدن انسان برابر با $D_1 (1 + e \cos(\alpha_1 t))$ فرض می‌شود [۱۶، ۲۵، ۲۶، ۳۰]، که پارامترهای آن به‌صورت زیر می‌باشد

$$e = \frac{A_1}{A_0}, \alpha_1 = \frac{a \omega_p}{U_0}, D_1 = \frac{A_0 a^2}{\mu_0 U_0}. \quad (12)$$

حال از فرض گرفتگی خفیف برای ساده سازی معادلات پیوستگی و مومنتوم استفاده می‌شود. مقدار پارامترها در فضای بی‌بعد از یک مرتبه‌ی بزرگی که تقریباً یک یا کمتر از یک می‌باشد و با نماد $O(1)$ نشان داده شده است. در این فرض نسبت $(\sigma = \sigma^* / a \ll 1)$ و نسبت $(\varepsilon = a / l_0 \approx O(1))$ در نظر گرفته می‌شود [۲، ۲۸]. اگر توابع برای u و v هموار و پیوسته باشد مشتق آن‌ها از مرتبه‌ی یک است، آنگاه با در نظر گرفتن فرض بالا و جایگذاری آن در معادلات [۳-۵] خواهیم داشت:

$$\frac{\sigma^*}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (13)$$

$$O \left(\frac{\sigma^*}{a} \right) \quad O \left(\frac{\sigma^*}{a} \right),$$

$$\text{Re} \frac{\sigma^*}{a} \left(\frac{a}{l_0} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a}{l_0} \left(\sigma^* u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{a}{l_0} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S^r) + \frac{\partial}{\partial z} (S^z) \right), \quad (14)$$

$$O \left(\frac{\sigma^*}{a} \frac{a^2}{l_0^2} \right) \left(O \left(\frac{a}{l_0} \right) O \left(\frac{\sigma^*}{a} \right) \quad O(1) \right) =$$

$$O \left(\frac{a}{l_0} \right) O(1) \quad O(1),$$

در نتیجه شرایط مرزی و اولیه بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۱۶، ۲۹، ۳۰]:

$$v(r, z, 0) = 2U_0 \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right), \quad \text{شرط اولیه:}$$

$$\frac{\partial v(r, z, t)}{\partial r} = 0, \quad \text{مرکز رگ } (r=0):$$

$$v(r, z, t) = 0, \quad \text{جداره رگ } (r=R(z, t)):$$

به منظور بی‌حرکت ساختن دیواره رگ الاستیک تبدیل مختصات شعاعی $\kappa = \frac{r}{R}$ را روی معادلات بالا اعمال می‌کنیم در نتیجه شبکه‌ی تولید شده به یک شبکه‌ی مستطیلی و صلب تبدیل می‌شود، تا بتوان شبکه‌ی تولید شده را روی سطح رگ اعمال کرد [۱۵، ۲۹]. نتیجه‌ی اعمال نگاشت مناسب بر روی معادلات به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \left(D_1(\pi + e \cos(2\pi t)) + \frac{1}{\kappa R^2} \frac{\partial}{\partial \kappa} \left(\kappa S_2 \frac{\partial v}{\partial \kappa} \right) \right), \quad (20)$$

$$S_2 = M + (1-M) \left[1 + \left(\frac{We}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \kappa} \right)^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \right]^{-1}. \quad (21)$$

۴- روش حل عددی

روش تفاضلات محدود یکی از روش‌های عددی برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل است. در این روش مشتق توابع با تفاضلات آن‌ها تقریب زده می‌شود. در مطالعه حاضر از روش گسسته‌سازی تفاضلات متناهی صریح برای الگوریتم عددی استفاده شده است:

$$\frac{\partial v}{\partial \kappa} \cong \frac{v_{i+1,j}^k - v_{i-1,j}^k}{2 \Delta \kappa},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \kappa^2} \cong \frac{v_{i+1,j}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i-1,j}^k}{(\Delta \kappa)^2}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \cong \frac{v_{i,j}^{k+1} - v_{i,j}^k}{\Delta t}.$$

$$\text{Re} \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right] + \text{Re} \left(\frac{\sigma^*}{a} \frac{a}{l_0} u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{a}{l_0} v \frac{\partial v}{\partial z} \right) =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S^z) + \left(\frac{a}{l_0} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} (S^z) \right), \quad (15)$$

$$\left(\alpha \left(\frac{\sigma^*}{a} \frac{a}{l_0} \right) \alpha(1) \quad \alpha \left(\frac{a}{l_0} \right) \alpha(1) \right) =$$

$$\left(\alpha(1) + \alpha \left(\frac{a^2}{l_0^2} \right) \alpha(1) \right),$$

بررسی معادله مومنوم (۱۳) در جهت r نشان می‌دهد:

$$\frac{\partial p}{\partial r} \ll \frac{\partial p}{\partial z},$$

تغییرات فشار در جهت r در مقایسه با تغییرات در جهت z نادیده گرفته می‌شود. و معادله پیوستگی نشان می‌دهد:

$$\frac{\sigma^*}{a} \ll 1,$$

در نتیجه معادله زیر را داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial z} \ll 1,$$

