دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
دوره ششم، شماره بیست و سوم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

بررسی وجود تبدیل زاک در ابرگروه‌های موضعاً فشرده

سیدمحمد طباطبایی[۱]، سهیلا جوکار[۲]*
[۱] دانشیار، گروه ریاضی (آنالیز ریاضی)، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران
[۲] دانشجوی دکتری، گروه ریاضی (آنالیز ریاضی)، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۲/۱۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۴/۲۲

چکیده
فرض کنید K یک ابرگروه موضعاً فشرده است. در این مقاله ابتدا تعریف دامنه اساسی در ابرگروه‌های موضعاً فشرده را بیان و سپس با استفاده از آن، نگاشت بخش بورل را تعریف می‌کنیم. دامنه اساسی زیرمجموعه‌ای از K است که از هر همدسته، یک و تنها یک عضو را دربر دارد. نگاشت بخش بورل درواقع نگاشتی است که هر همدسته را به عضوی از آن که در دامنه اساسی است متناظر می‌کند. در نهایت به عنوان کاربردی از دامنه اساسی، نشان می‌دهیم که اگر K یک ابرگروه موضعاً فشرده و H یک زیرابرگروه جابه‌جایی K باشد، یک تبدیل طول‌پای Z از $L^2(K)$ به $L^2\left(\widehat{H}, L^2(H\backslash K)\right)$ وجود دارد. این تبدیل را تبدیل زاک می‌نامیم و مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای این منظور از دوگان ابرگروه و به‌طور ویژه از قضیه پلانچرل استفاده می‌کنیم. تعریفی که در این مقاله از تبدیل زاک ارائه می‌شود در حقیقت تعمیمی از تبدیل زاک در گروه‌های موضعاً فشرده است.

واژه‌های کلیدی: دامنه اساسی، نگاشت بخش بورل، تبدیل فوریه، دوگان ابرگروه.

*.عهده‌دار مکاتبات: Email: soheilajokar۲۰۰۷@yahoo.com

۱-مقدمه

در اوایل دهه ۱۹۷۰ میلادی مفهوم ابرگروه موضعاً فشرده به منظور توسیع آنالیز هارمونیک گروه‌های موضعاً فشرده تعریف شد و بررسی آنالیز هارمونیک بر ابرگروه‌های موضعاً فشرده مورد توجه قرار گرفت. در دهه‌های گذشته تئوری قاب و آنالیز موجک در آنالیز هارمونیک روی گروه‌های موضعاً فشرده توسیع داده شده است. یک ابزار کلیدی در این زمینه دامنه اساسی و تبدیل زاک است. نویسندگان این مقاله، جهت بررسی و توسیع تئوری قاب و آنالیز موجک در ابرگروه‌های موضعاً فشرده، وجود دامنه اساسی برای ابرگروه‌ها را در [۷] نشان داده‌اند. در این مقاله وجود تبدیل زاک در ابرگروه‌ها بررسی و ضابطه آن ارائه می‌شود. در بخش۲ ابرگروه‌های موضعاً فشرده را تعریف و برخی از خواص اساسی آن را بیان می‌کنیم. مطالب بخش ۲ پیش‌نیازهایی برای اثبات قضیه اصلی این مقاله است. در بخش ۳، به عنوان کاربردی از مباحث مطرح شده در [۷]، با معرفی چند نگاشت، تبدیل زاک در ابرگروه‌های موضعاً فشرده را معرفی می‌کنیم. در این مقاله K یک فضای هاسدورف و موضعاً فشرده است. مجموعه همه اندازه‌های رادون مختلط بر K را با $M(K)$ و مجموعه همه اعضای نامنفی $M(K)$ را با $M^+(K)$ نشان می‌دهیم. δ_x اندازهٔ دیراک در نقطه x است. $C(K)$ فضای همه توابع مختلط مقدار پیوسته بر K است. مجموعه همه اعضای نامنفی $C(K)$ را با $C^+(K)$، مجموعه همه اعضای $C(K)$ که در بی‌نهایت صفر می‌شوند را با $C_\cdot(K)$ و مجموعه همه اعضای $C(K)$ با محمل فشرده را با $C_c(K)$ نشان می‌دهیم.

