دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هفتم، آذر و دی ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

برخی قضایای نقطه ثابت در فضاهای $b-$ متریک C^*-جبر-مقدار

زهرا قربانی[۱*]، جواد برادران[۲]

[۱و۲] گروه ریاضی، دانشگاه جهرم، جهرم، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۲/۱۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۶/۳۰

چکیده

در این مقاله مفاهیم پیوسته مداری و تام مداری روی فضای متریک C^*- جبر-مقدار تعریف می‌کنیم. اگر T یک نگاشت پیوسته مداری باشد، نشان می‌دهیم که تحت شرایطی هر دنباله کوشی به فرم $\{\mathrm{T}^n(x)\}$ به یک نقطه ثابت T همگرا است. سپس ثابت می‌کنیم که تحت چه شرایطی یک نگاشت پیوسته مداری روی یک فضای $b-$ متریک C^*- جبر-مقدار دارای نقطه تناوبی یا حداقل نقطه ثابت است. همچنین ثابت می‌کنیم اگر T یک خود-نگاشت روی فضای متریک C^*- جبر-مقدار $(\mathrm{X}, \mathbb{A}, \mathrm{d})$ باشد و نقطه $x_. \in X$ وجود داشته باشد به‌طوری که $T^2(x_.) \neq x_.$ و T دارای شرایط دیگری نیز باشد، آنگاه T دارای نقطه ثابت است.

واژه‌های کلیدی: نقطه ثابت، پیوسته مداری، نقطه تناوبی، فضای $b-$ متریک C^*- جبر-مقدار.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:ghorbani@jahromu.ac.ir

۱- مقدمه

باختین [۱] در سال ۱۹۸۹ فضای $b-$ متریک را به عنوان یک تعمیم از فضای متریک معرفی کرد. از آن زمان به بعد فضاهای تعمیم یافته‌ی دیگری مانند فضاهای b-متریک-متشابه [۷] معرفی شدند. اخیراً، ما و جیانگ [۸] مفهوم فضای $b-$ متریک C^*- جبر-مقدار که تعمیم مفهوم فضاهای $b-$ متریک است را معرفی کردند و در این فضای جدید قضایای نقطه ثابت را برای یک خود -نگاشت با شرایط انقباضی اثبات نمودند. کامران و همکاران [۶] نیز در سال ۲۰۱۶ اصل انقباض باناخ را روی چنین فضاهایی تعمیم دادند.

اکنون نمادها، تعاریف اولیه و برخی نتایج بدست آمده روی C^*-جبرها را معرفی می‌نماییم. جزئیات بیشتر را می‌توان در مراجع[۹،۵] یافت.

فضای برداری $\mathbb{A}$ همراه با نگاشت دوخطی $\mathbb{A}\times\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ با ضابطه‌ی $(a,b)\mapsto ab$ یک جبر شرکت‌پذیر (به اختصار یک جبر) نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $a,b,c\in\mathbb{A}$،

$$a(bc)=(ab)c.$$

زیرفضای برداری $\mathbb{B}$ از $\mathbb{A}$ به‌قسمی‌که نسبت به عمل ضرب تعریف شده توسط نگاشت دوخطی فوق بسته باشد یک زیرجبر $\mathbb{A}$ نامیده می‌شود. نرم $\|.\|$ روی جبر $\mathbb{A}$ زیرضربی گفته می‌شود درصورتی‌که به ازای هر $a,b\in\mathbb{A}$،

$$\|ab\|\leqslant\|a\|\|b\|.$$

در این حالت زوج $(\mathbb{A},\|.\|)$ یک جبر نرمدار نامیده می‌شود. فرض کنیم $\mathbb{A}$ یک جبر باشد. نگاشت مزدوج خطی از $\mathbb{A}$ بتوی $\mathbb{A}$ با ضابطه‌ی $a\mapsto a^*$ به طوری‌که برای هر $a,b\in\mathbb{A}$ داشته باشیم:

$$(a^*)^*=a \quad \text{و} \quad (ab)^*=b^*a^*,$$

یک برگشت روی $\mathbb{A}$ نامیده می‌شود و زوج $(\mathbb{A},*)$ را جبر برگشت یا $*$-جبر می‌نامند. عضو a در $*$-جبر $\mathbb{A}$ خود الحاقی یا هرمیتی گویند، هرگاه $a^*=a$. مجموعه‌ی تمام عضوهای هرمیتی $\mathbb{A}$ با $\mathbb{A}_h$ نشان داده می‌شود. $a\in\mathbb{A}$ معکوس‌پذیر است، هرگاه عضوی مانند b در $\mathbb{A}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $ab=ba=1_{\mathbb{A}}$. در این‌صورت b منحصر به فرد است و با نماد a^{-1} نوشته می‌شود. مجموعه‌ی تمام عضوهای معکوس‌پذیر $\mathbb{A}$ را با نماد $Inv(\mathbb{A})$ نشان می‌دهند. $*$ -جبر کامل $\mathbb{A}$ همراه با نرم زیرضربی به‌قسمی‌که برای هر $a\in\mathbb{A}$ داشته باشیم:

$$\|a^*\|=\|a\|,$$

یک $*$ -جبر باناخ نامیده می‌شود. اگر $\mathbb{A}$ دارای عضو همانی $1_{\mathbb{A}}$ باشد به‌طوری‌که $\|1_{\mathbb{A}}\|=1$ ، آنگاه $\mathbb{A}$ یک $*$ - جبر باناخ یکانی است. اگر در $*$ -جبر باناخ $\mathbb{A}$ به ازای هر $a\in\mathbb{A}$ داشته باشیم $\|a^*a\|=\|a\|^2$ ، آنگاه $\mathbb{A}$ به عنوان یک C^*- جبر شناخته می‌شود.

اگر $\mathbb{A}$ یک C^*- جبر و $a\in\mathbb{A}$، آنگاه عضو a را نرمال گوئیم، هرگاه $a^*a=aa^*$. همچنین a یکانی است، هرگاه $a^*a=aa^*=1_{\mathbb{A}}$.

عضو $a\in\mathbb{A}$ را مثبت گوییم، اگر a هرمیتی باشد و $\sigma(a)\subset\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ که در آن مجموعه

$$\sigma(a)=\{\lambda\in\mathbb{R}:\ \lambda 1_{\mathbb{A}}-a\notin Inv(\mathbb{A})\},$$

طیف a نامیده می‌شود. مجموعه‌ی تمام عضوهای مثبت C^*-جبر $\mathbb{A}$ را با نماد $\mathbb{A}_+$ نشان می‌دهیم.

اینک می‌توان به ازای هر $a,b\in\mathbb{A}$ یک ترتیب جزئی طبیعی روی C^*- جبر $\mathbb{A}$ بصورت زیر تعریف نمود:

$$a\preceq b \quad \text{اگر تنها و اگر} \quad b-a\in\mathbb{A}_+.$$

اگر عضو صفر C^*- جبر $\mathbb{A}$ با $0_{\mathbb{A}}$ نمایش داده شود و $a\in\mathbb{A}_+$، آنگاه می‌نویسیم $a\succeq 0_{\mathbb{A}}$.

گزاره ۱-۱: اگر $\mathbb{A}$ یک C^*- جبر یکانی و $a,b\in\mathbb{A}_h$ آنگاه $\sigma(ab)\subseteq\sigma(a)\sigma(b)$.

اثبات: به گزاره ۱۰-۲-۳ مرجع [۵] مراجعه شود.

گزاره ۱-۲: اگر $\mathbb{A}$ یک C^*- جبر یکانی و $x\in\mathbb{A}_h$، آنگاه $\|x\|1_{\mathbb{A}}\pm x\in\mathbb{A}_+$.

اثبات: به گزاره ۳-۲-۴ مرجع [۵] مراجعه شود.

نتیجه ۱-۳: اگر $\mathbb{A}$ یک C^*- جبر یکانی و $a \in \mathbb{A}_+$، آنگاه $\cdot \leq a \leq \| a \| 1_{\mathbb{A}}$.

