دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره نوزدهم، مرداد و شهریور ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

یک مشخص سازی جدید برای عملگرهای میر-کیلر جمع شونده و کاربردهای آن

حسن خندانی[*1]، فرشید خجسته[2]

(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحدمهاباد، مهاباد، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحداراک، اراک، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۷/۲۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۰/۰۵

چکیده

قضیه نقطه ثابت داربو و تعمیم‌های آن نقش بسیار مهمی در حل وجودی معادلات انتگرال دارد. قضیه نقطه ثابت برای نگاشت‌های میر–کیلر جمع شونده یکی از تعمیم‌های قضیه داربو است که بسیاری از تعمیم‌های دیگر حالت خاصی از آن هستند. در سال‌های اخیر، نویسندگان زیادی از این توسیع‌ها برای حل تعدادی از معادلات انتگرال استفاده کرده‌اند. برخی از آنها با استفاده از اندازه نافشردگی و الهام گرفتن از انقباض‌های میر–کیلر در فضاهای متری، یک مشخص‌سازی برای نگاشت‌های میر–کیلر جمع شونده ارایه کرده‌اند. اما از آنجا که این مشخصه‌سازی‌ها نیازمند وجود یک L – تابع هستند و پیدا کردن یک L – تابع نیازمند تلاش زیادی است بنابراین چنین مشخص‌سازی‌هایی عملا بی‌فایده‌اند. لذا بر آن شدیم که یک مشخصه‌سازی جدید برای این نوع عملگرها بیابیم. در این مقاله، با استفاده از مفهوم اندازه نافشردگی یک مشخص‌سازی جدید برای نگاشت‌های میر–کیلر جمع شونده را ارایه می‌کنیم. مشخص‌سازی حاضر معیاری را بدست می‌دهد که بوسیله آن می‌توان بررسی کرد که یک تعمیم ارایه شده از قضیه داربو یک انقباض میر–کیلر جمع شونده است یا خیر. در پایان با استفاده از مشخص‌سازی ارایه شده نشان می‌دهیم که بسیاری از تعمیم‌های قضیه داربو که تاکنون ارایه شده اند از نوع میر–کیلر جمع شونده هستند.

واژه‌های کلیدی: عملگرهای از نوع S، L–تابع، قضیه نقطه ثابت داربو، اندازه نافشردگی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: khandani.hassan@yahoo.com, khandani@iau-mahabad.ac.ir

۱- مقدمه

اصل انقباضی باناخ [۱] یکی از مهمترین قضایا در نظریه نقطه ثابت در فضاهای متری است که به روش‌های گوناگونی تعمیم داده شده است. قضیه نقطه ثابت میر-کیلر [۲] یکی از مهم‌ترین تعمیم‌های این قضیه به شمار می‌رود. بسیاری از تعمیم‌های قضیه انقباضی باناخ، معادل با قضیه انقباض میر-کیلر یا حالت خاصی از آن هستند. بنابراین پیدا کردن معیاری برای تشخیص نگاشت‌های میر-کیلر از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. برای مشاهده دو مشخص‌سازی کاملاً متفاوت از انقباض‌های میر-کیلر در فضاهای متری، خواننده را به منابع [۳] و [۴] ارجاع می‌دهیم. داربو [۵] با استفاده از مفهوم اندازه نافشردگی بطور هم زمان تعمیمی از قضایای نقطه ثابت براوئر و قضیه انقباضی باناخ را ارایه نمود که به قضیه نقطه ثابت داربو موسوم است. قضیه نقطه ثابت داربو نظیر قضیه انقباضی باناخ بوده و مانند بحث فضاهای متری، تعمیم‌های مختلفی برای این قضیه ارایه شده است.

آقاجانی و همکارانش [۶] با استفاده از اندازه نافشردگی و الهام از انقباض‌های میر-کیلر در فضاهای متری، نگاشت‌های میر-کیلر جمع شونده را تعریف کردند و مشابه با مشخص‌سازی انقباض‌های میر-کیلر در فضاهای متری یک مشخص‌سازی برای نگاشت‌های میر-کیلر جمع شونده ارایه نمودند. اما از آنجا که شرط میر-کیلر بودن یک عملگر در این مشخص‌سازی وجود یک L- تابع می‌باشد، و پیدا کردن این L- تابع دشوار است، لذا این مشخص‌سازی کاربردی در تشخیص نگاشت‌های میر-کیلر جمع شونده ندارد.

در این مقاله ابتدا مفهوم S - عملگرها را تعریف می‌کنیم و با استفاده از آن یک مشخص سازی کاملاً جدید از نگاشت‌های میر-کیلر جمع شونده را ارایه می‌دهیم. نتایج زیادی در انتهای این مقاله ارایه شده است که نشان می‌دهد مشخص‌سازی ارایه شده می‌تواند به عنوان یک معیار ساده و عملی برای تشخیص عملگرهای میر-کیلر جمع شونده بکار رود. همچنین این نتایج نشان می‌دهند که بسیاری از تعمیم‌های ارایه شده برای قضیه نقطه ثابت داربو معادل با عملگرهای میر-کیلر جمع شونده بوده یا حالت خاصی از آنها هستند.

