

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال ششم، شماره بیست و پنجم، مرداد و شهریور ۱۳۹۹

شماره شاپا: ۵۸۸۸-۲۵۸۸

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## آرنز منظم از عمل‌های مدولی و الحاقی دوم از یک مشتق

مهرداد شعبانی سلطانمرادی<sup>۱</sup>، داوود ابراهیمی بقا<sup>۲\*</sup>

<sup>(۱)</sup> دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز، تهران، ایران

<sup>(۲)</sup> دانشیار گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۴/۱۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۱۲/۲۲

### چکیده

فرض کنیم  $A$  یک جبر باناخ و  $A''$  باناخ  $A$ -مدول باشد. در این مقاله معیاری برای آرنز منظم نگاشت  $T: A \times A'' \rightarrow A''$  ارائه می‌دهیم و متعاقب آن معادلی برای آرنز منظم جبر باناخ  $A''$  بدست می‌آوریم. سپس با استفاده از عمل‌های مدولی و تحت شرایطی نشان می‌دهیم که الحاقی دوم از مشتق  $A \rightarrow A'''$ : خود نیز یک مشتق می‌باشد و سرانجام نتیجه ایی برای مشتق درونی آن بدست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: جبر باناخ، آرنز منظم، عمل‌های مدولی باناخ.

## ۱- مقدمه

همچنین برای  $F\Delta G, F, G \in A''$  در  $F\nabla G$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \langle a', F\Delta G \rangle &= \langle Ga', F \rangle \\ \langle a', F\nabla G \rangle &= \langle a'F, G \rangle \quad (a' \in A') \end{aligned}$$

$A''$  به ترتیب با هر دو ضرب  $\Delta$  و  $\nabla$  یک جبر باناخ است.

این ضرب‌ها به ترتیب ضرب‌های اول و دوم آرنتز روی  $A''$  نامیده می‌شود. جبر  $A$  آرنتز منظم نامیده می‌شود اگر هر دو ضرب‌های  $\Delta$  و  $\nabla$  بر هم منطبق باشند. خواننده برای اطلاعات بیشتر از ضرب‌های آرنتز به [9] و همچنین در مورد مسئله آرنتز منظم روی دوگان جبرهای باناخ می‌تواند به [5] رجوع کند.

فرض کنیم  $A$  جبر باناخ باشد، به وضوح  $A^{(4)}$  با هر یک از چهار ضرب آرنتز زیر یک جبر باناخ است. این جبرها به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} (A^{(4)}, \Delta\Delta) &= ((A'', \Delta)'', \Delta) \\ (A^{(4)}, \Delta\nabla) &= ((A'', \Delta)'', \nabla) \\ (A^{(4)}, \nabla\Delta) &= ((A'', \nabla)'', \Delta) \\ (A^{(4)}, \nabla\nabla) &= ((A'', \nabla)'', \nabla) \end{aligned}$$

۲- بررسی آرنتز منظم نگاشت  $T: A \times A'' \rightarrow A''$ 

فرض کنیم  $A$  باناخ  $A$ -مدول باشد، آنگاه  $A''$  باناخ  $A$ -مدول است. حال فرض کنیم  $A''$  باناخ  $A$ -مدول چپ و  $T: A \times A'' \rightarrow A''$  نگاشت دو خطی باشد. الحاقی  $T^*: A''' \times A \rightarrow A'''$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \langle T^*(a''', a), b'' \rangle \\ = \langle a''', T(a, b'') \rangle \end{aligned}$$

که در آن  $a''', a \in A, b'' \in A''$  و همچنین یک نگاشت دو خطی نیز می‌باشد. با قرار دادن  $T^{**}: A^{(4)} \times A''' \rightarrow A'$  نگاشت  $T^{**} = (T^*)^*$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \langle T^{**}(a^{(4)}, a'''), b \rangle \\ = \langle a^{(4)}, T^*(a''', b) \rangle \end{aligned}$$

که در آن  $a^{(4)} \in A^{(4)}$  و  $a''' \in A'''$ .  $b \in A$  مشابه داریم:

$$T^{***}: A'' \times A^{(4)} \rightarrow A^{(4)}$$

آرنتز نشان داد که نگاشت دو خطی کراندار  $f: X \times Y \rightarrow Z$  روی فضاهای نرم‌دار عموماً توسیع‌های متفاوتی به نگاشت‌های دو خطی  $f^{***}$  و  $f^{r***}$  دارند [2]. زمانیکه این توسیع‌ها برابر باشند  $f$  آرنتز گفته می‌شود. جبر باناخ  $A$  آرنتز منظم نامیده می‌شود هرگاه دو ضرب تعریف شده  $\Delta$  و  $\nabla$  روی  $A''$  (دوگان دوم  $A$ ) برابر باشند.