اثبات: از آنجا که $a \in \mathbb{A}_+$ ، پس $a \in \mathbb{A}_h$. با توجه به گزاره (۱-۲) $\| a \| 1_{\mathbb{A}} - a \in \mathbb{A}_+$ ، بنابراین $\cdot \leq a \leq \| a \| 1_{\mathbb{A}}$.

نتیجه ۱-۴: اگر $\mathbb{A}$ یک C^*- جبر یکانی، $b \in \mathbb{A}$ و $a \in \mathbb{A}_+$، آنگاه $b^*ab \in \mathbb{A}_+$.

اثبات: به نتیجه ۷-۲-۴ مرجع [۵] مراجعه شود.

نتیجه ۱-۵: اگر $\mathbb{A}$ یک C^*- جبر یکانی و $x \in \mathbb{A}_h$، آنگاه

$$\| x \| = \inf\{a \geq \cdot \ : \ -a1_{\mathbb{A}} \leq x \leq a1_{\mathbb{A}}\}.$$

اثبات: به نتیجه ۷-۲-۴ مرجع [۵] مراجعه شود.

لم ۱-۶: فرض کنیم $\mathbb{A}$ یک C^*- جبر باشد.

1. اگر $a, b \in \mathbb{A}$ ، $a, b \succeq \cdot_{\mathbb{A}}$ و $ab = ba$، آنگاه $ab \succeq \cdot_{\mathbb{A}}$.

2. اگر $b, c \in \mathbb{A}_h$ و $a \in \mathbb{A}$، آنگاه $b \preceq c \Rightarrow a^*ba \preceq a^*ca.$

3. اگر $\cdot_{\mathbb{A}} \preceq a \preceq b$ ، آنگاه $\| a \| \leq \| b \|$.

4. اگر $\mathbb{A}$ یک C^*- جبر یکانی و $a \in \mathbb{A}$ باشد، آنگاه a مثبت است اگر و تنها اگر به ازای $x \in \mathbb{A}$ ، $a = xx^*$.

اثبات: به قضیه ۵-۲-۲ مرجع [۹] مراجعه شود.

تعریف ۱-۷. فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی، $\mathbb{A}$ یک C^*- جبر یکانی با رابطه‌ی ترتیب جزئی طبیعی $\preceq$ باشد و $b \in \mathbb{A}_+$ طوری‌که $\| b \| \geq ۱$ و b با تمام اعضای $\mathbb{A}$ جابجا شود.
نگاشت $d_b: X \times X \to \mathbb{A}_+$ یک $b-$ متریک C^*- جبر-مقدار روی X نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $x, y, z \in X$ در شرایط زیر صدق کند:

1. $d_b(x, y) = \cdot_{\mathbb{A}}$ اگر و تنها اگر $x = y$.
2. $d_b(x, y) = d_b(y, x)$.
3. $d_b(x, y) \preceq b[d_b(x, z) + d_b(z, y)]$.

در این‌صورت سه تایی $(X, \mathbb{A}, d_b)$ یک فضای $b-$ متریک C^*- جبر-مقدار با ضریب b نامیده می‌شود.
تعریف زیر نتیجه‌ی طبیعی مفاهیم مشابه در فضاهای متریک C^*- جبر-مقدار است:

تعریف ۱- ۸: فرض کنیم $(X, \mathbb{A}, d_b)$ یک فضای $b-$متریک C^*- جبر-مقدار، $\{x_n\}$ یک دنباله در X و $x \in X$ باشد. در این‌صورت

1. دنباله $\{x_n\}$ همگرا به x نسبت به $\mathbb{A}$ گویند، هرگاه برای هر $\varepsilon > \cdot$ یک $N \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $n > N$ داشته باشیم $\| d_b(x_n, x) \| < \varepsilon$. در این صورت می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ یا $x_n \longrightarrow x$.
2. دنباله $\{x_n\}$ را یک دنباله کوشی نسبت به $\mathbb{A}$ گویند، اگر به ازای هر $\varepsilon > \cdot$ یک $N \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $n, m > N$ داشته باشیم: $\| d_b(x_n, x_m) \| < \varepsilon.$
3. $(X, \mathbb{A}, d_b)$ را یک فضای $b-$ متریک C^*- جبر-مقدار کامل گویند، اگر هر دنباله کوشی در X نسبت به $\mathbb{A}$ همگرا باشد.