۲- تعاریف و پیش نیازها

در این بخش ابتدا تعریف ابرگروه را بیان می‌کنیم. برای مطالعه بیشتر در این زمینه به [۱] و [۴] مراجعه کنید.

تعریف۱-۲: فرض کنید K یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده و ناتهی است و در خواص زیر صدق می‌کند:

۱-یک عمل دوتایی مانند $*: M(K)\times M(K)\to M(K)$ موجود است که $(M(K),+,*)$ یک جبر مختلط (شرکت‌پذیر) است.

۲-به‌ازای هر $\mu,\nu\in M^+(K)$، $\mu*\nu\in M^+(K)$ و نگاشت $(\mu,\nu)\mapsto\mu*\nu$ از $M^+(K)\times M^+(K)$ به $M^+(K)$ پیوسته است، که در آن $M^+(K)$ را با توپولوژی مخروطی در نظر می‌گیریم. (ضعیف‌ترین توپولوژی بر $M^+(X)$ که به‌ازای هر $f\in C_C{}^+(X)$، نگاشت‌های $\mu\mapsto\int_X f d\mu$ و $\mu\mapsto\mu(X)$ پیوسته هستند را توپولوژی مخروطی می‌نامیم).

۳-به‌ازای هر $x,y\in K$، $\delta_x*\delta_y$ یک اندازه احتمال با محمل فشرده است.

۴-نگاشت $(x,y)\mapsto supp(\delta_x*\delta_y)$ از $K\times K$ به $\varphi(K)$ پیوسته است، که در آن $\varphi(K)$ فضای همه زیرمجموعه‌های فشردهٔ ناتهی K مجهز به توپولوژی مایکل می‌باشد. (توپولوژی مایکل توپولوژی تولیدشده توسط زیرپایه‌های $\varphi_{U,V}:=\{A\in\varphi(K): A\cap U\neq\varnothing, A\subseteq V\}$ است که در آن U و V زیرمجموعه‌های باز K هستند.)

۵-عنصر منحصر به فرد $e\in K$ چنان موجود است که به ازای هر $x\in K$،
$\delta_x*\delta_e=\delta_e*\delta_x=\delta_x$.

۶-یک همسان‌ریختی $x\mapsto x^-$ از K به روی K موجود است به‌طوری‌که به‌ازای هر $x,y\in K$، $(x^-)^-=x$ و $(\delta_x*\delta_y)^-=\delta_{y^-}*\delta_{x^-}$.

۷-به‌ازای هر $x,y\in K$، $e\in\mathrm{supp}(\delta_x*\delta_y)$ اگر و تنها اگر $x=y^-$.

در این‌صورت $K\equiv(K,*,^-,e)$ یک ابرگروه نامیده می‌شود.

تبصره۲-۲: هر گروه موضعاً فشرده یک ابرگروه است. در واقع اگر G یک گروه موضعاً فشرده باشد و بازگشت را به‌صورت $x\mapsto x^{-1}$ و پیچش را طبق معمول به صورت

$$(\mu*\vartheta)(f):=\int_G\int_G f(xy)d\mu(x)d\vartheta(y),$$

که در آن $f\epsilon C_\cdot(G)$، تعریف کنیم، آن‌گاه G دارای ساختار ابرگروهی است.

تعریف۳-۲: ابرگروه K جابه‌جایی است هرگاه به‌ازای هر $x,y\in K$، $\delta_x*\delta_y=\delta_y*\delta_x$.

در این مقاله K یک ابرگروه موضعاً فشرده است.

تعریف ۲-۴: یک اندازه رادون مثبت مخالف صفر m بر K که به‌ازای هر $x\in K$ در رابطه $\delta_x * m = m$ صدق کند را اندازهٔ هار(چپ) می‌نامیم. وجود اندازهٔ هار برای هر ابرگروه موضعاً فشرده هنوز به‌صورت حدس باقی مانده است اما بنابر [۱]، ابرگروه‌های جابه‌جایی، فشرده و گسسته دارای اندازه هار هستند.

