دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیست و دوم، بهمن و اسفند ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

مشبکه‌ی کج مانده بهمراه یک عملگر

رقیه کوهنورد[۱]، ارشام برومند سعید[۲*]

[۱و۲] گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۱۲/۰۵.   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۸/۰۵

چکیده

در این مقاله، عمل حصار را روی یک مشبکه کج مانده تعریف می‌کنیم و به بررسی برخی از خواص آن می‌پردازیم. همچنین رابطه بین حصار و برخی مجموعه‌های خاص از جمله مجموعه عناصر چگال، پوچ توان، خودتوان و منظم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با مثال‌هایی نشان می‌دهیم که حصار عناصر چگال، چگال نیست و حصار عناصر منظم، منظم نیست. همچنین حصار عناصر پوچ‌توان، پوچ‌توان است و حصار عناصر خودتوان، خودتوان نیست اما تحت شرایطی خودتوان می‌شود. ترکیب دو حصار لزوماً حصار نیست و تحت شرطی تبدیل به یک حصار می‌شود. با مثال‌هایی نشان می‌دهیم که بین حصار حاصلضرب دو عنصر و حاصلضرب حصارهای آن دو عنصر هیچ رابطه‌ای وجود ندارد. مجموعه $H(x)$ معرفی می‌شود و خواصی از آن اثبات می‌شود و نشان داده می‌شود که حصار مجموعه H با خود مجموعه H برابر است و همچنین ارتباط آن با عناصر چگال، خودتوان، پوچ‌توان و منظم و همچنین عمل‌های مشبکه کج مانده بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مشبکه کج مانده، حصار، فیلتر، عنصر چگال، عنصر منظم.

*.عهده‌دار مکاتبات: Email: arsham@uk.ac.ir

۱- مقدمه

مفهوم مشبکه‌های کج، برای اولین بار توسط جردن[۱] مطرح شد [۱]. سپس لییچ[۲]، سوتکو-وه[۳] و پیتا کاستا[۴] به‌ترتیب این مبحث را دنبال کردند [۲ و ۳]، [۴ و ۵] و [۶ و ۷]. مشبکه‌های کج تعمیمی از مشبکه‌ها هستند. بر روی مشبکه‌های کج دو رابطه ترتیب $\leq$ و $\preccurlyeq$ تعریف می‌شوند که یکی ضعیف‌تر از دیگری است. رابطه $\mathbb{D}$ ($x\ \mathbb{D}\ y$ اگر و تنها اگر $x \preccurlyeq y, y \preccurlyeq x$) یک رابطه همنهشتی در مشبکه کج و جبر خارج قسمتی آن یک مشبکه می‌باشد. مشبکه‌های کج مانده به‌عنوان تعمیمی غیر جابجایی از مشبکه‌های مانده توسط برومند سعید و کوهنورد تعریف شد [۸] و آن‌ها همچنین انواع فیلترها (کج) را در مشبکه‌های کج مانده تعریف کردند [۹ و ۱۰]. مفهوم حصار برای اولین بار توسط زاده[۵] مطرح شد و سپس هایدا[۶] حصارها را در جبرهای پایه مورد بررسی قرار داد [۱۱].

در این مقاله تصمیم داریم برای شناخت بیشتر ساختار مشبکه های کج مانده، عمل حصار را روی این ساختار تعریف کنیم و روابط بین برخی مجموعه‌های خاص و حصارهایشان را مورد بررسی قرار دهیم. نشان می‌دهیم که حصار عناصر خود توان لزوماً خود توان نیست ولی تحت شرطی خود توان می‌شود. همچنین با مثال‌هایی نشان می‌دهیم که حصار عناصر چگال، چگال نیست و حصار عناصر منظم، منظم نیست.

۲- پیش نیازها

تعریف ۱،۲: مشبکه مانده یک جبر $(A, \vee, \wedge, \rightarrow, \odot, 0, 1)$ از نوع (۰و ۰و ۲ و ۲و ۲و ۲) است که در شرایط زیر صدق می‌کند [۱۲]:

(۱) $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ یک مشبکه کراندار است،

(۲) $(A, \odot, 1)$ یک تکواره جابجایی است،

(۳) $z \leq (x \rightarrow y)$ اگر و تنها اگر $x \odot z \leq y$.