نکته ۱-۹: توجه داشته باشیم:

1. اگر در تعریف (۱-۷) $\mathbb{A} = \mathbb{R}$ ، آنگاه مفهوم فضای $b-$متریک C^*- جبر-مقدار با تعریف فضای $b-$ متریک حقیقی معادل می‌شود.
2. اگر در تعریف (۱-۷) $b = 1_{\mathbb{A}}$ ، آنگاه d_b یک متریک C^*- جبر-مقدار است.

مثال ۱-۱۰: فرض کنیم $X = l_p$ مجموعه تمام دنباله‌های $\{x_n\}$ در $\mathbb{R}$ باشد به‌طوری‌که $\sum_{n=۱}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ و $\cdot < p < ۱$ و $\mathbb{A} = M_۲(\mathbb{R})$. تابع $d_b: X \times X \to \mathbb{A}$ به ازای

$x=\{x_n\}\in l_p$ و $y=\{y_n\}$ تعریف می‌کنیم:

$$d_b(x,y)=\begin{bmatrix}(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p)^{\frac{1}{p}} & \cdot \\ \cdot & (\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p)^{\frac{1}{p}}\end{bmatrix}$$

آنگاه $d_b(.,.)$ یک $b-$ متریک C^*- جبر-مقدار با ضریب $b=\begin{bmatrix}2^{\frac{1}{p}} & \cdot \\ \cdot & 2^{\frac{1}{p}}\end{bmatrix}$ است و $\| b \|=2^{\frac{1}{p}}$.

تعریف ۱-۱۱: فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی و $T:X\to X$ یک نگاشت باشد. $x\in X$ یک نقطه ثابت نگاشت T نامیده می‌شود، هرگاه $T(x)=x$.

۲- قضایای نقطه ثابت

در دو دهه اخیر محققان بسیاری قضایای نقطه ثابت را در فضاهای C^*- جبر- مقدار مورد بررسی قرار دادند.

تعریف ۲-۱: نگاشت T روی فضای متریک C^*- جبر-مقدار $(X,\mathbb{A},d)$ پیوسته مداری گوییم، هرگاه به ازای هر $x\in X$ و $\{n_i\}_{i\geq 1}\subset \mathbb{N}$ که $\lim_{i\to\infty}T^{n_i}(x)=z$، آنگاه $\lim_{i\to\infty}T(T^{n_i})(x)=Tz$.
فضای متریک C^*- جبر-مقدار $(X,\mathbb{A},d)$ تام مداری گوییم، هرگاه هر دنباله کوشی به فرم $\{T^{n_i}(x)\}$ در $(X,\mathbb{A},d)$ همگرا باشد.

قضیه ۲-۲: فرض کنیم $T:X\to X$ یک نگاشت پیوسته مداری روی فضای متریک C^*- جبر-مقدار $(X,\mathbb{A},d)$ باشد. اگر $(X,\mathbb{A},d)$ تام مداری باشد و به ازای هر $x,y\in X$، نگاشت T در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$U(x,y)-d(T(x),y)\preceq a^*d(x,y)a \qquad (۱)$$

که در آن $a\in\mathbb{A}_+$، $\| a \|<1$ و

$$U(x,y)\in\{d(x,Tx),d(Tx,Ty),d(Ty,y)\}.$$

آنگاه به ازای هر $x\in X$ دنباله بازگشتی $\{T^n(x)\}$ به نقطه ثابت T همگر است.