به‌ازای هر تابع بورل مختلط مقدار f بر K، $\mu\in M(K)$ و هر $x,y\in K$ قرار می‌دهیم

$$f_x(y) = f(x*y) := \int_K f\ d(\delta_x * \delta_y).$$

هم‌چنین تعریف می‌کنیم:

$$(\mu * f)(x) := \int_K f(y^- * x)\ d\mu(x).$$

فرض کنید $A, B\subseteq K$. در این صورت قرار می‌دهیم $\{x\}*\{y\} := \operatorname{supp}(\delta_x * \delta_y)$ و

$$A*B := \bigcup_{x\in A, y\in B}\{x\}*\{y\}.$$

تابع پیوسته مختلط مقدار غیرمنفی و کراندار ξ بر K را کاراکتر می‌نامیم هرگاه به‌ازای هر $x,y\in K$، $\xi(x*y) = \xi(x)\xi(y)$ و $\xi(x^-) = \overline{\xi(x)}$. فضای همه کاراکترها مجهز به توپولوژی همگرایی یکنواخت بر فشرده‌ها را دوگان K می‌نامیم و با $\widehat{K}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲-۵: فرض کنید K یک ابرگروه است. مجموعه

$Z(K) := \{x\epsilon K: \delta_x * \delta_{x^-} = \delta_e = \delta_{x^-} * \delta_x\}$

مرکز ابرگروه نامیده می‌شود. بنابر بخش ۴.۱۰ از [۴]، $Z(K)$ زیرگروه ماکسیمال K است. دانکل در [۲]، $Z(K)$ را مجموعه همه x هایی در K تعریف می‌کند که به‌ازای هر $y\epsilon K$، $supp(\delta_x * \delta_y)$ تک‌نقطه‌ای است. این دو تعریف معادل هستند.

قضیه پلانچرل ۲-۶: فرض کنید K یک ابرگروه جابجایی است. یک اندازه رادون نامنفی منحصربه‌فرد π بر $\widehat{K}$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $f\epsilon L^1(K,m)\cap L^2(K,m)$ داریم:

$$\int_K |f|^2 dm = \int_{\widehat{K}} |\hat{f}|^2 d\pi$$

که در آن

$$\hat{f}(\xi) := \int_K f(x)\overline{\xi(x)}dm(x),\ (\xi\epsilon \widehat{K})$$

تبدیل فوریه تابع f است.

به‌ازای هر $\kappa\in L^1(\widehat{K})$، معکوس تبدیل فوریه $\check{\kappa}$ به‌صورت

$$\check{\kappa}(x) = \int_{\widehat{K}} \xi(x)\kappa(\xi)d\pi(\xi), \quad (x\epsilon K)$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۲-۷: فرض کنید H یک زیرمجموعه بسته غیرتهی از ابرگروه K است و

$H^- := \{x^-; x\epsilon H\}.$

۱- اگر $H * H^- \subseteq H$، آن‌گاه H را زیرابرگروه K می‌نامیم.

۲- زیرابرگروه H از K را نرمال نامیم هرگاه به‌ازای هر $x\epsilon K$ داشته باشیم $x * H = H * x$.

۳- زیرابرگروه H از K از نوع فشرده نامیده می‌شود هرگاه هر $x\in K$ در یک زیرابرگروه فشرده K قرار گیرد.

تبصره ۲-۸: بنابر قضیه ۱.۲ از [۸] اگر K یک اندازه هار چپ داشته باشد، آن‌گاه هر زیرابرگروه K یک اندازه هار چپ دارد.

تعریف ۲-۹: فرض کنید H یک زیرابرگروه نرمال K است. فضای $\frac{K}{H} := \{x * H: x\epsilon K\}$ با توپولوژی خارج قسمتی یک فضای موضعاً فشرده است و تابع تصویر طبیعی $q: K\to \frac{K}{H}$ با ضابطه $q(x) := x * H$ پیوسته و باز است. در حالت کلی $\frac{K}{H}$ ابرگروه نیست، بنا بر گزاره ۱.۸ از [۸] اگر یک زیرابرگروه نرمال H از K از نوع فشرده باشد، K/H ابرگروه خارج قسمتی است.

تعریف ۲-۱۰: زیرابرگروه گسسته L از K را یک شبکه یکنواخت می‌نامیم هرگاه K/L فشرده باشد.