۲- تعاریف و پیش نیازها

دراین مقاله فضای متری همواره با (X,d) نمایش داده می‌شود. همچنین مجموعه اعداد حقیقی، حقیقی مثبت و اعداد طبیعی به ترتیب با $\mathbb{R}$، $\mathbb{R}_+$ و $\mathbb{N}_0$ نشان داده می‌شوند.

ابتدا برخی تعاریف و نتایج را که درادامه مورد نیاز خواهند بود را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید $(E,\|.\|)$ یک فضای باناخ، $x \in E$ و $r > 0$ باشد. همسایگی به مرکز x و شعاع r را با $B(x,r)$ یا بطور مختصر با B_r نمایش می‌دهیم. همچنین فرض کنید M_E خانواده همه زیر مجموعه‌های ناتهی و کراندار از E و N_E زیر خانواده همه زیر مجموعه‌های فشرده از M_E باشد. اگر X یک زیر مجموعه E باشد آنگاه بستار و غلاف محدب تولید شده توسط X به ترتیب با $\overline{X}$ و co(X) نشان می‌دهیم.

جهت یادآوری اصل موضوعی اندازه نافشردگی در قالب تعریف زیر آمده است. برای جزییات بیشتر خواننده را به [۷] ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۱: نگاشت $\mu : M_E \to \mathbb{R}_+$ یک اندازه نافشردگی نامیده می‌شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

۱) خانواده $\ker\mu = \{X \in M_E : \mu(X) = 0\}$ ناتهی باشد و $\ker\mu \subseteq N_E$

۲) $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \le \mu(Y)$

۳) $\mu(\overline{X}) = \mu(\,\mathrm{co}(X)) = \mu(X)$

۴) $\mu(tX + (1-t)Y) \le t\mu(X) + (1-t)\mu(Y)$ برای هر $t \in [0,1]$

۵) برای هر خانواده ناتهی از زیر مجموعه‌های بسته $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ در M_E که برای هر $n \in \mathbb{N}_0$ داشته باشیم $X_{n+1} \subset X_n$. در این صورت اگر $\lim_{n\to\infty}\mu(X_n) = 0$ آنگاه $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ ناتهی می‌باشد و $X_\infty \in \ker\mu$.

قضیه ۱: (شودر[۷]) فرض کنید E یک فضای باناخ و C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از E و μ یک اندازه نافشردگی در M_E باشد. در این صورت هر نگاشت پیوسته وفشرده $T : C \to C$ دارای نقطه

ثابت است.

قضیه ۲: (داربو[۷]) فرض کنید E یک فضای باناخ و C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از E و μ یک اندازه نافشردگی در M_E باشد. فرض کنید $0 \le k < 1$ و نگاشت $T: C \to C$ برای هر $X \in M_E$ در شرط زیر صدق می‌کند.

$$\mu(T(X)) \le k\mu(X)$$

در این صورت T دارای نقطه ثابت در C است.

تعریف ۲: هر عملگر T که در شرط زیر صدق کند یک عملگر k- جمع شونده نامیده می‌شود.

$$\mu(T(X)) \le k\mu(X)$$

اگر برای هر زیر مجموعه $X \subset C$ که $\mu(X) \neq 0$ داشته باشیم:

$$\mu(T(X)) < \mu(X)$$

آنگاه T یک عملگر جمع شونده نامیده می‌شود.

تعریف ۳: تابع $\varphi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ یک L- تابع نامیده می‌شود هر گاه $\varphi(0) = 0$ و $\varphi(s) > 0$ برای هر $s > 0$. همچنین برای هر $s > 0$ یک $u > s$ موجود باشد بطوری که داشته باشیم $\varphi(t) \le s$ برای هر $t \in [s,u]$.

تعریف ۴: فرض کنید E یک فضای باناخ و C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از E و μ یک اندازه نافشردگی در M_E باشد. نگاشت $T: C \to C$ یک عملگر میر–کیلر جمع شونده نامیده می‌شود هرگاه برای هر $0 < \epsilon$ یک $\delta > 0$ موجود باشد بطوری که برای هر $X \in M_E$ که $\mu(X) \neq 0$ داشته باشیم

$$\varepsilon < \mu(X) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \mu(T(X)) < \varepsilon$$