اثبات: نقطه $x_.\in X$ انتخاب و قرار می‌دهیم:

$$x_{n+1}=T(x_n)=T^{n+1}(x_.),n=0,1,\ldots$$

اگر برای بعضی $n\in\mathbb{N}$ ، $x_{n+1}=x_n$، آنگاه به وضوح دنباله $\{x_n\}$ کوشی است. حال فرض کنیم به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $x_{n+1}\neq x_n$. با جایگذاری x,y به ترتیب با x_{n-1},x_n در رابطه (۱) داریم:

$$U(x_{n-1},x_n)-d(Tx_{n-1},x_n)\preceq a^*d(x_{n-1},x_n)a$$

و

$$U(x_{n-1},x_n)-d(Tx_{n-1},x_n)\in\{d(x_n,x_{n+1}),d(x_{n-1},x_n)\}.$$

حال فرض کنیم:

$$U(x_{n-1},x_n)-d(Tx_{n-1},x_n)=d(x_{n-1},x_n).$$

چون $\| a \|<1$، بنابراین تناقض ایجاد می‌شود. لذا

$$U(x_{n-1},x_n)-d(Tx_{n-1},x_n)=d(x_n,x_{n+1}).$$

با توجه به نتیجه (۱-۴) و لم (۱-۶) اگر $b,b'\in\mathbb{A}_+$ و $b\preceq b'$، آنگاه به ازای هر $x\in\mathbb{A}$ دو عضو x^*bx و $x^*b'x$ مثبت‌اند و $x^*bx\preceq x^*b'x$. بنابراین

$$\begin{aligned}d(x_{n+1},x_n)&\preceq a^*d(x_n,x_{n-1})a\\&\preceq (a^*)^2d(x_{n-1},x_{n-2})a^2\\&\preceq\cdots\\&\preceq (a^*)^nd(x_1,x_.)a^n\\&=(a^*)^nBa^n.\end{aligned}$$

برای راحتی عضو $d(x_1,x_.)$ را با B نمایش دادیم. اکنون نشان می‌دهیم که دنباله $\{x_n\}$ کوشی است. برای $m<n+1$ داریم:

$$\begin{aligned}d(x_{n+1},x_m)&\preceq d(x_{n+1},x_n)+d(x_n,x_{n-1})\\&+\ldots+d(x_{m+1},x_m)\\&\preceq (a^*)^nBa^n+\ldots+(a^*)^mBa^m\\&=\sum_{k=m}^{n}(a^*)^kBa^k\\&=\sum_{k=m}^{n}(a^*)^kB^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}a^k\\&=\sum_{k=m}^{n}(B^{\frac{1}{2}}a^k)^*(B^{\frac{1}{2}}a^k)\\&=\sum_{k=m}^{n}|B^{\frac{1}{2}}a^k|^2\\&\preceq\|\sum_{k=m}^{n}|B^{\frac{1}{2}}a^k|^2\|1_{\mathbb{A}}\\&\preceq\sum_{k=m}^{n}\|B^{\frac{1}{2}}\|^2\|a^k\|^2 1_{\mathbb{A}}\end{aligned}$$

$$\preceq \| B^{\frac{1}{2}} \|^2 \sum_{k=m}^{n} \| a \|^{2k} 1_{\mathbb{A}}$$
$$\preceq \| B^{\frac{1}{2}} \|^2 \frac{\|a\|^{2m}}{1-\|a\|^2} 1_{\mathbb{A}} \longrightarrow ۰, \quad (m \to \infty).$$

با توجه به ترتیب جزئی طبیعی وقتی m به بینهایت میل می‌کند، حد سمت راست فوق صفر می‌باشد، زیرا $\| a \| < 1$. بنابراین $\{x_n\}$ یک دنباله‌ی کوشی نسبت به $\mathbb{A}$ است. چون فضای $(X, \mathbb{A}, d)$ کامل است، پس $x \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} x_n = x$، لذا
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T^n(x_۰) = x.$$

از آنجا که T پیوسته مداری است،
$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T\big(T^n(x_۰)\big) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x_۰) = x.$$

تعریف ۲-۳: فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی و $T: X \to X$ یک نگاشت باشد. نقطه z را یک نقطه تناوبی نگاشت T با تناوب m می‌گوییم، هرگاه $T^m(z) = z$ که در آن $T^۰(x) = x$ و $T^m(x)$ در رابطه بازگشتی $T^m(x) = T(T^{m-۱}(x))$ صدق می‌کند.