با شرایط مشخص شده‌ی گرفتگی خفیف و بعد از اعمال تغییرات بالا معادلات (۳-۵) به فرم زیر در می‌آیند:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (16)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (17)$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t} \right] = \frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r S_1 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) \right) \right), \quad (18)$$

$$S_1 = M + (1-M) \left[1 + \left(We^2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \right]^{-1}, \quad (19)$$

از آنجایی که جریان کاملاً توسعه یافته است، شرط ورود به لوله و خروج از لوله به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

که در آن: κ_i ، z_j و t_k به ترتیب نقاط گسسته سازی در راستای شعاعی، محوری و زمانی است.

۵- پایداری عددی

به‌طور معمول جهت حل مسائل مکانیکی با سرعت همگرایی بالا از روش تفاضلات متناهی استفاده می‌شود. از مزایای این روش می‌توان به سرعت بالای آن در حل مسائل اشاره کرد. روش صریح به‌طور مشروط پایدار است و معیار پایداری این روش عدد کورانت می‌باشد که به‌صورت زیر می‌باشد [۲۷، ۳۲، ۳۳]:

$$\Delta t = c \min[\Delta t_1, \Delta t_2], \quad (30)$$

که در آن:

$$\Delta t_1 \leq \min\left[\frac{\Delta \kappa}{v}, \frac{\Delta z}{u}\right], \quad (31)$$

$$\Delta t_2 \leq \min\left[\frac{\text{Re}}{2} \frac{\Delta \kappa^2 \Delta z^2}{(\Delta \kappa^2 + \Delta z^2)}\right]. \quad (32)$$

بنابراین طول گام زمانی در این تحقیق برابر $\Delta t = 0.0001$ می‌باشد که در شرط پایداری صدق می‌کند.

۵- مباحث و نتایج عددی

در این بخش نتایج گرافیکی برای پارامترهای بی‌بعد زیر ارائه شده است [۱۵، ۲۹، ۳۰، ۳۱]:

$$\Delta t = 0.0001, \Delta x = 0.025, \Delta z = 0.01, f_p = 1.2, \varphi = 0,$$

$$\sigma = 0.1a, a = 1, l_0 = 1, L = 3, We = 0.5, \alpha_1 = 2\pi,$$

$$\mu_0 = 0.56, \mu_\infty = 0.0345, D_1 = 4, \text{Re} = 1, e = 0.2.$$

پارامترهای انتخاب شده مربوط به جریان خون در رگ با گرفتگی نامتقارن می‌باشد.

به منظور بررسی درستی نتایج حاصل از سرعت محوری جریان خون در نقطه بحرانی $z = 1.8$ و میزان گرفتگی $\sigma = 0.4$ در شکل ۲ با نتایج به دست آمده با سرعت محوری جریان خون در تحقیق مندل [۱۶] شبیه‌سازی شده است. نتایج تحقیقات توافق خوبی باهم دارند. همین‌طور در شکل ۲ چند شبیه‌سازی با اندازه‌های

$$v_{i,j}^{k+1} = v_{i,j}^k + \frac{\Delta t}{\text{Re}} \left[-\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^k + \frac{1}{\kappa(R_j^k)^2} \frac{v_{i+1,j}^k - v_{i-1,j}^k}{2\Delta \kappa} \right. \\ \left. (M + (1-M)(V_4)^{-1}) + \frac{(1-M)}{(R_j^k)^2} \frac{v_{i+1,j}^k - v_{i-1,j}^k}{2\Delta \kappa} \right] \\ \frac{\partial}{\partial \kappa} (V_4)^{-1} + \frac{1}{(R_j^k)^2} (M + (1-M)(V_4)^{-1}) \\ \left. \frac{v_{i+1,j}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i-1,j}^k}{(\Delta \kappa)^2} \right], \quad (23)$$

$$V_4 = 1 + \left(\frac{We}{R_j^k} \right)^2 \frac{|v_{i+1,j}^k - v_{i-1,j}^k|^2}{4\Delta \kappa} \right)^{\frac{n-1}{2}}, \quad (24)$$