اگر فضای نرم‌دار  $A, X$ -مدول باشد محمدزاده و ویشکی در مقاله [8] معیاری برای آرنتز منظم بدست آورده و به دنبال آن معادلی برای آرنتز منظم  $A$  ارائه داده‌اند. در این مقاله  $X = A''$  (جبر باناخ با ضرب آرنتز) به عنوان  $A$ -مدول در نظر گرفته شده و به طور مشابه معیاری برای آرنتز منظم نگاشت  $T: A \times A'' \rightarrow A''$  بدست می‌آوریم (قضیه ۲.۱)، و همچنین معادلی برای آرنتز منظم  $A''$  ارائه می‌دهیم. سپس معیار فوق را برای عمل‌های مدولی  $A''$  به عنوان باناخ  $A$ -مدول بکار می‌گیریم و به عمل‌های مدولی از  $A''$  (مجهر با هر دو ضرب آرنتز) روی  $A'''$  و  $A^{(5)}$  ارتقا می‌دهیم. به این طریق گزاره‌های ۱.۳ و ۳.۳ که تعمیم بعضی از نتایج [3, 6] است ارائه می‌دهیم.

برای باناخ  $A$ -مدول  $A''$  الحاقی دوم  $A^{(5)} = (A''')'' = (A'', \Delta) \rightarrow D^{**}$  از مشتق  $D: A \rightarrow A'''$  توسیعی از  $D$  است و تحت شرایطی نشان می‌دهیم  $D^{**}$  خود نیز یک مشتق است. در مقاله [6] دیلز این مساله را برای حالت خاص  $A'' = A$ ، مورد مطالعه قرار داده و نشان داد که  $D^{**}$  یک مشتق است اگر و تنها اگر  $D^{**}(A'') \cdot A'' \subseteq A'$  [6, 1.7] قضیه سپس در انتها نتایجی برای مشتق  $D: A \rightarrow A'''$  بدست می‌آوریم. در واقع به تعمیمی از نتایج [3] و [6] می‌پردازیم. خواننده می‌تواند برای اصطلاحات علمی و موارد پایه به [4] رجوع کند.

فرض کنیم  $A$  جبر باناخ باشد. برای  $a' \in A'$  و  $Fa', F \in A''$  در صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \langle a, Fa' \rangle &= \langle a'a, F \rangle \\ \langle a, a'F \rangle &= \langle aa', F \rangle \quad (a \in A) \end{aligned}$$

که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T^{r****}(a'', b^{(4)})$$

$$= w^* \lim_{\beta} \lim_{\alpha} T(a_{\alpha}, b''_{\beta})$$

که در آن  $(a_{\alpha})$  و  $(b''_{\beta})$  به ترتیب نتهایی در  $A$  و  $A''$  همگرا به  $a''$  و  $b^{(4)}$  در توپولوژی ضعیف ستاره هستند.

نگاشت  $T$  آرنز منظم نامیده می‌شود هرگاه  $T^{***} = T^{r****}$

با قضیه اصلی این بخش شروع می‌کنیم که معیاری برای آرنز منظم نگاشت دوخطی را فراهم می‌کند.

**قضیه ۲-۱.** فرض کنیم  $A$  جبر باناخ و نگاشت

$$T: A \times A'' \rightarrow A''$$

با ضرب مدولی چپ باشد موارد زیر معادلند:

الف)  $T$  آرنز منظم است

$$T^{****} = T^{r****}$$

$$T^{****}(A''', A'') \subseteq A''' \quad \text{ب)}$$

د) نگاشت خطی  $T^*(a''', a): A \rightarrow A'''$  برای هر

$a'' \in A''$  ضعیفاً فشرده است.

**برهان.** فرض کنیم  $a'' \in A''$ ،  $b^{(4)} \in A^{(4)}$  و

$c^{(5)} \in A^{(5)}$ . برای هر  $c''' \in A'''$  اگر (الف) برقرار

باشد آنگاه

$$\langle T^{****}(c^{(5)}, a''), b^{(4)} \rangle$$

$$= \langle c^{(5)}, T^{***}(a'', b^{(4)}) \rangle$$

$$= \langle c^{(5)}, T^{r****}(a'', b^{(4)}) \rangle$$

$$= \langle c^{(5)}, T^{r****}(b^{(4)}, a'') \rangle$$

$$= \langle a'', T^{r****}(c^{(5)}, b^{(4)}) \rangle$$

$$= \langle T^{r****}(a'', c^{(5)}), b^{(4)} \rangle$$

بنابراین ادعای  $T^{****} = T^{r****}$  ثابت شده است.