قضیه ۲-۴: فرض کنیم $T: X \to X$ یک نگاشت پیوسته مداری روی فضای متریک C^*− جبر−مقدار $(X, \mathbb{A}, d)$ و $\epsilon \in \mathbb{A}^+$ باشد. اگر نقطه $x_۰ \in X$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای بعضی $n \in \mathbb{N}$، $d(x_۰, T^n(x_۰)) \preceq \epsilon$ و
$$d(x, y) \preceq \epsilon \Rightarrow U(x, y) \preceq a^* d(x, y) a, \qquad (۲)$$

به ازای هر $a \in \mathbb{A}_+$ که $\| a \| < 1$ و به ازای هر $x, y \in X$، نگاشت T در شرط
$$U(x, y) \in \{d(x, Tx), d(Tx, Ty), d(Ty, y)\}$$

صدق کند. آنگاه T دارای نقطه تناوبی است .

اثبات: قرار می‌دهیم
$$M = \{n \in \mathbb{N}:\ d\big(x, T^n(x)\big) \preceq \epsilon\}.$$

بنابر فرض قضیه $M \neq \emptyset$. فرض کنیم $m = \min M$. اگر $m = 1$ باشد با جایگذاری $y = T(x)$ در رابطه (۲) بدست می‌آوریم:
$$U\big(x, T(x)\big) \preceq a^* d\big(x, T(x)\big) a.$$

با توجه به این که $\| a \| < ۱$ حالت
$$d(x, T(x)) \preceq a^* d(x, T(x)) a$$

برقرار نیست. بنابراین داریم
$$d(x, T(T(x))) = d(x, T^2(x)) \preceq a^* d(x, T(x)) a.$$

با توجه به اثبات قضیه قبل دنباله بازگشتی $x_{n+۱} = T(x_n)$ با $x_۰ = x$ بدست می‌آوریم. بنابراین برای برخی $z \in X$، $Tz = z$. لذا T دارای نقطه تناوب با دوره تناوب ۱ است.

اکنون فرض کنیم $m \geq ۲$ که معادل است بگوییم به ازای هر $y \in X$،
$$\epsilon - d\big(y, T(y)\big) \notin \mathbb{A}^+ \qquad (۳)$$

با استفاده از رابطه (۲) و اینکه $d(x, T^m(x)) \preceq \epsilon$ داریم:
$$U(x, T^m(x)) \preceq a^* d(x, T^m(x)) a$$

و با توجه به تعریف $U(x, y)$ و رابطه (۳)،
$$d(x, T^{m+1}(x)) \preceq a^* d(x, T^m(x)) a.$$

با قرار دادن $x_{n+۱} = T^m(x_n)$ و $x_۰ = x$ مشابه اثبات قضیه قبل دنباله $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی در $(X, \mathbb{A}, d)$ است. بنابراین $z \in X$ وجود دارد به طوری که $\lim_{n\to\infty} T^n(x_۰) = z$. چون T پیوسته مداری است، داریم:
$$T^m(z) = T^m\left(\lim_{n\to\infty} T^{nm}(x_۰)\right) = \lim_{n\to\infty} T^m\big(T^{nm}(x_۰)\big) = \lim_{n\to\infty} T^{(n+1)m}(x_۰) = z.$$

بنابراین T دارای نقطه تناوبی با دوره تناوب m است.

قضیه ۲-۵: فرض کنیم $T: X \to X$ یک نگاشت پیوسته مداری روی فضای $b-$ متریک C^*- جبر-مقدار $(X, \mathbb{A}, d)$ باشد. فرض کنیم $a_۱, a_۲, a_۳, a_۴ \in \mathbb{A}_+$ وجود داشته باشند به‌طوری که

$$1_{\mathbb{A}} \le a_۱ + a_۳ \le ۲(1_{\mathbb{A}}), \quad a_۴ \le a_۲،$$

و نگاشت T به ازای هر $x, y \in X$ در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$a_1 d(T(x), T(y)) + (1_{\mathbb{A}} - a_1)[d(x, T(x)) + d(y, T(y))] + a_2[d(y, T(x)) + d(x, T(y))] \le a_3 d(x, y) + a_4 d(x, T^2(x)). \quad (۴)$$

آنگاه T دارای حداقل یک نقطه ثابت است.