بعد از محاسبه‌ی پروفیل سرعت فرمول‌های بی‌بعد و گسسته‌سازی شده از دبی حجمی، مقاومت در برابر جریان، تنش برشی دیواره به ترتیب زیر می‌باشد [۱۵، ۱۶، ۲۵]:

$$Q_i^k = (R_j^k)^2 \int_0^1 v \kappa d\kappa, \quad (25)$$

$$\lambda_i^k = \frac{\left| L \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_i^k \right|}{Q_i^k}, \quad (26)$$

$$(\tau_s)_i^k = \frac{1}{R_j^k} S_1 \left(\frac{\partial v}{\partial \kappa} \right)_i^k. \quad (27)$$

در رابطه (۲۷) داریم:

$$S_1 = M + (1-M) \left(1 + \left(\frac{We}{R_j^k} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \kappa} \right)_i^k \right)^{\frac{n-1}{2}} \right)^{-1}.$$

به همین ترتیب فرم گسسته‌سازی شده شرایط مرزی به فرم زیر می‌باشد:

$$v_{i,1}^k = v_{i,2}^k, \quad v_{i,N}^k = v_{i,N+1}^k, \quad (28)$$

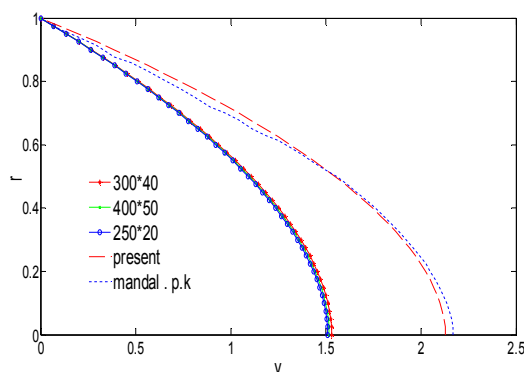
در روابط بالا $\Delta \kappa$ ، Δt و Δz به ترتیب طول گام‌های جهت محوری، جهت زمانی و جهت شعاعی می‌باشند و رابط زیر برای آن‌ها برقرار است

$$\begin{cases} \kappa_i = (i-1)\Delta \kappa, & (i=1, 2, \dots, N+1) \\ t_k = (k-1)\Delta t, & (k=1, 2, \dots) \\ z_j = (j-1)\Delta z, & (j=1, 2, \dots, M+1). \end{cases} \quad (29)$$

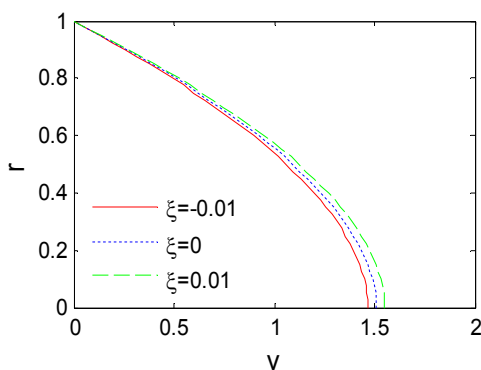
منحنی‌های رگ مخروطی همگرا و رگ مخروطی واگرا قرار دارد. در نتیجه با افزایش میزان گرفتگی در رگ سرعت محوری جریان خون افزایش می‌یابد. پروفیل سرعت محوری برای مقادیر مختلف از عدد ویسنبرگ $We=0.1, 0.5, 1.5$ در بیشترین مقطع گرفتگی $z=1.8$ در شکل ۴ نشان داده شده است. همان‌طور که می‌دانیم عدد ویسنبرگ در توصیف سیالات ویسکوالاستیک کاربرد دارد. به همین دلیل مقادیر بزرگتر از عدد ویسنبرگ موجب کاهش ویسکوزیته ظاهری از خون می‌شود و در این حالت ویسکوالاسیسیته بیشتری از خون تمایل به کاهش سرعت محوری جریان خون دارد. در نتیجه در زمان $t=0.45$ با افزایش عدد ویسنبرگ سرعت محوری جریان خون کاهش می‌یابد.

مختلف شبکه برای سرعت محوری جریان خون در رگ گرفته‌شده‌ی مخروطی ارایه شده است. یکی از مسایل مهم در حل عددی استفاده از شبکه‌ای است که نتایج حاصل از آن مستقل از تعداد و اندازه المان‌ها باشد. این شبیه‌سازی در مورد مطالعه استقلال از شبکه بودن به منظور بررسی خطا مرتبط با اندازه‌های شبکه استفاده می‌شود که نمایانگر این است که سه مش‌بندی ارایه شده همپوشانی خوبی دارند. این امر نشانگر مستقل بودن مسئله از شبکه است.