قضیه ۳: (آقاجانی و همکاران [۶]) فرض کنید E یک فضای باناخ و C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از E و μ یک اندازه نافشردگی در M_E باشد. نگاشت $T: C \to C$ یک عملگر میر–کیلر جمع شونده است اگر و فقط اگر یک L- تابع φ موجود باشد بطوری که برای هر $X \in M_E$ که $\mu(X) \neq 0$ داشته باشیم

$$\mu(T(X)) < \varphi(\mu(X)).$$

تعریف ۵: (خندانی[۸]) فرض کنید E یک فضای باناخ و C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از E و μ یک اندازه نافشردگی در M_E و $T: C \to C$ یک عملگر دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم $X_0 = C$ و برای هر $1 \le n \in N_0$ داشته باشیم $X_{n+1} = \overline{co(TX_n)}$. در این صورت دنباله $\{X_n\}$ یک دنباله پیکارد T در C نامیده می‌شود.
روشن است که برای هر $n \in \mathbb{N}_0$ داریم $X_{n+1} \subset X_n$ و $\mu(X_\infty) \le \lim_{n\to\infty}\mu(X_n)$, که در آن $X_\infty = \cap_{n\in\mathbb{N}_0} X_n$ و X_∞ نیز تحت T پایاست.
وترو [۹] و همکاران مجموعه توابع $V-\mu$ انقباض راتعریف نمودند وقضیه نقطه ثابت زیررا برای این دسته از توابع بدست آوردند.

تعریف ۶: (وترو [۹]) تابع $\rho: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ یک v- تابع نامیده می‌شود هرگاه برای هردنباله $\{a_n\} \subset \mathbb{R}_+$ از اعداد حقیقی که برای هر $n \in \mathbb{N}_0$، $\rho(a_{n+1}, a_n) > 0$ داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. فرض کنید E یک فضای باناخ و C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از E و μ یک اندازه نافشردگی در M_E و $T: C \to C$ یک نگاشت دلخواه باشد. T یک نگاشت $V-\mu$ انقباض نامیده می‌شود هر گاه یک v- تابع ρ موجود باشد بطوری که برای هر $Z \subset M$ که $\mu(Z) > 0$ داشته باشیم

$$\rho(\mu(T(Z)), \mu(Z)) > 0.$$

۳- نتایج اصلی

در این بخش عملگرهای از نوع S یا به اختصار S - عملگرها را معرفی می‌کنیم و برپایه آن یک مشخص سازی را برای عملگرهای میر-کیلرجمع شونده ارایه می‌کنیم.

تعریف ۷: فرض کنید E یک فضای باناخ و C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از E و μ یک اندازه نافشردگی در M_E باشد. $T: C \to C$ یک عملگر ازنوع S_0 است اگر برای هر دنباله دلخواه $\{A_n\} \subset M_E$ که $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(T(A_n)) = L$ و $L \geq 0$ آنگاه بتوان نتیجه گرفت $L = 0$. می‌گوییم T یک عملگر ازنوع S_1 است هرگاه اگر برای هر دنباله $\{A_n\} \subset M_E$ که $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(T(A_n)) = L,$ که در آن $L \geq 0$ و به ازای هر $n \in N_0$ $\mu(T(A_n)) \geq L$ آنگاه بتوان نتیجه گرفت $L = 0$. می‌گوییم T یک عملگر از نوع S است اگر $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = L$ و $L \geq 0$ آنگاه بتوان نتیجه گرفت $L = 0$ که در آن $\{A_n\} \subset M_E$ یک دنباله پیکارد در زیر مجموعه بسته، ناتهی و محدب از C است.

قضیه۴: فرض کنید E یک فضای باناخ و C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از E و μ یک اندازه نافشردگی در M_E باشد و $T: C \to C$ یک عملگر دلخواه باشد. در این صورت

الف) هر عملگر از نوع S_0 یک عملگر از نوع S_1 است،

ب) هر عملگر از نوع S_1 یک عملگر از نوع S است.

اثبات. اثبات قسمت الف) بدیهی است و بسادگی نتیجه می‌شود. برای اثبات قسمت ب) فرض کنید T یک عملگر از نوع S_1 باشد. فرض کنید $\{A_n\}$ یک دنباله پیکارد در زیر مجموعه بسته، ناتهی و محدب C باشد که تحت T پایاست. فرض کنید $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = L$ و $L \geq 0$، داریم

$$\mu(TA_n) = \mu(\overline{coTA_n}) = \mu(A_{n+1})$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty}\mu(TA_n) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n) = L$. بنا به تعریف دنباله پیکارد دنباله $\{\mu(A_n)\}$ یک دنباله کاهشی از اعداد نامنفی است، در نتیجه $\mu(TA_n) \geq L$ برای هر $\mathbb{N}_0$. چون T یک عملگر از نوع S_1 است نتیجه می‌گیریم $L = 0$. پس T یک عملگر از نوع S است.

قضیه ۵ و ۶ در زیر، قضایای اصلی این مقاله هستند و مشخصه‌سازی نگاشت‌های میر-کیلر جمع شونده را کاملاً مشخص می‌کنند.

قضیه ۵: فرض کنید E یک فضای باناخ و C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از E و μ یک اندازه نافشردگی در M_E باشد، $T: C \to C$ یک عملگر از نوع S باشد. در این صورت T دارای یک نقطه ثابت در C است.