تعریف ۲-۱۱: فرض کنید H یک زیرابرگروه بسته K است. اگر نگاشت $T_H: f\longmapsto T_H f$، که به‌صورت

$$(T_H f)(x * H) := \int_H f(x * t)dm_H(t)$$

تعریف می‌شود، یک نگاشت خطی خوش‌تعریف از $C_c(K)$ به $C_c(K/H)$ باشد، می‌گوییم H دارای خاصیت ویل است. برخلاف حالت گروهی هر زیرابرگروه دارای خاصیت ویل نیست. بنابر گزاره ۱ از [۵]، اگر H یک زیرابرگروه K با خاصیت ویل باشد به‌طوری‌که K/H ابرگروه خارج قسمتی و دارای اندازهٔ هار $m_{K/H}$ باشد، آن‌گاه نگاشت

$$f \longmapsto \int_{K/H} T_H f dm_{K/H}, \quad (f \in C_c(K))$$

یک اندازه هار چپ m بر K تعریف می‌کند و فرمول ویل برقرار است:

$$\int_K f(z)dm(z) = \int_{K/H}\int_H f(x*t)dm_H(t)d\mu_{K/H}(x*H).$$

براساس گزاره ۸.۱ و قضیه ۳.۲ از [۸] ، اگر H یک زیرابرگروه فشرده نرمال K باشد، آن‌گاه H دارای خاصیت ویل است.

لم ۱۲-۲: اگر H یک زیرابرگروه مدولار یکه K با خاصیت ویل باشد، آن‌گاه تابع ψ_H که به‌صورت

$$(\psi_H f)(H*x) := \int_H f(t*x)dm_H(t), \qquad (x\epsilon K)$$

تعریف می‌شود، یک نگاشت خطی خوش‌تعریف از $C_c(K)$ به $C_c(H\backslash K)$ است و بنابراین یک لندازه رادون $\mu_{H\backslash K}$ روی $H\backslash K$ وجود دارد که

$$\int_K f^-(z)dm(z) = \int_{H\backslash K}\int_H f(t*x)dm_H(t)d\mu_{H\backslash K}(H*x).$$

اثبات: فرض کنید $f\epsilon C_c(K)$، $x,y\in K$ و $H*x = H*y$. چون H دارای خاصیت ویل است داریم $T_H f^-(x^- * H) = T_H f^-(y^- * H)$ و بنابراین

$$\int_H f(t^- * x)dm_H(t) = \int_H f^-(x^- * t)dm_H(t) = \int_H f^-(y^- * t)dm_H(t) = \int_H f(t^- * y)dm_H(t).$$

از این رو

$$\int_H f(t*x)\Delta_H(t^-)dm_H(t) = \int_H f(t*y)\Delta_H(t^-)dm_H(t),$$

و چون H مدولار یکه است داریم:

$$(\psi_H f)(H*x) = \int_H f(t*x)dm_H(t) = \int_H f(t*y)dm_H(t) = (\psi_H f)(H*y).$$

در نتیجه $\psi_H f$ خوش‌تعریف است. اگر به‌ازای هر مجموعه بورل $E \subseteq H\backslash K$ اندازه هار μ بر $H\backslash K$ را به‌صورت

$$\mu_{H\backslash K}(E) := \mu_{K/H}\{x^- * H : H*x \in E\}$$

تعریف کنیم، در این‌صورت

$$\int_{H\backslash K}\int_H f(t*x)dm_H(t)d\mu_{H\backslash K}(H*x)$$
$$= \int_{K/H}\int_H f(t*x)dm_H(t)d\mu_{K/H}(x^- * H)$$
$$= \int_{K/H}\int_H f(t*x^-)dm_H(t)d\mu_{K/H}(x*H)$$
$$= \int_{K/H}\int_H f^-(x*t^-)dm_H(t)d\mu_{K/H}(x*H)$$
$$= \int_{K/H}\int_H f^-(x*t)\Delta_H(t^-)dm_H(t)d\mu_{K/H}(x*H)$$
$$= \int_{K/H}\int_H f^-(x*t)dm_H(t)d\mu_{K/H}(x*H)$$
$$= \int_K f^-(z)dm(z).$$

تعریف۱۳-۲: فرض کنید K یک ابرگروه موضعاً فشرده تفکیک‌پذیر و H یک زیرابرگروه آن است. مجموعه بورل $V \subseteq K$ یک دامنه اساسی برای H نامیده می‌شود اگر V هر همدسته H را دقیقاً در یک نقطه قطع کند. بنابر [۷]، اگر L یک شبکه یکنواخت باشد، آن‌گاه یک دامنه اساسی فشرده نسبی برای آن وجود دارد.