اثبات: نقطه $x_. \in X$ را انتخاب و قرار می‌دهیم:

$$x_{n+1} = T(x_n), \qquad n = ۰,1,2,\ldots$$

با جایگذاری x, y به ترتیب با x_n, x_{n+1} در رابطه (۴) داریم:

$$a_1 d(T(x_n), T(x_{n+1})) + (1_{\mathbb{A}} - a_1)[d(x_n, T(x_n)) + d(y, T(x_{n+1}))] + a_2[d(x_{n+1}, T(x_n)) + d(x_n, T(x_{n+1}))] \le a_3 d(x_n, x_{n+1}) + a_4 d(x, T^2(x_n)),$$

بنابراین

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) + (a_2 - a_4) d(x_n, x_{n+2}) \le (a_3 + a_1 - 1_{\mathbb{A}}) d(x_n, x_{n+1}).$$

قرار می‌دهیم $a = a_۳ + a_۲ - ۱_{\mathbb{A}}$، لذا

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\le a d(x_{n-1}, x_n) \\ &\le (a)^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\le \cdots \\ &\le (a)^n d(x_., x_1) \\ &= (a)^n B. \end{aligned}$$

برای سهولت عضو $d(x_1, x_.)$ در $\mathbb{A}$ را با B نمایش دادیم. اکنون نشان می‌دهیم دنباله $\{x_n\}$ کوشی است. به ازای $n < n + m$ داریم:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\le b d(x_n, x_{n+1}) + b^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + b^m d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\le b a^n B + \ldots + b^m a^{n+m-1} B \\ &= \frac{1}{b^n a} \sum_{k=n+1}^{n+m} b^k a^k B, \end{aligned}$$

با توجه به نامساوی فوق

$$\| d(x_n, x_{n+m}) \| < \| \frac{1}{b^n a} \sum_{k=n+1}^{\infty} b^k a^k B \| \longrightarrow ۰, \quad (n \to \infty).$$

بنابراین $\{x_n\}$ یک دنباله‌ی کوشی نسبت به $\mathbb{A}$ است. چون فضای $(X, \mathbb{A}, d)$ کامل است، پس $x \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. لذا

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T^n(x_.) = x.$$

از آنجا که T پیوسته مداری است،

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T(T^n(x_.)) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x_.) = x.$$

در نتیجه x یک نقطه ثابت نگاشت T است.
لازم به ذکراست چون هر فضای متریک C^*- جبر-مقدار $(X, \mathbb{A}, d)$ یک فضای $b-$متریک C^*- جبر-مقدار $(X, \mathbb{A}, d)$ است قضیه فوق برای فضاهای متریک C^*- جبر-مقدار $(X, \mathbb{A}, d)$ نیز برقرار است.

قضیه ۲-۶: فرض کنیم $(X, \mathbb{A}, d)$ یک فضای متریک C^*- جبر-مقدار باشد و $\phi: \mathbb{A}_+ \to \mathbb{A}_+$ یک نگاشت با ضابطه $\phi(t) = a^* t a$ که در آن $\phi(t) \le t$، $a \in \mathbb{A}$ و $\| a \| < ۱$. فرض کنیم نگاشت $T: X \to X$ به ازای هر $x, y, z \in X$ که $x \ne y \ne z$ در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$d(T(x), T(y)) + d(T(y), T(z)) \le \phi(d(x, y) + d(y, z)). \quad (۵)$$

آنگاه T دارای نقطه ثابت است، هرگاه نقطه $x_. \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $T^2(x_.) \ne x_.$.