اثبات. فرض کنید $\{A_n\}$ دنباله پیکارد T در C باشد. از تعریف پیکارد، $\{A_n\}$ یک دنباله ی تودر تو و نزولی از مجموعه‌هاست که $T(A_\infty) \subset A_\infty$ که در آن $A_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$. چون $\{\mu(A_n)\}$ یک دنباله نزولی از اعداد حقیقی مثبت است، بنابراین همگرا به عددی مانند $L \geq 0$ است. چون T یک عملگر از نوع S است، نتیجه می‌گیریم $L = 0$. حال داریم $\mu(A_\infty) = 0$ و بنابه قضیه شودر T دارای یک نقطه ثابت در A_∞ است، پس حکم ثابت می‌شود.

قضیه ۶: فرض کنید E یک فضای باناخ و C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از E و μ یک اندازه نافشردگی در M_E باشد و $T: C \to C$ یک عملگر دلخواه باشد که برای هر زیرمجموعه ناتهی و کراندار A از C داشته باشیم $\mu(TA) \leq \mu(A)$. در این صورت شرایط زیر معادل هستند.

(i) T یک عملگر میر-کیلر جمع شونده است،

(ii) T یک عملگر ازنوع S_1 است.

اثبات. ابتدا $(ii) \to (i)$ را بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم T در شرط (ii) صدق کند. اگر T یک نگاشت میر-کیلر جمع شونده نباشد، در این صورت عدد $\epsilon_0 > 0$ موجود است بطوری که برای هر n یک

مجموعه ناتهی و کراندار A_n در C موجود است به طوری که

$$\epsilon_0 \le \mu(A_n) < \epsilon_0 + \frac{1}{n} \text{ و } \mu(T(A_n)) \ge \epsilon_0$$

چون برای هر $n \in \mathbb{N}_0$ داریم $\mu(T(A_n)) \le \mu(A_n)$ بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$\epsilon_0 \le \mu(T(A_n)) \le \mu(A_n) \le \epsilon_0 + \frac{1}{n}$$

چون $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(T(A_n)) = \epsilon_0$ و T یک عملگر ازنوع S_1 است، نتیجه می‌گیریم که $\epsilon_0 = 0$ و بنابراین حکم ثابت می‌شود.

برای نشان دادن $(ii) \leftarrow (i)$ فرض کنید $\{A_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های ناتهی بسته و کراندار در C باشد و $L \ge 0$ بطوری که: $\lim_{n\to\infty} \mu(T(A_n)) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = L$ و برای هر عدد طبیعی n داریم $\mu(T(A_n)) \ge L$. اگر $L > 0$ در این صورت $\delta > 0$ موجود است بطوری که برای هر زیر مجموعه ناتهی وکراندار X از C داریم:

$$L \le \mu(X) < L + \delta \Rightarrow \mu(T(X)) < L$$

چون $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = L$، بنابراین عدد صحیح مثبت m موجود است بطوریکه $L \le \mu(A_m) < L + \delta$.
حال از تعریف عملگر میر-کیلر داریم $\mu(TA_m) < L$.
این با فرض اینکه T یک عملگر از نوع S_1 است تناقض دارد و بنابراین حکم ثابت می‌شود.

۴- کاربرد مشخصه سازی میر-کیلر در توسیع نتایج

در این بخش با استفاده از مشخص‌سازی بدست آمده نشان می‌دهیم بسیاری از قضایای نقطه ثابت که قبلاً بدست آمده‌اند حالت خاصی از عملگرهای میر-کیلر جمع شونده هستند. همچنین در بررسی این نتایج عملاً نشان می‌دهیم که چگونه از قضیه مشخص‌سازی برای تشخیص این که یک انقباض داده شده میر-کیلر جمع شونده است استفاده می‌شود.

نتیجه ۱: فرض کنید E یک فضای باناخ و C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از E و μ یک اندازه نافشردگی در M_E باشد و اگر $T: C \to C$ یک عملگر پیوسته باشد بطوریکه برای هر زیر مجموعه ناتهی و کراندار X از C در شرط زیر صدق کند.

$$\mu(T(X)) \le \varphi(\mu(X))$$

که در آن $\varphi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ یک تابع نیم پیوسته بالایی است به طوری که $\varphi(t) < t$ برای هر $t > 0$ و $\varphi(0) = 0$. آنگاه یک عملگر میر-کیلر جمع شونده است.

اثبات. فرض کنید $\{A_n\}$ یک دنباله از زیر مجموعه‌های ناتهی و کراندار در C باشد بطوری که $\mu(T(A_n))$ و $\mu(A_n)$ هر دو همگرا به $L \ge 0$ باشند. به ازای هر $n \in \mathbb{N}_0$ داریم:

$$\mu(T(A_n)) \le \varphi(\mu(A_n)).$$

با گرفتن حد زبرین از طرفین نامساوی فوق و شرط نیم پیوستگی بالایی φ نتیجه می‌گیریم:

$$L \le \limsup_{n\to\infty} \varphi(\mu(A_n)) \le \varphi(L),$$

حال از تعریف φ نتیجه می‌گیریم $L = 0$. پس T یک عملگر از نوع S_0 است. از تعریف φ نتیجه می‌شود که برای هر زیر مجموعه ناتهی و کراندار X از C

$$\mu(T(X)) \le \mu(X)$$

پس بنا به قضایای۴ و ۶ نتیجه می‌گیریم که T یک عملگر جمع شونده میر-کیلر است.