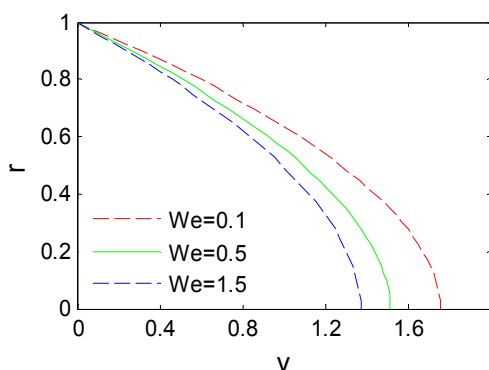
نمودار سرعت محوری در راستای شعاع بی‌بعد در طول رگ با گرفتگی برای مقادیر مختلف زاویه‌ی مخروطی در شکل ۳ نشان داده شده است. دیده می‌شود که در زمان $t=0.45$ سرعت محوری یک تابع صعودی از زاویه‌ی مخروطی می‌باشد و منحنی رگ غیرمخروطی مابین



شکل ۲: مقایسه نتایج حاصل با نتایج [۱۶] و مقایسه پروفیل سرعت برای اندازه‌های شبکه‌های مختلف



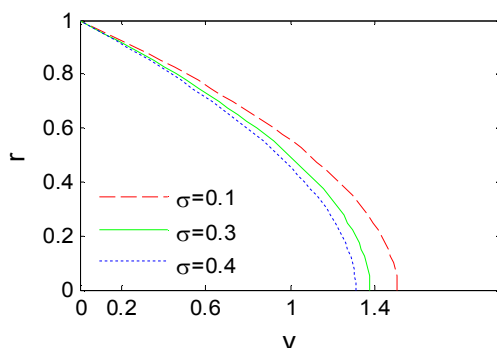
شکل ۳: سرعت محوری در زوایای مخروطی مختلف



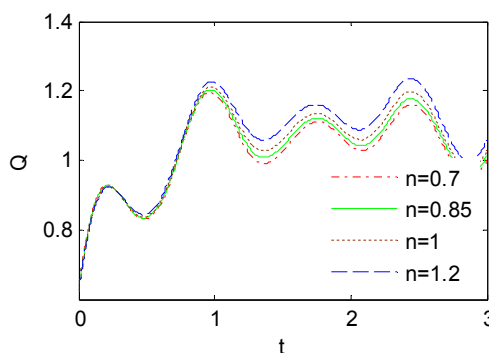
شکل ۴: سرعت محوری جریان خون برای اعداد مختلف ویسنبرگ

شکل ۶ بررسی شده است. اگر $n < 1$ نشان دهنده خون سالم می‌باشد، زمانی که $n = 1$ سیال نیوتنی با اینکه رفتار جریان خون در این مطالعه غیرنیوتنی می‌باشد. و زمانی که $n > 1$ نشان دهنده غلظت خون بالا در بدن می‌باشد. در نتیجه با افزایش شاخص پاورلاو دبی حجمی افزایش می‌یابد، در نتیجه سرعت جریان خون افزایش می‌یابد و در مقابل مقاومت در برابر جریان در خون کاهش می‌یابد.

نمودار سرعت محوری از تغییرات شعاعی برای سه مقدار مختلف گرفتگی $\sigma = 0.1, 0.3, 0.4$ در بیشترین مقطع گرفتگی $z = 1.8$ در زمان $t = 0.45$ در شکل ۵ با هم مقایسه شده است. همان‌طور که در شکل می‌بینید با افزایش میزان گرفتگی در رگ الاستیک سرعت محوری جریان خون کاهش می‌یابد. تاثیر شاخص پاورلاو روی دبی حجمی در زمان $t = 3$ در



شکل ۵: سرعت محوری برای میزان گرفتگی مختلف



شکل ۶: دبی حجمی برای مقادیر مختلف شاخص پاورلاو

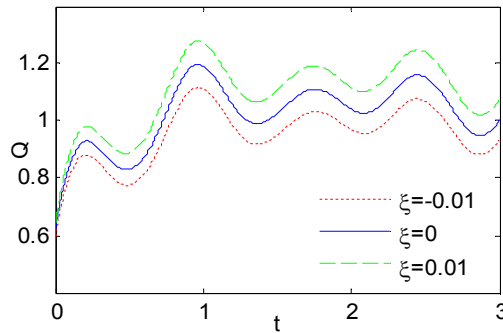
هر دو مقدار پارامتر هندسی، با افزایش مقدار گرفتگی دبی حجمی کاهش یافته است.

نمودار سه بعدی دبی حجمی بی‌بعد نسبت به طول رگ در زمان $t=1$ برای پارامتر هندسی $n=4$ و میزان گرفتگی $\sigma=0.1a$ در شکل ۹ نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود با افزایش زمان دبی حجمی بی‌بعد افزایش می‌یابد.