فرض کنید H یک زیرابرگروه بسته تفکیک‌پذیر ابرگروه K و B یک دامنه اساسی برای H است. تابع $\tau: K/H \longrightarrow K$ با ضابطه

$$\tau\big(q(x)\big) := (x*H) \cap B \quad (x\epsilon K)$$

را نگاشت بخش بورل متناظر با H می‌نامیم. واضح است که $\tau(K/H) = B$ و به‌ازای هر $x\in K$، $q(\tau(q(x)) = q(x)$.

۳- نتایج

در این بخش H یک زیرابرگروه جابه‌جایی K و B یک دامنه اساسی برای H است.

تعریف ۳-۱: فرض کنید τ نگاشت بخش بورل باشد. تابع γ را به‌صورت

$$\gamma: H\backslash K \to K$$

$$\gamma(q(x)) \coloneqq (\tau(x^- * H))^-$$

تعریف می‌کنیم. اگر $q_R: H \longmapsto H\backslash K$ را با ضابطه $q_R(x) \coloneqq H * x$ در نظر بگیریم، آن‌گاه

$$q_R o\gamma(H * x) = q_R(\tau(x^- * H))^- =$$

$$H * \left(\tau(x^- * H)\right)^- = (\tau(x^- * H) * H)^- = H * x$$

و در نتیجه $q_R o\gamma = id_{H\backslash K}$.

با توجه به لم ۲.۱۲ به آسانی می‌توان نشان داد:

نتیجه ۳-۲: اگر H یک زیرابرگروه K با خاصیت ویل باشد، آن‌گاه یک اندازه رادون $\mu_{H\backslash K}$ بر $H\backslash K$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\int_K f(z)dm(z) =$$

$$\int_{H\backslash K}\int_H f(t * \gamma(H * x))dm_H(t)d\mu_{H\backslash K}(H * x).$$

تعریف ۳-۳: فرض کنید $f\epsilon L^2(K)$. به‌ازای هر $x\epsilon K$، تابع $f^{H*x}: H \longrightarrow \mathbb{C}$ را به‌صورت

$$f^{H*x}(p) \coloneqq f(p * \gamma(H * x)) =$$

$$f(p * \tau(x^- * H)^-) = R_{(\tau(x^- * H))^-}f(p)$$

تعریف می‌کنیم که در آن $p \in H$.

لم ۳-٤: فرض کنید H یک زیرابرگروه بسته K است و $x\epsilon K$ اگر $f\epsilon L^2(K)$، آن‌گاه $f^{H*x}\epsilon L^2(H)$.

اثبات: بنابر گزاره ۱.۲ از [۸]، چون K لندازه هار چپ دارد، H نیز دارای اندازه هار چپ مانند m_H است. براساس روند اثبات گزاره مذکور، اگر $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ یک پایه همسایگی $H = H * e$ در فضای موضعاً فشرده $H\backslash K$ باشد، آن‌گاه به‌ازای هر $\alpha \in A$ یک تابع نامنفی $g_\alpha\epsilon C_c(K/H)$ موجود است که $supp\ g_\alpha\epsilon U_\alpha$ و $\int_R g_\alpha(q(x))dm_K(x) = 1$. در این گزاره ثابت شده است که

$$m_H(f) = \lim_\alpha \int_K f(p)g_\alpha(q(p))dm_K(p).$$

بنابراین

$$\int_H |f^{H*x}(p)|d\lambda_H(p) =$$

$$\lim_\alpha \int_K |R_a f(p)|^2 g_\alpha(q(p))d\lambda_K(p),$$

که در آن $a = \left(\tau(x^- * H)\right)^-$. از این‌که $f\epsilon L^2(K)$ نتیجه می‌شود که $R_a f\epsilon L^2(K)$. چون $g_\alpha\epsilon C_c\left(\frac{K}{H}\right)$، $(R_a f)g_\alpha(q)\epsilon L^2(K)$ و در نتیجه $f^{H*x}\epsilon L^2(H)$.