نتیجه ۲: فرض کنید E یک فضای باناخ و C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از E، μ یک اندازه نافشردگی در M_E و $T: C \to C$ یک عملگر پیوسته باشد بطوریکه برای هر زیر مجموعه ناتهی و کراندار X از C در شرط زیر صدق کند.

$$\mu(T(X)) \le \beta(\mu(X))\mu(X)$$

که در آن $\alpha:[0,\infty)\to[0,1)$ نگاشتی است بطوری که اگر $\alpha(t_n)\to 1$ آنگاه $t_n\to 0$. در این صورت T یک عملگر میر-کیلر جمع شونده است.

اثبات. فرض کنید $\{A_n\}$ یک دنباله از زیر مجموعه‌های ناتهی و کراندار در C باشد بطوری که $\mu(T(A_n))$ و $\mu(A_n)$ هر دو همگرا به $L\geq 0$ باشند. فرض کنید $L>0$. بنا به فرض برای هر $n\in\mathbb{N}_0$ داریم

$$\mu(T(A_n))\leq\alpha(\mu(A_n))\mu(A_n)$$

با گرفتن حد زیرین از نامساوی بالا نتیجه می‌گیریم:

$$L\leq\liminf_{n\to\infty}\alpha(\mu(A_n)))L.$$

با تقسیم کردن طرفین رابطه فوق بر L بدست می‌آوریم:

$$1\leq\liminf_{n\to\infty}(\alpha(\mu(X_n))$$

و ازتعریف تابع α داریم

$$\limsup_{n\to\infty}\alpha(\mu(A_n)))\leq 1,$$

پس نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha(\mu(A_n)))=1,$$

چون برای هر $n\in\mathbb{N}_0$ داریم:

$$\mu(A_n)\geq\mu(T(A_n))\geq L$$

بنابرین نتیجه می‌گیریم که $\lim_{n\to+\infty}\alpha(t_n)=1,$ که در آن برای هر $n\in\mathbb{N}_0$ داریم $t_n=\mu(A_n)$. از فرض مساله نتیجه می‌شود که $L=\lim_{n\to\infty}t_n=0$. این تناقض نشان می‌دهد که $L=0$. از تعریف α نتیجه می‌شود که برای هر $X\in M_E$ داریم $\mu(T(X))\leq\mu(X)$. حال از قضایای ۴ و ۶ نتیجه می‌شود که T یک نگاشت میر-کیلر جمع شونده است.

وترو و همکاران مفهوم $V-\mu$ انقباض را تعریف نمودند(تعریف ۶). در قضیه زیر نشان می‌دهیم هر $V-\mu$ انقباض، یک انقباض از نوع S است.

نتیجه ۳: هر $V-\mu$ انقباض، یک انقباض از نوع S است.

اثبات. فرض کنید ρ یک V - تابع باشد و $a>0$. اگر $\rho(a,a)>0$ آنگاه به ازای هر $n\in\mathbb{N}_0$ تعریف کنید $a_n=a$. داریم $\rho(a_{n+1},a_n)=\rho(a,a)>0$ که بنا به تعریف ρ نتیجه می‌شود $a=\lim_{n\to\infty}a_n=0$. این تناقض نشان می‌دهد $\rho(a,a)=0$ برای هر $a>0$. فرض کنید $\{X_n\}\subset X$ یک دنباله پیکارد در M باشد و $\mu(X_n)\to L$ وقتی $n\to\infty$. نشان می‌دهیم $L=0$. اگر برای تعداد نامتناهی مقدار از n داشته باشیم $\mu(X_n)=0$ آنگاه $L=0$. بنابراین فرض کنید عدد صحیح مثبت $m\in\mathbb{N}_0$ موجود است بطوری که اگر $n>m$ آنگاه $\mu(X_n)>0$. برای هر $n\in N_0$ قرار دهید $Y_n=X_{n+m}$. چون T یک $V-\mu$ انقباض است، از تعریف ρ نتیجه می‌شود که

$$\rho(\mu(Y_{n+1}),\mu(Y_n))$$
$$=\rho(\mu(T(X_{n+m})),\mu(X_{n+m}))>0$$

این نشان می‌دهد که T یک عملگر از نوع S است.

نتیجه ۴: (گاوروتا و همکاران[۱۰]) فرض کنید E یک فضای باناخ و C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از E، μ یک اندازه نافشردگی در M_E و $T:C\to C$ یک عملگر پیوسته باشد بطوریکه برای هر زیر مجموعه ناتهی و کراندار X از C در شرط زیر صدق کند.

$$\psi(T(X))\leq\alpha(\mu(X))-\beta(\mu(X))$$

که در آن $\alpha,\beta:[0,\infty)\to[0,\infty)$ به ترتیب توابع پیوسته و نیم پیوسته پایینی هستند. همچنین $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ یک تابع نیم پیوسته پایینی از سمت راست است و برای هر $t>0$ داریم:

$$\psi(t)-\alpha(t)+\beta(t)>0$$

در این صورت T یک نگاشت میر-کیلر جمع شونده است.