1. Jordan
2. Leech
3. Cvetko-Vah
4. Pita Costa
5. Zadeh
6. Chajda

تعریف ۲،۲: مشبکه کج یک جبر $(A, \vee, \wedge)$ از نوع (۲ و ۲) است که در شرایط زیر صدق کند [۵]:

(۱) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ و $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$،

(۲) $x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$ و $(x \wedge y) \vee y = y = (x \vee y) \wedge y$،

(۳) $x \wedge x = x$ ، $x \vee x = x$.

روی یک مشبکه کج A رابطه ترتیب جزیی $\leq$ به‌صورت $x \leq y$ اگر و تنها اگر $x \wedge y = x = y \wedge x$ یا $x \vee y = y = y \vee x$ و رابطه پیش ترتیب $\preccurlyeq$ به‌صورت $x \preccurlyeq y$ اگر و تنها اگر $y \vee x \vee y = y$ یا $x \wedge y \wedge x = x$ تعریف می‌شود. رابطه $\mathbb{D}$ به صورت $x\ \mathbb{D}\ y$ اگر و تنها اگر $x \vee y \vee x = x$ و $y \vee x \vee y = y$ یا $x \wedge y \wedge x = x$ و $y \wedge x \wedge y = y$ تعریف می‌شود و آن را رابطه گرین می‌نامیم. همچنین داریم[۳و۴]:

$x \vee y = y \wedge x$ اگر و تنها اگر $x\ \mathbb{D}\ y$.

تعریف ۳،۲: مشبکه کج مانده یک جبر $(A, \vee, \wedge, \rightarrow, \odot, 1)$ از نوع (۰ و ۲ و ۲و ۲و ۲) است که در شرایط زیر صدق می‌کند [۸]:

(۱) $(A, \vee, \wedge, 1)$ یک مشبکه کج با عنصر بالایی ۱ است،

(۲) $(A, \odot, 1)$ یک تکواره جابجایی است،

(۳) $z \preccurlyeq (x \rightarrow y)$ اگر و تنها اگر $x \odot z \preccurlyeq y$.

ارتباط بین $\rightarrow$ و $\odot$ که در (۳) بیان شده است قانون مانده است، برای هر x, y متعلق به A داریم:

$x \rightarrow y = sup\{z \in A |\ x \odot z \preccurlyeq y\}$

که sup ممکن است منحصربفرد نباشد، یعنی $x \rightarrow y$ ممکن است یک $\mathbb{D}$-کلاس شود. رابطه $\preccurlyeq$ بین دو $\mathbb{D}$-کلاس، بین تمامی اعضای آن‌ها می‌باشد.

۳- حصارها در مشبکه‌های کج مانده

تعریف ۱،۳: یک حصار روی یک مشبکه کج مانده یک عمل یکتایی $x \mapsto x^{\circ}$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(۱) $1^{\circ} = 1$،

(۲) $x^{\circ} \preccurlyeq x$،

(۳) $(x \to y)^{\circ} \preccurlyeq x^{\circ} \to y^{\circ}$،

(۴) $x^{\circ\circ} \mathbb{D}\ x^{\circ}$.

مثال ۱،۳: فرض می‌کنیم

$A = \{0, a, b, n, c, d, m, 1\}$,
$A = (A, \vee, \wedge, \odot, 0, 1)$

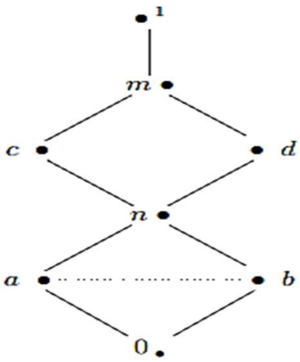
یک مشبکه کج مانده همراه با اعمال زیر باشد $(\mathbb{D}_a = \{a, b\}, \mathrm{a}\ \mathbb{D}\ \mathrm{b})$. عمل $''\circ''$ در A را به‌صورت $a^{\circ} = b^{\circ} = 0$ و برای بقیه x های متعلق به A، $x^{\circ} = x$ تعریف می‌کنیم.