تعریف ۳-۵: تابع $\varphi: \widehat{H} \to L^2(H\backslash K)$ را در نظر بگیرید. به‌ازای هر $H * x \epsilon H\backslash K$ ، تابع $\varphi_{H*x}: \widehat{H} \to \mathbb{C}$ را به‌صورت

$$\varphi_{H*x}(\alpha) = \varphi(\alpha)(H * x), \qquad (\alpha\epsilon\widehat{H})$$

تعریف می‌کنیم.

لم ۳-٦: فرض کنید H یک زیرابرگروه مدولار یکه K با خاصیت ویل است. در این‌صورت نگاشت

$$U_1: L^2(K) \longrightarrow L^2(H \times H\backslash K)$$

$$U_1 f(p, H * x) \coloneqq f\left(p * \gamma(H * x)\right)$$

که در آن $x\epsilon K$ و $p\epsilon H$، نرم‌کاهنده است.

اثبات: بنابر قضیه D۱.۵ از [۴]، به‌ازای هر $p\epsilon H$ و $x\epsilon K$ داریم

$$\|U_1 f\|^2_{L^2(H\times H\backslash K)}$$

$$= \int_{H\times H\backslash K} |(U_1 f)(p, H * x)|^2 d\mu_{(H\times H\backslash K)}(p, H * x)$$

$$\le \int_{H\times H\backslash K} |f(p * \gamma(H * x))|^2 d\mu_{(H\times H\backslash K)}(p, H * x)$$

$$= \int_{H\times H\backslash K} |f|^2(p*\gamma(H*x))|\, d\mu_{(H\times H\backslash K)}(p, H*x)$$

$$= \int_K |f(x)|^2 d\mu_K(x) = \|f\|^2_{L^2(K)}.$$

تبصره ۷-۳: تحت شرایط لم قبل، اگر $H \subseteq Z(K)$ آن‌گاه نگاشت U_1 طول‌پا است زیرا به‌ازای هر $p\epsilon Z(K)$ و $y\epsilon K$ داریم:

$$|f(p*y)|^2 = |f|^2(p*y).$$

لم ۸-۳: اگر H زیرابرگروه K باشد، آن‌گاه نگاشت

$$U_2: L^2(H\times H\backslash K) \longrightarrow L^2(H\backslash K, L^2(H))$$

با ضابطه

$$U_2 f(H*x)(p) := f(p, H*x)$$

که $p\epsilon H$ و $x\epsilon K$، یک نگاشت طول‌پا است.

اثبات:

$$\|U_2 f\|^2_{L^2(H\backslash K, L^2(H))}$$

$$= \int_{H\backslash K} \|(U_2 f)(H*x)\|^2_{L^2(H)} d\mu_{H\backslash K}(H*x)$$

$$= \int_{H\backslash K}\int_H |U_2 f(H*x)(p)|^2 d\mu_H(p)\, d\mu_{H\backslash K}(H*x)$$

$$= \int_{H\times H\backslash K} |f(p, H*x)|^2 d(\mu_H \times \mu_{H\backslash K})(p, H*x)$$

$$= \|f\|^2_{L^2(H\times H\backslash K)}.$$

لم ۹-۳: فرض کنید H زیرابرگروه K است. در این‌صورت نگاشت‌های

$$U_3: L^2(H\backslash K, L^2(H)) \longrightarrow L^2(H\backslash K, L^2(\widehat{H}))$$

با ضابطه

$$U_3 f(H*x)(\xi) := \widehat{f^{H*x}}(\xi)$$

و

$$U_4: L^2(H\backslash K, L^2(\widehat{H})) \to L^2(\widehat{H}, L^2(H\backslash K))$$

با ضابطه

$$U_4 f(\xi)(H*x) := f(H*x)(\xi)$$

طول‌پا هستند.