اثبات. فرض کنید $\{A_n\}$ یک دنباله از زیر مجموعه‌های ناتهی و کراندار در C باشد بطوری که $\mu(T(A_n))$ و $\mu(A_n)$ هر دو همگرا به $L \ge 0$ باشند. داریم

$$\psi(\mu(T(A_n)) \le \alpha(\mu(A_n)) - \beta(\mu(A_n))$$

برای هر $n \in \mathbb{N}_0$. باگرفتن حد زیرین وقتی $n \to \infty$ بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\psi(L) &\le \liminf_{n\to\infty} \psi(\mu(T(A_n))) \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \psi(\mu(T(A_n))) \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \alpha(\mu(A_n)) - \liminf_{n\to\infty} \beta(\mu(A_n)) \\ &\le \alpha(L) - \beta(L),\end{aligned}$$

از فرض مساله نتیجه می‌گیریم $L=0$. حال بنا به قضایای۴ و۶ می‌شود که T یک نگاشت میر-کیلر جمع شونده است.

نتیجه ۵: (صمدی و همکاران[۱۱]) فرض کنید E یک فضای باناخ و C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از E، μ یک اندازه نافشردگی در M_E و $T: C \to C$ یک عملگر پیوسته باشد بطوریکه برای هر زیر مجموعه ناتهی و کراندار X از C در شرط زیر صدق کند.

$$\psi((\mu(T(X)))) \le \varphi(\psi(\mu(X)))\psi(\mu(X))$$

که در آن $\psi: [0;\infty) \to [0;\infty)$ یک نگاشت صعودی است به طوری که $\psi(t)=0$ اگر وفقط اگر $t=0$ و $\varphi: [0;\infty) \to [0;1)$ نگاشتی است که برای هر $r \ge 0$ داریم $\limsup_{t\to r+} \varphi(t) < 1$. در این صورت T یک نگاشت میر-کیلر جمع شونده است.

اثبات. از تعریف φ نتیجه می‌شود که برای هر $X \in M_E$ که $\mu(X)>0$ داریم

$$\psi((\mu(T(X)))) < \psi(\mu(X)).$$

چون ψ یک نگاشت صعودی است بنابراین برای هر $X \in M_E$ خواهیم داشت $\mu(T(X)) \le \mu(X)$. فرض کنید $\{A_n\}$ یک دنباله از زیر مجموعه‌های ناتهی و کراندار در C باشد بطوری که $\mu(T(A_n))$ و $\mu(A_n)$ هر دو همگرا به $L \ge 0$ باشند. نشان می‌دهیم $L=0$. رای هر $n \in \mathbb{N}_0$ داریم:

$$\psi((\mu(T(A_n)))) \le \varphi(\psi(\mu(A_n)))\psi(\mu(A_n)),$$

باگرفتن حد زیرین از طرفین نامساوی فوق داریم:

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty} \psi((\mu(T(A_n)))) \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \varphi(\psi(\mu(A_n)))\psi(\mu(A_n)) \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \varphi(\psi(\mu(A_n))) \liminf_{n\to\infty} \psi(\mu(A_n)),\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty} \psi((\mu(T(A_n)))) \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \varphi(\psi(\mu(A_n))) \liminf_{n\to\infty} \psi(\mu(A_n)),\end{aligned}$$

ولی $\mu(A_n) \ge \mu(T(A_n))$ برای هر $n \in \mathbb{N}_0$ و $\mu(A_n), \mu(T(A_n)) \to L+$ وقتی $n \to \infty$ بنابراین، برای برخی $a \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \psi((\mu(T(A_n)))) &= \liminf_{n\to\infty} \psi(\mu(A_n)) \\ &= \liminf_{t\to L+} \psi(t) = a,\end{aligned}$$

اگر $a>0$ آنگاه از تقسیم نامساوی فوق بر a به تناقض می‌رسیم. بنا براین $a=0$. اما ψ یک تابع صعودی است، بنابراین یک تابع نیم پیوسته پایینی از سمت راست است ونتیجه می‌گیریم:

$$\psi(L) \le \liminf_{n\to\infty} \psi(\mu(A_n)) = 0,$$

که از آن نتیجه می‌شود $L=0$. بنابراین T یک عملگر ازنوع S_1 است و بنا برقضیه ۶ نتیجه می‌گیریم T یک عملگر میر-کیلر جمع شونده است.