∨	0	a	b	n	c	d	m	1
0	0	a	b	n	c	d	m	1
a	a	a	b	n	c	d	m	1
b	b	a	b	n	c	d	m	1
n	n	n	n	n	c	d	m	1
c	c	c	c	c	c	m	m	1
d	d	d	d	d	m	d	m	1
m	m	m	m	m	m	m	m	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

→	0	a	b	n	c	d	m	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
a	$\mathbb{D}_a$	1	1	1	1	1	1	1
b	$\mathbb{D}_a$	1	1	1	1	1	1	1
n	0	$\mathbb{D}_a$	$\mathbb{D}_a$	1	1	1	1	1
c	0	$\mathbb{D}_a$	$\mathbb{D}_a$	d	1	d	1	1
d	0	$\mathbb{D}_a$	$\mathbb{D}_a$	c	c	1	1	1
m	0	$\mathbb{D}_a$	$\mathbb{D}_a$	n	c	d	1	1
1	0	$\mathbb{D}_a$	$\mathbb{D}_a$	n	c	d	m	1

∧	0	a	b	n	c	d	m	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	a	a	a	a	a	a	a
0	0	b	b	b	b	b	b	b
0	0	a	b	n	n	n	n	n
0	0	a	b	n	c	n	c	c
0	0	a	b	n	n	d	d	d
0	0	a	b	n	c	d	m	m
0	0	a	b	n	c	d	m	1

⊙	0	a	b	n	c	d	m	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	a	a	a	a	a
b	0	0	0	b	b	b	b	b
n	0	a	b	n	n	n	n	n
c	0	a	b	n	c	n	c	c
d	0	a	b	n	n	d	d	d
m	0	a	b	n	c	d	m	m
1	0	a	b	n	c	d	m	1



تذکر ۱،۳: اگر $C = \{x \in A | x^{*2} \mathbb{D}\, 0\}$ و $B = \{x \in A | x^{\circ} \mathbb{D}\, x^*\}$ تعریف کنیم، آن‌گاه به راحتی ثابت می‌شود که $B \subseteq C$ ولی عکس آن برقرار نیست زیرا در مثال بالا

C={a, b, n, c, d, m, 1} $\not\subset$ B= $\emptyset$

مثال ۲،۳: فرض می‌کنیم

$A = \{0, \mathrm{m}, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{p}, \mathrm{n}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, 1\}$,
$A = (A, \vee, \wedge, \rightarrow, \odot, 0, 1)$

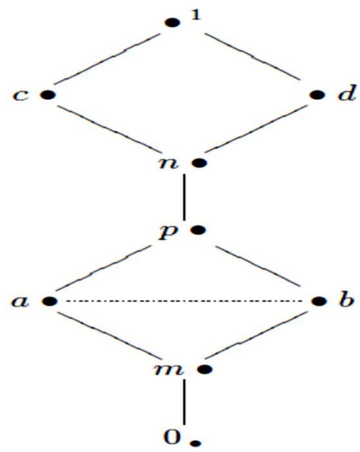
یک مشبکه کج مانده همراه با اعمال زیر باشد ($\mathbb{D}_a = \{a, b\}$ a $\mathbb{D}$ b). عمل حصار را به صورت $a^{\circ} = b^{\circ} = m$ و $c^{\circ} = d^{\circ} = n$ و برای بقیه x های متعلق به A، $x^{\circ} = x$ تعریف می‌کنیم.

→	0	m	a	b	p	n	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
m	0	1	1	1	1	1	1	1	1
a	0	$\mathbb{D}_a$	1	1	1	1	1	1	1
b	0	$\mathbb{D}_a$	1	1	1	1	1	1	1
p	0	m	$\mathbb{D}_a$	$\mathbb{D}_a$	1	1	1	1	1
n	0	m	$\mathbb{D}_a$	$\mathbb{D}_a$	p	1	1	1	1
c	0	m	$\mathbb{D}_a$	$\mathbb{D}_a$	p	d	1	d	1
d	0	m	$\mathbb{D}_a$	$\mathbb{D}_a$	p	c	c	1	1
1	0	m	$\mathbb{D}_a$	$\mathbb{D}_a$	p	n	c	d	1