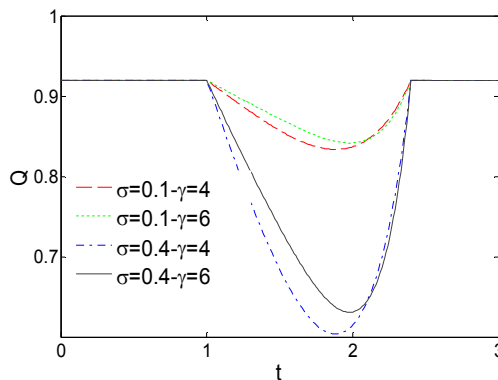
شکل ۱۰ نشانگر مقاومت در برابر جریان در رگ گرفته برای مقادیر مختلف عدد ویسنبرگ می‌باشد. مشاهده می‌شود که در زمان $t=3$ با افزایش عدد ویسنبرگ مقاومت در برابر جریان افزایش می‌یابد. واضح است که رفتار غیردائم جریان، مقاومت در برابر جریان را تحت تاثیر قرار می‌دهد. همچنین رفتار پالسی جریان خون را در دوره‌های مختلف قلبی در این شکل نشان داده شده است.

در شکل ۷ رفتار دبی حجمی در رگ گرفته شده برای مقادیر مختلف از زوایای مخروطی $\xi = -0.5, 0, 0.5$ در بیشترین مقطع گرفتگی در زمان $t=3$ مورد مقایسه قرار گرفته است. باتوجه به شکل دبی حجمی برای رگ مخروطی منبسط شونده در مقایسه با دبی حجمی رگ مخروطی منقبض شونده مقدار بالاتری دارد. در واقع با افزایش زاویه مخروطی، دبی حجمی افزایش می‌یابد.

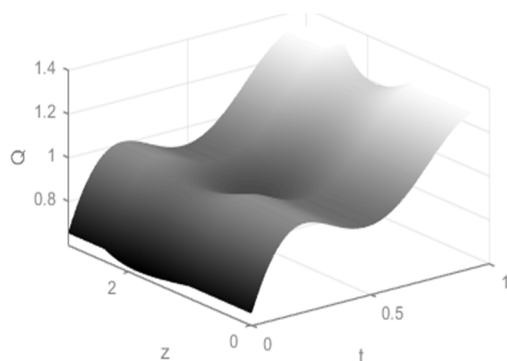
شکل ۸ نشان دهنده توزیع دبی حجمی در ناحیه گرفتگی برای مقادیر مختلف پارامتر هندسی و مقدار گرفتگی‌های متفاوت در زمان $t=3$ می‌باشد. با مقایسه نمودارهای مربوط به پارامترهای هندسی به وضوح دیده می‌شود، با افزایش مقدار پارامتر هندسی دبی حجمی افزایش یافته است. از آنجایی که دبی حجمی با مقاومت در برابر جریان رابطه عکس دارد، باعث شده رفتار دبی حجمی در شکل عکس رفتار مقاومت در برابر جریان باشد، بطوری که برای



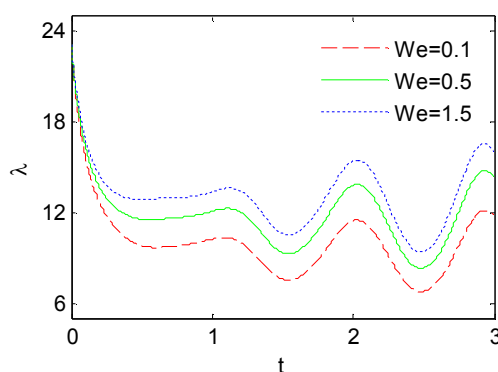
شکل ۷: دبی حجمی برای زوایای مخروطی مختلف



شکل ۸: توزیع دبی حجمی در ناحیه گرفته شده



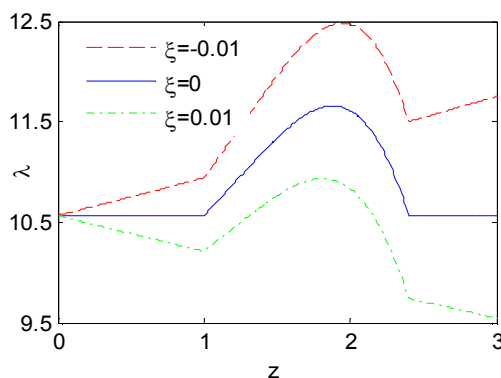
شکل ۹: توزیع دبی حجمی نسبت به طول رگ در گام زمانی محدود



شکل ۱۰: مقاومت در برابر جریان برای اعداد ویسنبرگ مختلف

شونده در مقایسه با مقاومت در برابر جریان در رگ مخروطی منقبض شونده مقدار پایین‌تری دارد و منحنی رگ غیر مخروطی بین آن‌ها قرار دارد.