اثبات: فرض کنیم یک نقطه $x_. \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $T^2(x_.) \ne x_.$. قرار می‌دهیم $x_n = T^n(x_.)$. اگر $n \ge ۰$ ی وجود داشته باشد به طوری که $x_n = x_{n+۱}$، آنگاه

$$T(x_n) = T^{n+1}(x_.) = x_{n+1} = x_n\ ,$$

بنابراین x_n نقطه ثابت نگاشت T است. اگر به ازای هر n، $x_n \neq x_{n+1}$ آنگاه داریم:

$$d(T^n(x_.), T^{n+1}(x_.)) + d(T^{n+1}(x_.), T^{n+2}(x_.)) \preceq \phi(d(T^{n-1}(x_.), T^n(x_.)) + d(T^n(x_.), T^{n+1}(x_.)) \preceq \phi^2(d(T^{n-2}(x_.), T^{n-1}(x_.)) + d(T^{n-1}(x_.), T^n(x_.)) \preceq \ldots \preceq \phi^n(d(x_., T^1(x_.)) + d(T^1(x_.), T^2(x_.)).$$

لذا برای هر $k, l, m \in \mathbb{N}$ که $k > l \geq m$ قرار می‌دهیم $t_n = d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})$، در این صورت خواهیم داشت:

$$d(x_k, x_l) \preceq \sum_{n=m}^{l-1} t_n \preceq \sum_{n=m}^{l-1} \phi^n(t_.) \preceq \sum_{n=1}^{\infty} (a^*)^n t_. a^n$$

و

$$\| d(x_k, x_l) \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \| a \|^{2n} \| t_. \| \to \cdot \quad (n \to \infty).$$

بنابراین $\{x_n\}$ یک دنباله‌ی کوشی نسبت به $\mathbb{A}$ است. چون فضای $(X, \mathbb{A}, d)$ کامل است، پس $x \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. لذا

$$d(T^{n+1}(x_.), T(x)) + d(T(x), T^{n+2}(x_.)) \preceq \phi(d(T^n(x_.), x) + d(x, T^{n+2}(x_.)) \preceq d(T^n(x_.), x) + d(x, T^{n+2}(x_.)) \to \cdot. \quad (n \to \infty)$$

بنابراین

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

و x یک نقطه ثابت نگاشت T است.

نتیجه ۲-۷: فرض کنیم $(X, \mathbb{A}, d)$ یک فضای متریک C^*- جبر–مقدار باشد و $\phi: \mathbb{A}_+ \to \mathbb{A}_+$ یک نگاشت با ضابطه $\phi(t) = a^*ta$ که در آن $\phi(t) \preceq t$، $\| a \| < ۱$ و $a \in \mathbb{A}$. اگر نگاشت $T: X \to X$ به ازای هر $x, y, z \in X$ که $x \neq y \neq z$ در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$d(T(x), T(y)) + d(T(y), T(z)) + d(T(z), T(x)) \preceq \phi(d(x, y) + d(y, z) + d(z, x)).$$

آنگاه T دارای نقطه ثابت است، هرگاه یک نقطه $x_. \in X$ وجود داشته باشد به‌طوری که $T^2(x_.) \neq x_.$.

فهرست منابع

[1] I. A. Bakhtin. The contraction mapping principle in almost metric spaces. Journal of Functional Analysis 30: 26-37 (1989).

[2] S. Czerwik. Nonlinear set-valued contraction mappings in b–metric spaces, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 46: 263-276 (1998).

[3] N. Hussain, M. H . Shah. KKM Mappings in cone b–metric spaces. Computer and Mathematics with Applications 62: 1677-1684 (2011).

[4] J. B. Conway. A Course in functional analysis. Springer-Verlag, NewYork, Berlin, Heidelberg Tokyo, (1985).

[5] R. V. Kadison, J. R .Ringrose. Fundamentals of the theory of operator algebras; Volume I: Elementary Theory. (1997).

[6] T. Kamran, M. Postolache, A. Ghiura, S. Batul, R. Ali. The Banach contraction principle in C^*-algebra-valued b-metric spaces with application. Journal of Fixed Point Theory and Applications 10: 1-7 (2016).

[7] Z. Ma, L. Jiang. C^*-Algebra-valued b-metric spaces and related fixed point theorems. Journal of Fixed Point Theory and Applications 222: 1-11 (2015).

[8] Z. Ma, L. Jiang, H. Sun. C^*-algebra-valued metric spaces and related fixed point theorems. Journal of Fixed Point Theory and Applications 206 (2014)

[9] G. Murphy. C^*-Algebras and operator theory. Academic Press, London (1990).