⋁	0	m	a	b	p	n	c	d	1
0	0	m	a	b	p	n	c	d	1
m	m	m	a	b	p	n	c	d	1
a	a	a	a	b	p	n	c	d	1
b	b	b	a	b	p	n	c	d	1
p	p	p	p	p	p	n	c	d	1
n	n	n	n	n	n	n	c	d	1
c	c	c	c	c	c	c	c	1	1
d	d	d	d	d	d	d	1	d	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$\odot$	0	m	a	b	p	n	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
m	0	m	m	m	m	m	m	m	m
a	0	m	m	m	a	a	a	a	a
b	0	m	m	m	b	b	b	b	b
p	0	m	a	b	p	p	p	p	p
n	0	m	a	b	p	n	n	n	n
c	0	m	a	b	p	n	c	n	c
d	0	m	a	b	p	n	n	d	d
1	0	m	a	b	p	n	c	d	1

$\wedge$	0	m	a	b	p	n	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
m	0	m	m	m	m	m	m	m	m
a	0	m	a	a	a	a	a	a	a
b	0	m	b	b	b	b	b	b	b
p	0	m	a	b	p	p	p	p	p
n	0	m	a	b	p	n	n	n	n
c	0	m	a	b	p	n	c	n	c
d	0	m	a	b	p	n	n	d	d
1	0	m	a	b	p	n	c	d	1



گزاره ۳،۱: اگر $''\circ''$ یک حصار در مشبکه کج مانده A باشد، آن‌گاه روابط زیر برقرارند:

(۱) $0^\circ = 0$،

(۲) $x^{*\circ} \leqslant x^{\circ *}$ ،

(۳) $(x \to y)^\circ \leqslant (z^\circ \to x^\circ) \to (z^\circ \to y^\circ)$،

(۴) $x^\circ \odot (x \to y)^\circ \leqslant y^\circ$،

(۵) $(x \to y)^\circ \leqslant x^\circ \odot z \to y^\circ \odot z$،

(۶) $(x \to y)^\circ \leqslant x \odot z \to y \odot z$،

(۷) $(x \to y)^\circ \leqslant y^{*\circ} \to x^{\circ *}$،

(۸) $x^{\circ\circ} \odot y^{\circ\circ} \leqslant x \odot y$ ،

(۹) $(y_1 \vee y_2)^{*\circ} \leqslant y_1^{\circ *} \wedge y_2^{\circ *}$،

(۱۰) $(y_1 \wedge y_2)^{*\circ} \geqslant y_1^{*\circ} \vee y_2^{*\circ}$،

(۱۱) $(x \to y_1)^\circ \vee (x \to y_2)^\circ \leqslant x^\circ \to y_1^\circ \vee y_2^\circ$،

(۱۲) $x^\circ \odot x^{*\circ} = 0$،

(۱۳) $x^{\circ **} \odot y^{**\circ} \leqslant (x \odot y)^{*\circ *}$،

(۱۴) $(x \odot y)^{*\circ} \leqslant (x^\circ \odot y^\circ)^*$،

(۱۵) $(x \odot y)^\circ \leqslant x^\circ \to y^\circ$،

(۱۶) $(y_1 \wedge y_2)^\circ \leqslant y_1^\circ \wedge y_2^\circ$،
$y_1^\circ \vee y_2^\circ \leqslant (y_1 \vee y_2)^\circ$ ،

(۱۷) $x \leqslant y$ نتیجه می‌دهد $x^\circ \leqslant y^\circ$، (۱۸) $(x \odot y)^{*\circ} \preccurlyeq x^\circ \to y^{\circ *}$،

(۱۹) $x^\circ \preccurlyeq x^{*\circ *}$، $x^{**\circ} \preccurlyeq x^{*\circ} \to x^\circ$،