مفهوم (الف) به (ج) صراحتاً از این واقعیت پیروی می‌کند که

$$T^{****}(a''', b'') = T^{r****}(b'', a''')$$

$$= T^{r****}|_{A'' \times A'''}(b'', a''')$$

$$= T^{r**}(b'', a''') \in A'''$$

بند (ج) معادل (د) است و واضح می‌باشد.

بعلاوه اگر قرار دهیم  $L = T^*(a''', \cdot)$  آنگاه

$$\langle T^{***}(a'', a^{(4)}), a''' \rangle$$

$$= \langle a'', T^{**}(a^{(4)}, a''') \rangle$$

که در آن  $a^{(4)} \in A^{(4)}$  و  $a''' \in A'''$ ،  $a'' \in A''$  حال با روندی مشابه  $T^{****}$  و  $T^{****}$  تعریف می‌شوند.

نگاشت  $T^r$  را نگاشت جابجاگر  $T$  گوئیم، برای  $a \in A$  و  $a'' \in A''$  نگاشت دو خطی کراندار  $T^r: A'' \times A \rightarrow A''$  به صورت  $T^r(a'', a) = T(a, a'')$  تعریف می‌شود.

برای  $a, b \in A$  و  $a^{(n)}, b^{(n)} \in A^{(n)}$  الحاقی  $T^{r*}: A''' \times A'' \rightarrow A'$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle T^{r*}(a''', a''), b \rangle$$

$$= \langle a''', T^r(a'', b) \rangle$$

الحاقی  $T^{r**}: A'' \times A''' \rightarrow A''$  از  $T^{r*}$  نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle T^{r**}(a'', a'''), b'' \rangle =$$

$$\langle a'', T^{r*}(a''', b'') \rangle$$

الحاقی  $T^{r***}: A^{(4)} \times A'' \rightarrow A^{(4)}$  از  $T^{r**}$  نیز مشابه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle T^{r***}(a^{(4)}, a''), a''' \rangle =$$

$$\langle a^{(4)}, T^{r**}(a'', a''') \rangle$$

به روش مشابه الحاقی  $T^{r****}$  و  $T^{r****}$  به ترتیب از  $T^{r***}$  و  $T^{r***}$  ساخته می‌شود.

نگاشت  $T^{***}$  توسعه یکتایی از  $T$  است به طوریکه برای هر  $\hat{y}'' \in A^{(4)}$ ،  $\hat{y}'' \in A^{(4)}$  پیوسته باشد.

همچنین برای هر  $a \in A$ ،  $T^{***}(a, \cdot)$  پیوسته است همچنین همانند فوق  $T^{r****}: A'' \times A'''$

$A^{(4)} \rightarrow A^{(4)}$  نیز توسعه یکتایی از  $T$  است به طوریکه

$T^{r****}(\cdot, \hat{a})$  و  $a'' \in A''$  برای هر  $T^{r****}(a'', \cdot)$

نیز برای هر  $\hat{a} \in A$ ،  $T^{r****}(\cdot, \hat{a})$  پیوسته است. به آسانی ثابت

می‌شود که

$$T^{***}(a'', b^{(4)}) =$$

$$w^* \lim_{\alpha} \lim_{\beta} T(a_{\alpha}, b''_{\beta})$$

$$T^{****}(A''', A'') \subseteq T^{****}(A^{(5)}, A'') \subseteq A'''$$

بنا به قضیه ۱-۲،  $T$  آرئز منظم است و یا معادلا

$$T^{r****} = T^{r****}$$

$$(T^{r*})^{****}(A'', A^{(5)}) = T^{r****}(A'', A^{(5)}) \\ = T^{****}(A^{(5)}, A'') \subseteq A'''$$

حال مجدداً بنا به قضیه ۱-۲،  $T^*$  نیز آرئز منظم است.  $\square$

### ۳- بررسی آرئز منظم $(\pi_1, A'', \pi_2)$ به عنوان

#### $A$ -مدول و مشتق الحاقی دوم $D: A \rightarrow A'''$

فرض کنیم  $A$  جبر باناخ باشد، آنگاه  $(A'', \Delta)$  جبر باناخ و  $\pi_1: A \times A'' \rightarrow A''$  نگاشتی دو خطی کراندار است.