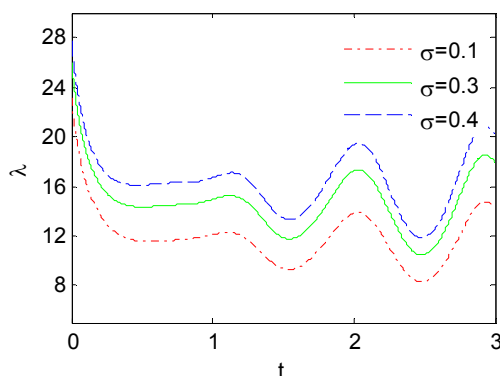
در شکل ۱۱ مقاومت در برابر جریان خون برای زوایای مختلف مخروطی در بیشترین مقطع گرفتگی در زمان $t=0.45$ بررسی شده است. با توجه به این شکل مقاومت در برابر جریان برای رگ مخروطی منبسط



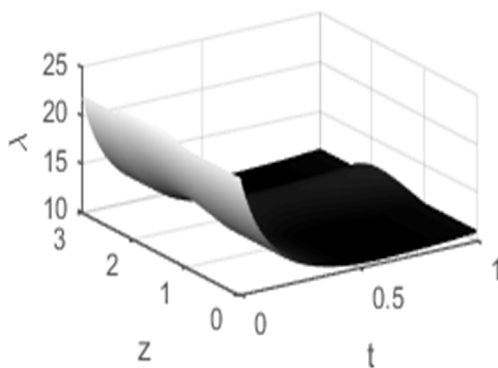
شکل ۱۱: مقاومت در برابر جریان برای زوایای مخروطی مختلف

نمودار سه بعدی مقاومت در برابر جریان در رگ گرفته شده در گام زمانی محدود $t=1$ در شکل ۱۳ نشان داده شده است. با توجه به شکل با افزایش زمان مقاومت در برابر جریان کاهش می‌یابد. با توجه به شکل ۱۰ مقاومت در برابر جریان با دبی حجمی رابطه عکس دارد، این موضوع به وضوح در رابطه (۲۸) مشاهده می‌شود.

شکل ۱۲ نشانگر مقاومت در برابر جریان برای گرفتگی‌های مختلف در زمان $t=3$ در بیشترین مقطع گرفتگی از رگ مفروض است. به دلیل پالسی بودن جریان خون، مقاومت در برابر جریان بعد از طی زمان $t=1.5$ رفتار پالسی یکسانی از خود نشان می‌دهد. با توجه به این شکل با افزایش گرفتگی میزان مقاومت در برابر جریان افزایش یافته است.



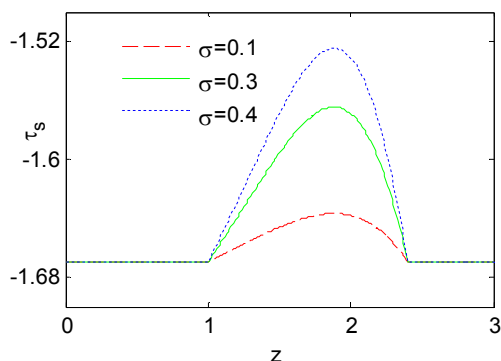
شکل ۱۲: مقاومت در برابر جریان برای میزان گرفتگی‌های مختلف



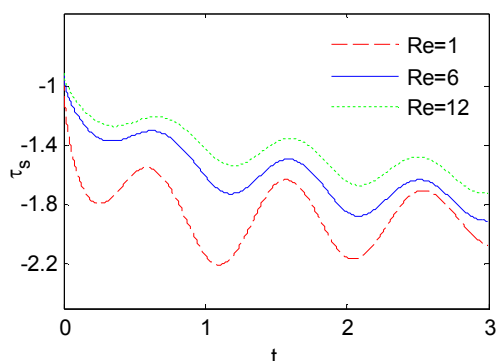
شکل ۱۳: توزیع مقاومت در برابر جریان نسبت به طول رگ در گام زمانی محدود

شکل ۱۵ به منظور بررسی تاثیر عدد رینولدز بر روی تنش برشی دیواره در زمان $t=3$ در نقطه بحرانی $z=1.8$ ارائه شده است. از این شکل می‌توان نتیجه گرفت با افزایش عدد رینولدز از $Re=1$ تا $Re=12$ تنش برشی دیواره افزایش می‌یابد.

تنش برشی دیواره برای مقادیر مختلف گرفتگی در زمان $t=0.45$ در طول ناحیه گرفته شده از رگ در شکل ۱۴ آمده است. با افزایش گرفتگی، تنش برشی دیواره افزایش می‌یابد. همچنین به وضوح در شکل دیده می‌شود که بیشترین مقدار مقاومت در برابر جریان در نقطه حداکثر گرفتگی اتفاق می‌افتد.