اثبات: بنابر قضیه پلانچرل،

$$\|U_3 f\|^2_{L^2(H\backslash K, L^2(\widehat{H}))}$$

$$= \int_{H\backslash K} \|(U_3 f)(H*x)\|^2_{L^2(\widehat{H})} d\mu_{H\backslash K}(H*x)$$

$$= \int_{H\backslash K}\int_{\widehat{H}} \left|\widehat{f^{H*x}}(\xi)\right|^2 d\mu_{\widehat{H}}(\xi)\, d\mu_{H\backslash K}(H*x)$$

$$= \int_{H\backslash K}\int_H |f(H*x)(p)|^2 d\mu_H(p)\, d\mu_{H\backslash K}(H*x)$$

$$= \int_{H\backslash K} \|f(H*x)\|^2_{L^2(H)} d\mu_{H\backslash K}(H*x)$$

$$= \|f\|^2_{L^2(H\backslash K, L^2(H))}.$$

همچنین

$$\|U_4 f\|^2_{L^2(\widehat{H}, L^2(H\backslash K))}$$

$$= \int_{\widehat{H}} \|(U_4 f)(\xi)\|^2_{L^2(H\backslash K)} d\mu_{\widehat{H}}(\xi)$$

$$= \int_{\widehat{H}}\int_{H\backslash K} |U_4 f(\xi)(H*x)|^2 d\mu_{H\backslash K}(H*x)\, d\mu_{\widehat{H}}(\xi)$$

$$= \int_{H\backslash K}\int_{\widehat{H}} |f(H*x)(\xi)|^2 d\mu_{\widehat{H}}(\xi)\, d\mu_{H\backslash K}(H*x)$$

$$= \int_{H\backslash K} \|f(H*x)\|^2_{L^2(\widehat{H})} d\mu_{H\backslash K}(H*x)$$

$$= \|f\|^2_{L^2(H\backslash K, L^2(\widehat{H}))}.$$

قضیه ۱۰-۳: فرض کنید K یک ابرگروه موضعاً فشرده و H یک زیرابرگروه مدولار یکه K با خاصیت ویل است. یک تبدیل نرم‌کاهنده $Z: L^2(K) \to L^2(\widehat{H}, L^2(H\backslash K))$ با ضابطه

$$(Zf)(\xi)(H*x) = \widehat{f^{H*x}}(\xi),$$

موجود است که در آن $\xi\epsilon\widehat{H}, x\epsilon K$ و $f\epsilon L^2(K)$. اگر $H \subseteq Z(K)$، آن‌گاه Z یک تبدیل طول‌پا است. به‌علاوه اگر $\varphi \in L^2(\widehat{H}, L^2(H\backslash K))$، $p\epsilon H$ و $x\epsilon K$، آن‌گاه

$$(Z^{-1}\varphi)\big(p*\gamma(H*x)\big) = \varphi_{\breve{H}*x}(p).$$

همچنین اگر $f\epsilon L^2(K)$ و $p\epsilon H$، آن‌گاه

$$\big(ZL_p f\big)(\xi) = \xi(p^{-1})(Zf)(\xi).$$

اثبات: فرض کنیم $U_۱$، $U_۲$، $U_۳$ و $U_۴$ نگاشت‌های تعریف‌شده در لم‌های ۶-۳، ۸-۳ و ۹-۳ هستند. از این‌رو، نگاشت

$$Z: L^۲(K) \mapsto L^۲(\widehat{H}, L^۲(H\backslash K))$$

$$Z := U_۴U_۳U_۲U_۱$$

یک تبدیل نرم‌کاهنده است و با توجه به تبصره ۷-۳، اگر $H \subseteq Z(K)$، آن‌گاه تبدیل Z طول‌پا است. با توجه به این‌که

$$(U_۲U_۱f)(H*x)(p) = (U_۱f)(p, H*x) =$$
$$= f\big(p*\gamma(H*x)\big) = f^{(H*x)}(p),$$

نتیجه می‌گیریم

$$(Zf)(\xi)(H*x)$$
$$= (U_۴U_۳U_۲U_۱f)(\xi)(H*x)$$
$$= (U_۳U_۲U_۱f)(H*x)(\xi)$$
$$= \big(\widehat{U_۲U_۱f)(H}*x)(\xi\big) = \widehat{f^{(H*x)}}(\xi).$$