نتیجه ۶: (آقاجانی و همکاران[۱۲]) فرض کنید E یک فضای باناخ و C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از E، μ یک اندازه نافشردگی در M_E و $T: C \to C$ یک عملگر پیوسته باشد بطوریکه برای هر زیر مجموعه ناتهی و کراندار X از C در شرط زیر صدق کند.

$$\psi(\mu(T(X))) \leq \psi(\mu(X)) - \varphi(\mu(X)),$$

که در آن $\psi,\varphi:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ به ترتیب توابع نیم پیوسته پایینی و پیوسته هستند. علاوه براین $\varphi(t) > 0$ برای هر $t > 0$ و $\varphi(0) = 0$. در این صورت T یک عملگر میر-کیلر جمع شونده است.

اثبات. فرض کنید $\{A_n\}$ یک دنباله از زیر مجموعه‌های ناتهی و کراندار در C باشد بطوری که $\mu(T(A_n))$ و $\mu(A_n)$ هر دو همگرا به $L \geq 0$ باشند. برای هر $n \in \mathbb{N}_0$ داریم

$$\psi((\mu(T(A_n)))) \leq \psi(\mu(A_n)) - \varphi(\mu(A_n)),$$

با گرفتن حد زبرین از طرفین داریم

$$\psi(L) \leq \psi(L) - \liminf_{n\to\infty} \varphi(\mu(A_n)),$$

بنابراین $\liminf_{n\to\infty} \varphi(\mu(A_n)) = 0$، اما φ یک تابع نیم پیوسته پایینی است و بنابراین نتیجه می‌گیریم

$$0 \leq \varphi(L) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(\mu(A_n)) = 0,$$

پس $L = 0$. پس بنا به قضایای۴ و ۶ نتیجه می‌گیریم که T یک عملگر میر-کیلر جمع شونده است.

کای و لیانگ [۱۳] با استفاده از مفهوم اندازه نافشردگی، قضیه برانسیاری رابه نظریه نقطه ثابت توپولوژیکی تعمیم دادند. سوزوکی نشان داد که قضیه برانسیاری در فضاهای متری حالت خاصی از قضیه نقطه ثابت میر-کیلر است[۱۴]. ما نشان می‌دهیم که انقباض کای و لیانگ نیز یک حالت خاص از عملگرهای میر-کیلر جمع شونده است.

نتیجه ۷: (کای و لیانگ[۱۳]) فرض کنید E یک فضای باناخ و C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از Eو μ یک اندازه نافشردگی در M_E و $T:C \to C$ یک عملگر پیوسته باشد بطوریکه برای هر زیر مجموعه ناتهی و کراندار X از C در شرط زیر صدق کند.

$$\psi\left(\int_0^{\mu(T(X))} g(t)dt\right) \leq$$
$$\psi\left(\int_0^{\mu(X)} g(t)dt\right) - \varphi\left(\int_0^{\mu(X)} g(t)dt\right),$$

که درآن $\psi,\varphi:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ توابعی هستند بطوری که φ نیم پیوسته پایین و ψ صعودی و پیوسته است. علاوه بر این $\varphi(0) = 0$ و $\varphi(t) > 0$ برای هر $t > 0$. همچنین $g:[0,\infty) \to [0,\infty)$ یک تابع لبگ انتگرال پذیر بوده و $\int_0^{\epsilon} g(t)dt > 0$ برای هر $\epsilon > 0$. در این صورت T یک عملگر میر-کیلر جمع شونده است.

اثبات. فرض کنید $\{A_n\}$ یک دنباله از زیر مجموعه‌های ناتهی و کراندار در C باشد بطوری که $\mu(T(A_n))$ و $\mu(A_n)$ هر دو همگرا به $L \geq 0$ باشند. نشان می‌دهیم $L = 0$. برای هر $n \in \mathbb{N}_0$ داریم

$$\psi\left(\int_0^{\mu(T(A_n))} g(t)dt\right) \leq$$
$$\psi\left(\int_0^{\mu(A_n)} g(t)dt\right) - \varphi\left(\int_0^{\mu(A_n)} g(t)dt\right),$$

با گرفتن حد زبرین خواهیم داشت:

$$\psi\left(\int_0^{L} g(t)dt\right) \leq$$
$$\psi\left(\int_0^{L} g(t)dt\right) - \liminf_{n\to\infty} \varphi\left(\int_0^{\mu(A_n)} g(t)dt\right),$$

چون φ یک تابع نیم پیوسته پایینی است خواهیم داشت:

$$\varphi\left(\left(\int_0^{L} g(t)dt\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi\left(\int_0^{\mu(A_n)} g(t)dt\right) = 0,$$

حال بنا به تعاریف g و φ نتیجه می‌گیریم $L = 0$. چون تابع ψ صعودی است ازتعریف g و شرط انقباض داده شده نتیجه می‌گیریم $\mu(T(X)) \leq \mu(X)$. حال بنا به قضایای ۴ و ۶ نتیجه می‌گیریم T یک عملگر میر-کیلر جمع شونده است.