شکل ۱۴: تنش برشی دیواره برای میزان گرفتگی‌های مختلف



شکل ۱۵: تنش برشی دیواره برای اعداد رینولدز متفاوت

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مدل ریاضی برای جریان خون پالسی ناپایا در طول رگ گرفته و وابسته به زمان با استفاده از معادلات ساختاری از سیال کراس در نظر گرفتیم. معادلات حاکم تحت شرط گرفتگی خفیف مدل‌سازی شده و با استفاده از روش عددی تفاضلات متناهی حل شده‌اند. این مدل شامل اثرات مخروطی و انعطاف‌پذیری رگ گرفته شده می‌باشد. مهمترین یافته‌ها در مطالعه حاضر از قرار زیر می‌باشند.

۱. گرفتگی حاضر سرعت محوری جریان خون را در رگ الاستیک کاهش می‌دهد. در حالی که در رگ غیرالاستیک این گرفتگی موجب افزایش سرعت محوری جریان خون می‌شود.
۲. سرعت محوری تابع نزولی از عدد ویسنبِrg می‌باشد، در حالی که مقاومت در برابر جریان تابعی صعودی از عدد ویسنبِrg می‌باشد.

۳. با افزایش میزان گرفتگی و منقبض شدن رگ مخروطی سرعت محوری و دبی حجمی کاهش می‌یابد ولی مقاومت در برابر جریان و تنش برشی دیواره افزایش می‌یابد. در حالی که در رگ منبسط شونده مخروطی رفتار عکسی اتفاق می‌افتد.

۴. با افزایش زاویه مخروطی سرعت محوری و دبی حجمی افزایش می‌یابد از طرفی سرعت جریان خون با مقاومت در برابر جریان رابطه عکس دارد در نتیجه مقاومت در برابر جریان و تنش برشی کاهش می‌یابد.

۷- فهرست علائم

d	طول ناحیه‌ی بالادست
f_p	فرکانس پالسی
k_r	پارامتر نوسان
l_0	طول ناحیه‌ی گرفتگی
$\lambda \geq 2$	پارامتر هندسی مربوط به هندسه‌ی گرفتگی

شعاع رگ در ناحیه‌ی فراتر از گرفتگی	a
دبی حجمی	Q
عدد رینولدز	Re
عدد ویسنبرگ	We
فشار	p
زمان	t
سرعت محوری	v
سرعت شعاعی	u
سرعت متوسط	U_0
شاخص پاورلاو	n
تنش تانسور	S

علایم بیوانی

طول گام زمانی	Δt
طول گام شعاعی	Δr
طول گام محوری	Δz
زاویه فاز	φ
حداکثر گرفتگی	σ
مقاومت در برابر جریان	λ
تنش برشی دیواره	τ_s
زاویه مخروطی	ϕ
ویسکوزیته‌ی برشی صفر	μ_0
ویسکوزیته‌ی برشی بی‌نهایت	μ_∞

اندیس‌ها

گام محوری	i
گام شعاعی	j
گام زمانی	k

physiologic conditions. *Korea-Australia Rheology Journal*, 20(4), 197-211.

فهرست منابع

[9] Moayeri, M. S., & Zendehebudi, G. R. (2003). Effects of elastic property of the wall on flow characteristics through arterial stenoses. *Journal of Biomechanics*, 36(4), 525-535.

[10] Abdullah, I., & Amin, N. (2010). A micropolar fluid model of blood flow through a tapered artery with a stenosis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 33(16), 1910-1923.

[11] Marques, P. F., Oliveira, M. E. C., Franca, A. S., & Pinotti, M. (2003). Modeling and simulation of pulsatile blood flow with a physiologic wave pattern. *Artificial organs*, 27(5), 478-485.

[12] Haghghi, A. R., Asl, M. S., & Kiyasatfar, M. (2015). Mathematical modeling of unsteady blood flow through elastic tapered artery with overlapping stenosis. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 37(2), 571-578.

[13] Mukhopadhyay, S., & Layek, G. (2008). Numerical modeling of a stenosed artery using mathematical model of variable shape. *AAM Intern*, 3(6), 308-328.

[14] Haghghi, A. R., & Asl, M. S. (2015). Mathematical modeling of micropolar fluid flow through an overlapping arterial stenosis. *International Journal of Biomathematics*, 8(04), 1550056.

[15] Ali, N., Zaman, A., & Sajid, M. (2014). Unsteady blood flow through a tapered stenotic artery using Sisko model. *Computers & Fluids*, 101, 42-49.

[16] Mandal, P. K. (2005). An unsteady

[1] Shillingford, J. P. (1965). *Physiology and Biophysics of the Circulation*. Proceedings of the Royal Society of Medicine, 58(12), 1103.

[2] Pedley, T. J. (1980). *The fluid mechanics of large blood vessels*: Cambridge Univ.