اگر $\varphi \epsilon L^۲(\widehat{H}, L^۲(H\backslash K))$، $p\epsilon H$ و $x\epsilon K$، آن‌گاه

$$(Z^{-۱}\varphi)(p*\gamma(H*x))$$
$$= (U_۱^{-۱}U_۲^{-۱}U_۳^{-۱}U_۴^{-۱}\varphi)\big(p*\gamma(H*x)\big)$$
$$= (U_۲^{-۱}U_۳^{-۱}U_۴^{-۱}\varphi)(p, H*x)$$
$$= (U_۳^{-۱}U_۴^{-۱}\varphi)(H*x)(p)$$
$$= U_۳^{-۱}\varphi(p)(H*x)$$
$$= U_۳^{-۱}\big(\varphi_{H*x}(p)\big) = \varphi_{\widetilde{H}*x}(p).$$

اگر $f\epsilon L^۲(K)$، $p\epsilon H$ و $a := \gamma(H*x)$، بنابرگزارهٔ $F۱.۳$ از [۴] داریم

$$\big(L_pf\big)^{H*x}(r) = \big(L_pf\big)(r*a)$$
$$= f(p^{-۱}*r*a)$$
$$= \int_K f(t)d(\delta_{p^{-۱}}*\delta_r*\delta_a)(t)$$
$$= \int_K f^a(t)d(\delta_{p^{-۱}}*\delta_r)(t)$$
$$= \int_K f(t*a)d(\delta_{p^{-۱}}*\delta_r)(t)$$
$$= \int_K f^{(H*x)}(t)d(\delta_{p^{-۱}}*\delta_r)(t)$$
$$= f^{H*x}(p^{-۱}*r) = L_p(f^{H*x})(r).$$

بنابراین

$$=\big(ZL_pf\big)(\xi)(H*x) = \big(\widehat{L_pf)}^{H*x}(\xi)$$
$$[L_p\widehat{(f^{H*x}})](\xi) = \xi(p^{-۱})\widehat{f^{H*x}}(\xi) =$$
$$\xi(p^{-۱})(Zf)(\xi)(H*x).$$

تعریف ۱۱-۳: تبدیل معرفی شده در قضیه ۱۰-۳ در واقع تعمیم یافته تبدیل زاک در حالت گروهی است ([۶] و [۳]) و در حالت ابرگروهی مجدداً آن را تبدیل زاک می‌نامیم.

مثال ۱۲-۳: فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده، H زیرگروهی فشرده از G، λ اندازهٔ هار بر G و σ اندازه هار نرمال‌شده بر H است. قرار می‌دهیم

$$H\backslash G/H := \{H*x*H: x\epsilon G\}.$$

به‌ازای هر $x\epsilon G$، $H*x*H$ را به اختصار با HxH نشان می‌دهیم. $H\backslash G/H$ را به ضعیف‌ترین توپولوژی که نگاشت

$$\begin{cases} G \to H\backslash G/H \\ x \longmapsto HxH \end{cases}$$

پیوسته باشد، مجهز می‌کنیم. فضای $H\backslash G/H$ با پیچش

$$\delta_{HxH}*\delta_{HyH} := \int_H \delta_{HxtyH}\, d\sigma(t),$$

و بازگشت

$$(HxH)^- := Hx^{-۱}H \ (x\epsilon G)$$

ابرگروه است و

$$m := \int_G \delta_{HxH} d\lambda(x)$$

یک اندازهٔ هار بر $H\backslash G/H$ است. برای جزئیات بیشتر قضیه $B۲.۸$ از [۴] را ببینید.

فهرست منابع

[1] W. R. Bloom, H. Heyer. Harmonic analysis of probability measures on hypergroups. De Gruyter. Berlin (1995)

[2] C. F. Dunkl. The measure algebra of a locally compact hypergroup. Trans. Amer. Math. Soc. 179: 331-348(1973)

[3] A. J. E. M. Janssen. The Zak transform: A signal transform for sampled time-continuous signals, Philips Journal of Research. 43:23-69(1998)

[4] R. I. Jewett. Spaces with an abstract convolution of measures. Advances in mathematics 18:1-101(1975)

[5] P. Hermann. Induced representations and hypergroup homomorphisms, Monatshefte fur Mathematik. 116:245-262(1993)

[6] J. W. Iverson. Frames genetated by actions of locally compact groups. Ph.D. thesis. Oregon University (2016)

[7] S. M. Tabatabaie, S. Jokar. Existence of the relatively compact fundamental domain for hypergroups, to appear in Thai Journal of Mathematics

[8] M. Voit. Properties of subhypergroups. Semigroup Forum. 56:373-391(1997)