جفت  $(\pi_1, A'')$  باناخ  $A$ -مدول چپ نامیده میشود اگر برای هر  $a, b \in A$  و  $F \in A''$

$$\pi_1(ab, F) = \pi_1(a, \pi_1(b, F))$$

مدول راست  $(A'', \pi_2)$  مشابهاً تعریف می‌شود. سه

تایی  $(\pi_1, A'', \pi_2)$  باناخ  $A$ -مدول گفته می‌شود اگر  $(\pi_1, A'')$  و  $(A'', \pi_2)$  به ترتیب باناخ  $A$ -مدول چپ

و راست باشند و برای هر  $a, b \in A$  و  $F \in A''$

$$\pi_1(a, \pi_2(F, b)) = \pi_2(\pi_1(a, F), b)$$

طور بدیهی  $(\pi_2^{r*r}, A''', \pi_1^*)$  دوگان باناخ  $A$ -مدول

$(\pi_1^{***}, A^{(4)}, \pi_2^{***})$  است. همچنین  $(\pi_1, A'', \pi_2)$

باناخ  $(A'', \Delta)$ -مدول و  $(\pi_1^{r****}, A^{(4)}, \pi_2^{r****})$

باناخ  $(A'', \nabla)$ -مدول می‌باشد. برای اثبات، قوانین

شرکت پذیری را با توجه به اینکه  $(\pi_1, A'', \pi_2)$  باناخ

$A$ -مدول است بررسی و دنبال می‌کنیم.

حال اگر روند دوگان فوق را ادامه دهیم به موارد زیر

دست پیدا می‌کنیم  $(\pi_2^{r****}, A^{(5)}, \pi_1^{****})$  بعنوان

دوگان باناخ  $(A'', \Delta)$ -مدول از  $(\pi_1^{***}, A^{(4)}, \pi_2^{***})$

و  $(\pi_2^{r****}, A^{(5)}, \pi_1^{r****})$  بعنوان دوگان باناخ

$(A'', \nabla)$ -مدول از  $(\pi_1^{r****}, A^{(4)}, \pi_2^{r****})$  است.

بر طبق شمول‌های زیر

$$\pi_2^{r****}(A'', A''') = \pi_2^{**}(A'', A''') \subseteq A''''$$

و

$$\pi_1^{r****}(A''', A'') = \pi_1^{r****}(A''', A'') \subseteq A''''$$

نتیجه می‌گیریم که  $(\pi_2^{**}, A''')$  یک  $(A'', \Delta)$ -زیر

$L^{**} = T^{****}(a''', \cdot)$  به آسانی بدست می‌آید. حال

نتیجه از این واقعیت پیروی می‌کند که  $L$  ضعیفاً فشرده

است اگر و تنها اگر  $L^{**}(A'') \subseteq A'''$

برای اثبات (ج) به (الف) فرض کنیم

$T^{****}(A''', A'') \subseteq A'''$  و  $(a_\alpha)$  و  $(b_\beta'')$  به

ترتیب‌نهایی در  $A$  و  $A''$  همگرا به  $a''$  و  $b^{(4)}$  در

توپولوژی ضعیف ستاره باشند آنگاه

$$\langle T^{***}(a'', b^{(4)}), c''' \rangle$$

$$= \langle T^{****}(c''', a''), b^{(4)} \rangle$$

$$= \lim_\beta \langle T^{****}(c''', a''), b_\beta'' \rangle$$

$$= \lim_\beta \langle T^{***}(a'', b_\beta''), c''' \rangle$$

$$= \lim_\beta \langle a'', T^{**}(b_\beta'', c''') \rangle$$

$$= \lim_\beta \lim_\alpha \langle T^{**}(b_\beta'', c'''), a_\alpha \rangle$$

$$= \langle T^{r****}(a'', b^{(4)}), c''' \rangle$$

و این منتج به این است که  $T$  آرئز بوده و اثبات راکامل

می‌کند.  $\square$

بعنوان یک کاربرد نخست از قضیه ۱-۲، نتایج زیر را

ارائه می‌دهیم [6].

### لم ۲-۲. فرض کنیم $A$ جبر باناخ و نگاشت

$T: A \times A'' \rightarrow A''$  با ضرب مدولی چپ باشد موارد

زیر معادلند:

(الف)  $T$  و  $T^{r*}$  آرئز منظم اند

(ب)  $T^{r****} = T^{r****}$

(ج)  $T^{****}(A^{(5)}, A'') \subseteq A'''$

**برهان.** مفهوم (الف) به (ب) بدیهی است.

اگر (ب) برقرار باشد آنگاه  $T^{****} = T^{r****}$ . بعلاوه

برای هر  $c''' \in A'''$  و  $b^{(4)} \in A^{(4)}$ ،  $a'' \in A''$

$$\langle T^{****}(a^{(5)}, b''), c''' \rangle$$

$$= \langle T^{r****}(c'', a^{(5)}), b'' \rangle$$

$$= \langle T^{r****}(c'', a^{(5)}), b'' \rangle$$

$$= \langle T^{r****}(a^{(5)}, b''), c''' \rangle$$

از اینکه  $T^{r****}(a^{(5)}, b'')$  همواره در  $A'''$  قرار دارد

لذا (ج) برقرار است.