نتیجه ۸: فرض کنید E یک فضای باناخ و C یک زیر مجموعه ناتهی، بسته، کراندار و محدب از E و μ یک اندازه نافشردگی در M_E باشد و $T:C \to C$ یک عملگر پیوسته باشد بطوریکه برای هر زیر مجموعه ناتهی و کراندار X از C در شرط زیر صدق کند.

$$f(\mu(T(X)), \mu(X)) \geq 0,$$

که در آن $f:[0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ در دوشرط زیر صدق می‌کند.

a) $f(z_1,z_2)<z_2-z_1$ برای هر $z_i>0$ که $i=1,2$.

b)برای هر دو دنباله $\{u_n\}$ و $\{v_n\}$ از اعداد حقیقی مثبت اگر $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}u_n=L>0$ آنگاه

$$\limsup_{n\to\infty} f(u_n,v_n)<0$$

در این صورت T یک عملگر میر-کیلر جمع شونده است.

اثبات. برای هر زیر مجموعه ناتهی X از C داریم

$$0\le f\,(\mu(T(X)),\mu(X))$$
$$=\mu(X)-\mu(T(X))$$

بنابراین

$$\mu(T(X))\le\mu(X).$$

فرض کنید $\{A_n\}$ یک دنباله از زیر مجموعه‌های ناتهی و کراندار در C باشد بطوری که $\mu(T(A_n))$ و $\mu(A_n)$ هر دو همگرا به $L\ge 0$ باشند. اگر $L>0$ آنگاه بنابه فرض و b) داریم

$$0\le\limsup_{n\to\infty} f(\mu(T(A_n)),\mu(A_n))<0,$$

این تناقض نشان می‌دهد که $L=0$. حال بنا به قضایای۴ و ۶ نتیجه می‌گیریم که T یک عملگر میر-کیلر جمع شونده است.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله مراتب تشکر و قدردانی خود را بدینوسیله از جناب آقای دکتر سید منصور واعظ پور ریاست محترم انجمن ریاضی ایران که در طول نگارش این تحقیق راهنمایی‌های ارزشمندی نموده اند ابراز می‌دارند. لازم به ذکر است این تحقیق موضوع طرح پژوهشی با کد ۵۱۶۶۳۹۳۱۱۱۰۰۰۲ می‌باشد که با حمایت مالی از طرف دانشگاه آزاد اسلامی واحد مهاباد انجام شده است.

فهرست منابع

[1] Agarwal, R.P., Meehan, M., O'Regan, D., "Fixed point theory and applications", Cambridge University Press, (2001).

[2] Meir, A., Keeler, E., "A theorem on contraction mappings", J. Math. Anal. Appl, 28(2) (1969), 326-329.

[3] Lim T. C., "On characterizations of Meir–Keeler contractive maps", Nonlinear Anal. (TMA), 46(1) (2001), 113-120.

[4] Khandani, H., "A characterization for Meir-Keeler contractions", Rend. Circ. Mat. Palermo Seri 2, 5 (2017), 1-15.

[5] Banaś, J., Jleli, M., Mursaleen, M., Samet, B., Vetro C., "Advances in Nonlinear Analysis via the Concept of Measure of Noncompactness", Springer-Verlag, (2017).

[6] Aghajani, A., M. Mursaleen, M., Haghighi, A. S., "Fixed point theorems for Meir-Keeler condensing operators via measure of noncompactness", Acta. Math. Sci, 35(3) (2015), 552-566.

[7] Akhmerov, R. R., Kamenskii, I. M., Potapov, A. S., Rodkina, A. E., Sadovskii, B. N., "Measures of noncompactness and condensing operators", Birkhauser Verlag, (1992).

[8] Khandani, H., "An extension of Sadovskii's fixed-point theorem with applications to integral equations", (2018) (DOI: http://sci-hub.tw/10.1007/s11784-017-0481-6).

[9] Vetro, C., Vetro, F., "On the existence of at least a solution for functional integral equations via measure of noncompactness", Banach J. Math. Anal, 11(3) (2017), 497-512.

[10] Gavruta, L., Gavruta, P., Khojasteh, F., "Two classes of Meir-Keeler contractions", arXiv preprint arXiv: 1405.5034, (2014).

[11] Samadi, A., Ghaemi, M. B., "An extension of Darbo fixed point theorem and its applications to coupled fixed point and integral equations", Filomat, 28(4) (2014), 879-886.

[12] Aghajani, A., Some generalizations of Darbo fixed point theorem and applications, Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin, 20(2013), no. 2.

[13] Cai, L., Liang, J., "New generalizations of Darbo's fixed point theorem", Fixed Point Theory and Appl., 2015(1)(2015), 156p.

[14] Suzuki, T., "Meir-Keeler contractions of integral type are still Meir-Keeler contractions", Int. J. Math. Math. Sci, 2007(2007), Article ID 39281, 6 pages(Doi: http://dx.doi.org/ 10.1155/ 2007/39281)

[15] Jachymski, J., O'zwik, I., "Nonlinear contractive conditions: a comparison and related problems", Banach Center Publ., 77(2007), 123-146.

[16] Branciari, A., "Fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type", Int. J. Math. Math. Sci, 29(9)(2000), 531-536.

[17] Banaś, J., "On measures of noncompactness in Banach spaces", Comment. Math. Univ. Carolin, 21(1980), 131-143.