(۲۰) $x^\circ \odot y^\circ \preccurlyeq x^\circ \wedge y^\circ$،

$(x \odot y)^\circ \preccurlyeq x^\circ \wedge y^\circ$،

(۲۱) $(x \to y)^\circ \preccurlyeq y^{\circ *} \to x^{\circ *}$،

$(x \to y)^\circ \preccurlyeq y^* \to x^*$ ،

(۲۲) $(x \to (y \to z))^\circ \preccurlyeq (x^\circ \odot y^\circ \to z^\circ)$،

$(x \to (y \to z))^\circ \preccurlyeq (y^\circ \to (x^\circ \to z^\circ)$،

(۲۳) $(x \to (y_1 \wedge y_2))^\circ \preccurlyeq x^\circ \to y_1^\circ \wedge y_2^\circ$ ،

$x^\circ \to (y_1 \wedge y_2)^\circ \preccurlyeq (x^\circ \to y_1^\circ) \wedge (x^\circ \to y_2^\circ)$،

(۲۴) $(y_1 \to x)^\circ \vee (y_2 \to x)^\circ \preccurlyeq y_1^\circ \wedge y_2^\circ \to x^\circ$،

$((y_1 \vee y_2) \to x)^\circ \preccurlyeq (y_1^\circ \to x^\circ) \wedge (y_2^\circ \to x^\circ)$،

(۲۵) $x^\circ \odot (y_1 \wedge y_2)^\circ \preccurlyeq (x^\circ \odot y_1^\circ) \wedge (x^\circ \odot y_2^\circ)$،

$(x \odot (y_1 \wedge y_2))^\circ \preccurlyeq (x \odot y_1)^\circ \wedge (x \odot y_2)^\circ$

(۲۶) $(x^\circ \odot y_1^\circ) \vee (x^\circ \odot y_2^\circ) \preccurlyeq x^\circ \odot (y_1 \vee y_2)^\circ$،

$(x \odot y_1)^\circ \vee (x \odot y_2)^\circ \preccurlyeq (x \odot (y_1 \vee y_2))^\circ$،

(۲۷) $x \preccurlyeq y$ نتیجه می‌دهد

$(z \to x)^\circ \preccurlyeq z^\circ \to y^\circ$، $(y \to z)^\circ \preccurlyeq x^\circ \to z^\circ$

اثبات:

(۱) با توجه به این‌که $0 \preccurlyeq 0^\circ$ و صفر کوچکترین عنصر از A است بدست می آوریم $0^\circ = 0$.

(۲) داریم $x^{*\circ} = (x \to 0)^\circ \preccurlyeq x^\circ \to 0 = x^{\circ *}$.

(۳) با توجه به تعریف حصار و لم ۱،۳ [۸] اثبات می‌شود.

(۴) $x^\circ \odot (x \to y)^\circ \preccurlyeq x^\circ \odot (x^\circ \to y^\circ) \preccurlyeq y^\circ$.

(۵) داریم $(x \to y)^\circ \preccurlyeq x^\circ \to y^\circ \preccurlyeq x^\circ \odot z \to y^\circ \odot z$

(۶) $(x \to y)^\circ \preccurlyeq x \to y \preccurlyeq x \odot z \to y \odot z$.

(۷) داریم $(x \to y)^\circ \preccurlyeq x^\circ \to y^\circ \preccurlyeq y^{\circ *} \to x^{\circ *} \preccurlyeq y^{*\circ} \to x^{\circ *}$

(۸) $x \odot y \preccurlyeq x^\circ \odot y^\circ \mathbb{D}\, x^{\circ\circ} \odot y^{\circ\circ}$.

(۹) داریم $(y_1 \vee y_2)^{*\circ} \preccurlyeq (y_1 \vee y_2)^{\circ *} \preccurlyeq (y_1^\circ \vee y_2^\circ)^* \mathbb{D}\, y_1^{\circ *} \wedge y_2^{\circ *}$.

(۱۰) داریم $y_1^{*\circ} \vee y_2^{*\circ} \preccurlyeq (y_1^* \vee y_2^*)^\circ \preccurlyeq (y_1 \wedge y_2)^{*\circ}$

$(x \to y_1)^\circ \vee (x \to y_2)^\circ \preccurlyeq (x^\circ \to y_1^\circ) \vee (x^\circ \to y_2^\circ) \preccurlyeq x^\circ \to y_1^\circ \vee y_2^\circ$.