برای رسیدن (ج) به (الف)، از اینکه

اگر نگاشت دو خطی  $\theta_F: A \times A \rightarrow A''$  با ضابطه  
 $\theta_F(a, b) = \pi_1(a, \pi_2(F, b)) =$   
 $\pi_2(\pi_1(a, F), b)$

برای هر  $F \in A''$  و  $a, b \in A$  **برهان** سه تایی  $(\pi_2^{**}, A''', \pi_1^{r**r})$  باناخ  $-A''$  مدول است اگر و تنها اگر برای هر  $a'', b'' \in A'$  و  $F \in A''$  و  $a', a'' \in A'$

$$\langle \pi_1^{r**r}(\pi_2^{**}(b'', a'), a''), F \rangle <$$

$$= \langle \pi_2^{**}(b'', \pi_1^{r**r}(a', a'')), F \rangle >$$

فرض کنیم  $(a_\alpha)$  و  $(b_\beta)$  نت‌هایی در  $A$  همگرا به  $a''$  و  $b''$  در توپولوژی ضعیف ستاره روی  $A''$  باشند سپس با یک بازبینی مستقیم داریم

$$\langle \pi_1^{r**r}(\pi_2^{**}(b'', a'), a''), F \rangle <$$

$$= \lim_\alpha \lim_\beta \langle a', \pi_2(\pi_1(a_\alpha, F), b_\beta) \rangle >$$

$$= \lim_\alpha \lim_\beta \langle a', \theta_F(a_\alpha, b_\beta) \rangle >$$

و

$$\langle \pi_2^{**}(b'', \pi_1^{r**r}(a', a'')), F \rangle <$$

$$\lim_\beta \lim_\alpha \langle a', \pi_1(a_\alpha, \pi_2(F, b_\beta)) \rangle >$$

$$= \lim_\beta \lim_\alpha \langle a', \theta_F(a_\alpha, b_\beta) \rangle >$$

بنابراین  $(\pi_2^{**}, A''', \pi_1^{r**r})$  باناخ  $-A''$  مدول است اگر و تنها اگر برای هر  $F \in A''$   $\theta_F$  آرنز منظم باشد.  $\square$

**لم ۳-۴.** فرض کنیم  $A$  یک  $C^*$ -جبر و  $(\pi_1, A'', \pi_2)$  باناخ  $-A$  مدول باشد. آنگاه  $(\pi_2^{**}, A''', \pi_1^{r**r})$  باناخ  $-A''$  مدول است.

**برهان.** با استفاده از گزاره ۳-۳ برای هر  $F \in A''$  کافی است نشان دهیم که  $\theta_F: A \times A \rightarrow A''$  منظم است. با بکارگیری از قضیه ۱-۲ آرنز بودن  $\theta_F$  معادل با فشردگی ضعیف نگاشت دوخطی  $\theta_F: A \times A \rightarrow A''$  است با این واقعیت که هر نگاشت خطی کراندار از یک  $C^*$ -جبر با پیش‌دوگان  $W^*$ -جبر به طور خودکار ضعیفاً فشرده است [۹، ۱].

مدول چپ از  $A^{(5)}$  است در حالی که  $(A''', \pi_1^{r**r})$  یک  $(A'', \nabla)$ -زیر مدول راست از  $A^{(5)}$  می‌باشد. در حقیقت نتیجه بعدی مشخص می‌کند چه مواقعی  $(\pi_2^{**}, A''', \pi_1^{r**r})$  یک  $(A'', \Delta)$ -زیر مدول چپ از  $(A'', \nabla)$ -زیر مدول راست از  $A^{(5)}$  است.

**گزاره ۳-۱.** فرض کنیم  $(\pi_1, A'', \pi_2)$  باناخ  $-A$  مدول باشد.

(الف)  $(A'', \Delta)$ ،  $-A''$  زیر مدول از  $A^{(5)}$  است اگر و تنها اگر  $\pi_1$  آرنز باشد.

(ب)  $(A'', \nabla)$ ،  $-A''$  زیر مدول از  $A^{(5)}$  است اگر و تنها اگر  $\pi_2$  آرنز باشد.

**برهان.** قسمت (الف) را ثابت می‌کنیم و قسمت (ب) با بحثی مشابه اثبات می‌شود. واضح است  $(A'', \nabla)$ ،  $-A''$  زیر مدول راست از  $A^{(5)}$  است اگر و تنها  $\pi_1^{***}(A''', A') \subseteq A''$  و بنا به قضیه ۱-۲،  $\pi_1$  آرنز است.  $\square$

به عنوان یک دستاورد، نتیجه بعدی را با قرار دادن  $\pi = \pi^r = \pi_2$  و روی  $A''$  از دیلز ارائه می‌دهیم [6].

**لم ۳-۲.** برای جبر باناخ  $A$  موارد زیر معادلند:

(الف)  $A''$  آرنز منظم است.