[3] Tu, C., & Deville, M. (1996). Pulsatile flow of non-Newtonian fluids through arterial stenoses. *Journal of biomechanics*, 29(7), 899-908.

[4] Chakravarty, S., & Mandal, P. K. (2004). Unsteady flow of a two-layer blood stream past a tapered flexible artery under stenotic conditions. *Computational Methods in Applied Mathematics Comput. Methods Appl. Math.*, 4(4), 391-409.

[5] Sankar, D. S. (2011). Two-phase non-linear model for blood flow in asymmetric and axisymmetric stenosed arteries. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(1), 296-305.

[6] Zaman, A., Ali, N., Sajid, M., & Hayat, T. (2015). Effects of unsteadiness and non-Newtonian rheology on blood flow through a tapered time-variant stenotic artery. *AIP advances*, 5(3), 037129.

[7] Chan, W. Y., Ding, Y., & Tu, J. Y. (2007). Modeling of non-Newtonian blood flow through a stenosed artery incorporating fluid-structure interaction. *Anziam Journal*, 47, 507-523.

[8] Yilmaz, F., & Gundogdu, M. Y. (2008). A critical review on blood flow in large arteries; relevance to blood rheology, viscosity models, and

- [24] Ikbal, M. A., Chakravarty, S., & Mandal, P. K. (2009). Two-layered micropolar fluid flow through stenosed artery: effect of peripheral layer thickness. *Computers & Mathematics with Applications*, 58(7), 1328-1339.
- [25] Haghghi, A. R., & Chalak, S. A. (2017). Mathematical modeling of blood flow through a stenosed artery under body acceleration. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 39(7), 2487-2494.
- [26] Sankar, D. S., & Lee, U. (2011). FDM analysis for MHD flow of a non-Newtonian fluid for blood flow in stenosed arteries. *Journal of mechanical science and technology*, 25(10), 2573.
- [27] Mustapha, N., Mandal, P. K., Johnston, P. R., & Amin, N. (2010). A numerical simulation of unsteady blood flow through multi-irregular arterial stenoses. *Applied Mathematical Modelling*, 34(6), 1559-1573.
- [28] Young, D. F. (1968). Effect of a time-dependent stenosis on flow through a tube. *Journal of Engineering for Industry*, 90(2), 248-254.
- [29] Zaman, A., Ali, N., Bég, O. A., & Sajid, M. (2016). Heat and mass transfer to blood flowing through a tapered overlapping stenosed artery. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 95, 1084-1095.
- [30] Ismail, Z., Abdullah, I., Mustapha, N., & Amin, N. (2008). A power-law model of blood flow through a tapered overlapping stenosed artery. *Applied Mathematics and Computation*, 195(2), 669-680.
- [31] Ling, S. C., & Atabek, H. B. (1972). A nonlinear analysis of pulsatile flow in analysis of non-Newtonian blood flow through tapered arteries with a stenosis. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40(1), 151-164.
- [17] Haghghi, A. R., & Asl, M. S. (2015). Numerical simulation of unsteady blood flow through an elastic artery with a non-symmetric stenosis. *Modares Mechanical Engineering*, 14(10), 26-34.
- [18] Sankar, D. S. (2016). Perturbation analysis for pulsatile flow of Carreau fluid through tapered stenotic arteries. *International Journal of Biomathematics*, 9(04), 1650063.
- [19] Ali, N., Zaman, A., Sajid, M., Nieto, J. J., & Torres, A. (2015). Unsteady non-Newtonian blood flow through a tapered overlapping stenosed catheterized vessel. *Mathematical biosciences*, 269, 94-103.
- [20] Shaw, S., Murthy, P. V. S., & Pradhan, S. C. (2010). The effect of body acceleration on two dimensional flow of Casson fluid through an artery with asymmetric stenosis. *The Open Conservation Biology Journal*, 2(1).
- [21] Sankar, D. S., & Lee, U. (2009). Mathematical modeling of pulsatile flow of non-Newtonian fluid in stenosed arteries. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(7), 2971-2981.
- [22] Chakravarty, S., & Mandal, P. K. (2005). Effect of surface irregularities on unsteady pulsatile flow in a compliant artery. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40(10), 1268-1281.
- [23] Sankar, D. S. (2011). Two-phase non-linear model for blood flow in asymmetric and axisymmetric stenosed arteries. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46(1), 296-305.

arteries. *Journal of Fluid Mechanics*, 55(3), 493-511.

[32] Amsden, A. A., & Harlow, F. H. (1970). The SMAC method: a numerical technique for calculating incompressible fluid flows (No. LA--4370). Los Alamos Scientific Lab., N. Mex.

[33] Markham, G., & Proctor, M. V. (1983). Modifications to the two-dimensional incompressible fluid flow code ZUNI to provide enhanced performance. 63, M82.