(ب)  $(A'', \Delta)$ ،  $-A''$  زیر مدول از  $A^{(5)}$  است.

(ج)  $(A'', \nabla)$ ،  $-A''$  زیر مدول از  $A^{(5)}$  است.

فرض کنیم  $(\pi_1, A'', \pi_2)$  باناخ  $-A$  مدول باشد. همانطور که قبل از گزاره ۳-۱ اشاره کردیم  $(\pi_2^{**}, A''')$  و  $(A''', \pi_1^{r**r})$  به ترتیب  $(A'', \Delta)$ -زیر مدول چپ و  $(A'', \nabla)$ -زیر مدول راست هستند. بنابراین اگر ما فرض کنیم که  $A''$  آرنز منظم است آنگاه  $(\pi_2^{**}, A''')$  و  $(A''', \pi_1^{r**r})$  به ترتیب  $-A''$  مدول چپ و راست هستند. نتیجه بعدی در ارتباط با این سوال است که چه موقع  $(\pi_2^{**}, A''', \pi_1^{r**r})$  یک  $-A''$  مدول است.

**گزاره ۳-۳.** فرض کنیم  $A''$  آرنز منظم و  $(\pi_1, A'', \pi_2)$  باناخ  $-A$  مدول باشد، آنگاه  $(\pi_2^{**}, A''', \pi_1^{r**r})$  باناخ  $-A''$  مدول است اگر و تنها

نگاشت ضرب روی  $A$  است. قضیه بعد این مطلب را با یک اثبات مستقیم توسیع می‌دهد.

**قضیه ۳-۶.** فرض کنیم  $(\pi_1, A'', \pi_2)$  باناخ  $A$ -مدول و  $D: A \rightarrow A'''$  یک مشتق باشد،

(الف)  $D^{**}: (A'', \Delta) \rightarrow (A''')'' = A^{(5)}$  مشتق است اگر و تنها اگر  $\pi_2^{r****}(D^{**}(A''), A^{(4)}) \subseteq A'$

(ب)  $D^{**}: (A'', \Delta) \rightarrow (A''')'' = A^{(5)}$  مشتق است اگر و تنها اگر  $\pi_2^{r****}(D^{**}(A''), A^{(4)}) \subseteq A'$

**برهان.** قسمت (الف) را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم

$A''$  و  $a'', b'' \in A''$  برای هر  $a'', b'' \in A^{(4)}$ ، لم ۳-۳ را

بکار می‌گیریم نتیجه می‌شود که  $D^{**}: (A'', \Delta) \rightarrow$

$(A''')'' = A^{(5)}$  مشتق است اگر و تنها اگر

$$\langle \pi_2^{r****}(a'', D^{**}(b'')), c^{(4)} \rangle$$

$$= \langle \pi_2^{r****}(a'', D^{**}(b'')), c^{(4)} \rangle$$

و این برقرار است اگر و تنها اگر

$$\langle \pi_2^{r****}(D^{**}(b'')), c^{(4)} \rangle, a'' \rangle$$

$$= \langle \pi_2^{r****}(D^{**}(b'')), c^{(4)} \rangle, a'' \rangle$$

و یا به طور معادل

$$\pi_2^{r****}(D^{**}(b'')), c^{(4)} \rangle$$

$$= \pi_2^{r****}(D^{**}(b'')), c^{(4)} \rangle$$

باید توجه داشت که  $\pi_2^{r****}(D^{**}(b'')), c^{(4)} \rangle \in A'''$

و  $\pi_2^{r****}(D^{**}(b'')), c^{(4)} \rangle \in A'$  حال آنکه

همچنین

$$\pi_2^{r****}(D^{**}(b'')), c^{(4)} \rangle | A'$$

$$= \pi_2^{r****}(D^{**}(b'')), c^{(4)} \rangle$$

در نتیجه  $D^{**}$  مشتق است اگر و تنها اگر

$\pi_2^{r****}(D^{**}(b'')), c^{(4)} \rangle \in A'$  لذا (الف) ثابت شده

است.  $\square$

لم‌های زیر نتیجه ای از قضیه ۳-۶ می‌باشد.

**لم ۳-۷.** فرض کنیم  $(\pi_1, A'', \pi_2)$  باناخ  $A$ -مدول و

$D: A \rightarrow A'''$  یک مشتق است، اگر  $A$  آرئز منظم باشد

فرض کنیم  $(\pi_1, A'', \pi_2)$  باناخ  $A$ -مدول باشد. یک

نگاشت خطی کراندار  $D: A \rightarrow A'''$  مشتق

گفته می‌شود هرگاه برای هر  $a, b \in A$

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

$$D(ab) = \pi_1^*(D(a), b) + \pi_2^{r**}(a, D(b))$$

در این بخش سوالی که چه مواقع الحاقی دوم از مشتق

$D: A \rightarrow A'''$  دوباره خود مشتق است را بررسی

می‌کنیم. در شروع بخش قبل بخاطر می‌آوریم که

$(\pi_1^{r****}, A^{(5)}, \pi_2^{r****})$  بعنوان باناخ  $(A'', \Delta)$ -

مدول و  $(\pi_2^{r****}, A^{(5)}, \pi_1^{r****})$  بعنوان باناخ

$(A'', \nabla)$ -مدول متعارف هستند، لذا

$D^{**}: (A'', \Delta) \rightarrow (A''')'' = A^{(5)}$  مشتق است

اگر و تنها اگر برای هر  $a'', b'' \in A''$

$$D^{**}(a'' \Delta b'') = \pi_1^{r****}(D^{**}(a''), b'') +$$

$$\pi_2^{r****}(a'', D^{**}(b''))$$

مشابه،  $D^{**}: (A'', \nabla) \rightarrow (A''')'' = A^{(5)}$  مشتق

است اگر و تنها اگر برای هر  $a'', b'' \in A''$

$$D^{**}(a'' \nabla b'') = \pi_1^{r****}(D^{**}(a''), b'') +$$

$$\pi_2^{r****}(a'', D^{**}(b''))$$

**لم ۳-۵.** فرض کنیم  $(\pi_1, A'', \pi_2)$  باناخ  $A$ -مدول

و  $D: A \rightarrow A'''$  یک مشتق باشد. برای هر

$$a'', b'' \in A''$$

(الف)

$$D^{**}(a'' \Delta b'') = \pi_1^{r****}(D^{**}(a''), b'') +$$

$$\pi_2^{r****}(a'', D^{**}(b''))$$

(ب)

$$D^{**}(a'' \nabla b'') = \pi_1^{r****}(D^{**}(a''), b'') +$$

$$\pi_2^{r****}(a'', D^{**}(b''))$$

**برهان.** اثباتی مشابه در [8] آمده است.  $\square$

دیلز در [قضیه 1.7, 6] نشان داده است که الحاقی دوم

$D: A \rightarrow A'$  از مشتق  $D^{**}: (A'', \Delta) \rightarrow A'''$

مشتق است اگر و تنها اگر  $A'' \cdot D^{**}(A'') \subseteq A'$  یا

به طور معادل  $\pi^{r****}(D^{**}(A''), A'') \subseteq A'$  که  $\pi$

$$D(a) = \pi_1^*(x''', a) - \pi_2^{r**r}(a, x''').$$

آنگاه موارد زیر معادلند:

(الف)  $D^{**}: A'' \rightarrow A^{(5)}$  مشتق است.

(ب)  $\pi_2^{****}(D^{**}(A''), A^{(4)}) \subseteq A'$

(ج)  $\pi_2^{r****}(D^{**}(A''), A^{(4)}) \subseteq A'$

نتیجه بعد تعمیمی از [گزاره 1.6, 6] است.

**گزاره ۳-۱۰.** فرض کنیم  $A''$  باناخ  $A$ -مدول باشد به طوری که عمل‌های مدولی آرنز منظم هستند. آنگاه هر مشتق درونی  $D: A \rightarrow A'''$  ضعیفاً فشرده است بعلاوه  $D^{**}: (A'', \nabla) \rightarrow A^{(5)}$  و  $D^{**}: (A'', \Delta) \rightarrow A^{(5)}$  مشتق درونی هستند.

**برهان.** بنا به تعریف مشتق درونی معادلا برای هر  $a'' \in A''$

$$D^{**}(a'') = \pi_1^{****}(x''', a'') - \pi_2^{r****}(x''', a'')$$

بعلاوه اگر فرض کنیم که  $\pi_1$  و  $\pi_2$  آرنز هستند آنگاه بنا به قضیه ۱-۲، بخش دوم عبارت سمت راست متعلق به  $A'''$  می‌باشد بنابراین  $D^{**}(A'') \subseteq A'''$  یا به‌طور معادل  $D$  ضعیفاً فشرده است. با معادل قرار دادن  $\pi_1^{r****} = \pi_1^{****}$  و  $\pi_2^{****r} = \pi_2^{r****}$  نتیجه می‌شود که

$$D^{**}(a'') = \pi_1^{****}(x''', a'') - \pi_2^{****r}(a'', x''')$$

و

$$D^{**}(a'') = \pi_1^{r****r}(x''', a'') - \pi_2^{r****r}(a'', x''')$$

بدان معنی است که هر دوی  $D^{**}: (A'', \Delta) \rightarrow A^{(5)}$  و  $D^{**}: (A'', \nabla) \rightarrow A^{(5)}$  مشتق درونی هستند. □

**قدر دانی:** نویسندگان از داوران گرامی این مقاله بابت مطالعه دقیق و پیشنهادات ارزنده سپاسگزاری می‌کنند.

**لم ۳-۸.** فرض کنیم  $(\pi_1, A'', \pi_2)$  باناخ  $A$ -مدول و  $D: A \rightarrow A'''$  یک مشتق باشد،

(الف) اگر  $\pi_2$  و  $\pi_2^{r*}$  هر دو آرنز منظم باشند آنگاه  $D^{**}: (A'', \Delta) \rightarrow A^{(5)}$  یک مشتق است.

(ب) اگر  $\pi_1$  و  $\pi_1^*$  هر دو آرنز منظم باشند آنگاه  $D^{**}: (A'', \nabla) \rightarrow A^{(5)}$  یک مشتق است.

**برهان.** اگر هر دو  $\pi_2$  و  $\pi_2^{r*}$  آرنز باشند آنگاه با استفاده از لم ۲-۲،  $\pi_2^{****}(D^{**}(A^{(5)}), A^{(4)}) \subseteq A'$  به ویژه  $\pi_2^{****}(D^{**}(A''), A^{(4)}) \subseteq A'$  و نتیجه از قضیه ۳-۶ بدست می‌آید، (ب) مشابه بدست می‌آید. □ بنا به لم اخیر آرنز بودن هر دو  $\pi_2$  و  $\pi_2^{r*}$  در (الف) (هر دو  $\pi_1$  و  $\pi_1^*$  در (ب)) نشان می‌دهد که  $D^{**}$  یک مشتق است. حال بعنوان کاربرد دیگری از قضیه ۳-۶ تعمیم دیگری [6] را ارائه می‌دهیم.

**لم ۳-۹.** فرض کنیم  $(\pi_1, A'', \pi_2)$  باناخ  $A$ -مدول و  $D: A \rightarrow A'''$  یک مشتق فشرده باشد،

(الف) اگر  $\pi_2$  آرنز منظم باشد آنگاه  $D^{**}: (A'', \Delta) \rightarrow A^{(5)}$  یک مشتق است.

(ب) اگر  $\pi_1$  آرنز منظم باشد آنگاه  $D^{**}: (A'', \nabla) \rightarrow A^{(5)}$  یک مشتق است.

**برهان.** از اینکه  $D: A \rightarrow A'''$  ضعیفاً فشرده است،  $D^{**}(A'') \subseteq A'''$  به عبارت دیگر آرنز بودن  $\pi_2$  نتیجه می‌دهد که  $\pi_2^{****}(A''', A^{(4)}) \subseteq A'$  (قضیه ۲-۱). بنابراین  $\pi_2^{****}(D^{**}(A''), A^{(4)}) \subseteq A'$  که بدان معنی است  $D^{**}: (A'', \Delta) \rightarrow A^{(5)}$  مشتق است. □

این بخش را با مشتق درونی به پایان می‌رسانیم. یک نگاشت خطی  $D: A \rightarrow A'''$  مشتق درونی نامیده می‌شود هرگاه برای بعضی  $x''' \in A'''$   $D(a) = x''' \cdot a - a \cdot x'''$  یا به‌طور معادل برای هر  $a \in A$

## فهرست منابع

- [1] **C. A. Akemann**, “*The dual space of an operator algebra*”, Trans. Amer. Math. Soc. 126(1967), 286-302.
- [2] **R. Arens**, “*The adjoint of a bilinear operation*”, Proc. Am. Math. Soc. 2-(1951), 839-848.
- [3] **J. W. Bunce and W. L. Paschke**, “*Derivations on a  $C^*$ -algebra and its double dual*”, J. Funct. Anal, 37(1980), 235-247.
- [4] **H. G. Dales**, “*Banach algebra and automatic continuity*”, Clarendon, Oxford, 2000.
- [5] **H. G. Dales and A. T. M. Lan**, “*The second duals of Beurling algebras*”, Mem. Amer. Math. Soc. 177(836) (2005).
- [6] **H. G. Dales, A. Rodrigues-Palacios and M. V. Velasco**, “*The second transpose of a derivation*”, J. London Math. Soc. 64(2001), 707-721.
- [7] **F. Gourdean**, “*Amenability and the second dual of a Banach algebra*”, Studia Math. 125 (1997), 75-81.
- [8] **S. Mohammad zadeh and H. R. E. Vishki** “*Arens regularity of module actions and the second adjoint of a derivation*”, Bull. Austral. Math. Soc. 77(2008), 465-476.
- [9] **T. W. Palmer**, “*Banach algebras and the general theory of \*-algebras*”, Volume. 1, Cambridge University, (1994).