(۱۱) $x^\circ \odot x^{\circ *} = 0 \preccurlyeq x^\circ \odot x^{*\circ}$.

(۱۲) داریم $(x \odot y)^{*\circ} \mathbb{D}\, (x \to y^*)^\circ \preccurlyeq x^\circ \to y^{*\circ}$
بنابراین $(x \odot y)^{*\circ} \odot x^\circ \preccurlyeq y^{*\circ}$ که این نتیجه می‌دهد

$y^{*\circ *} \preccurlyeq ((x \odot y)^{*\circ} \odot x^\circ)^* \mathbb{D}\, (x \odot y)^{*\circ} \to x^{\circ *}$

حال می‌توان نتیجه گرفت

$(x \odot y)^{*\circ} \odot y^{*\circ *} \preccurlyeq x^{\circ *}$.

بنابراین

$x^{\circ **} \preccurlyeq (y^{*\circ *} \odot (x \odot y)^{*\circ})^*$
$\mathbb{D}\, y^{*\circ *} \to (x \odot y)^{*\circ *}$

رابطه اخیر نتیجه می‌دهد

$x^{\circ **} \odot y^{**\circ} \preccurlyeq x^{\circ **} \odot y^{*\circ *} \preccurlyeq (x \odot y)^{*\circ *}$.

(۱۳) داریم

$(x \odot y)^{*\circ} = (x \odot y \to 0)^\circ \mathbb{D}$
$(x \to (y \to 0))^\circ \preccurlyeq x^\circ \to (y^\circ \to 0)$
$\mathbb{D}\, (x^\circ \odot y^\circ)^*$

(۱۴) با توجه به این‌که $x \odot y \preccurlyeq y$ می‌توان نتیجه گرفت $(x \odot y)^\circ \preccurlyeq y^\circ \preccurlyeq x^\circ \to y^\circ$.

(۱۵) با توجه به $x^\circ, y^\circ \preccurlyeq (x \vee y)^\circ$ و $(x \wedge y)^\circ \preccurlyeq x^\circ, y^\circ$ واضح است.

(۱۶) با توجه به فرض داریم $x \to y = 1$. بنابراین

$1 = 1^\circ = (x \to y)^\circ \preccurlyeq x^\circ \to y^\circ$

یعنی $x^\circ \preccurlyeq y^\circ$.

(۱۷) داریم $(x \odot y)^* \mathbb{D}\, x \to y^*$ بنابراین

$(x \odot y)^{*\circ} \preccurlyeq (x \to y^*)^\circ \preccurlyeq x^\circ \to y^{*\circ} \preccurlyeq$
$x^\circ \to y^{\circ *} \mathbb{D}\, (x^\circ \odot y^\circ)^*$

(۱۸) با توجه به $x \preccurlyeq x^{**}$ نتیجه می‌گیریم

$x^\circ \preccurlyeq x^{**\circ} \preccurlyeq x^{*\circ *}$.

و با توجه به $x^{**} \preccurlyeq x^* \to x$ نتیجه می‌گیریم

$x^{**\circ} \preccurlyeq x^{*\circ} \to x^\circ$

(۱۹) واضح است.

(۲۰) داریم $(x \to y)^\circ \preccurlyeq x \to y \preccurlyeq y^* \to x^*$ و $(x \to y)^\circ \preccurlyeq x^\circ \to y^\circ \preccurlyeq y^{\circ *} \to x^{\circ *}$.

(۲۱) بنابه لم ۱،۳ [۸] واضح است.

(۲۲) $(x \to (y_1 \wedge y_2))^\circ \preccurlyeq x^\circ \to (y_1 \wedge y_2)^\circ$
$\preccurlyeq x^\circ \to y_1^\circ \wedge y_2^\circ$

بنابه قضیه ۴،۳ [۸] و (۱۶) داریم

$x^\circ \to (y_1 \wedge y_2)^\circ \preccurlyeq (x^\circ \to y_1^\circ) \wedge (x^\circ \to y_2^\circ)$

بنابه قضیه ۴،۳ [۸] داریم

$(y_1 \to x)^\circ \vee (y_2 \to x)^\circ \preccurlyeq$
$(y_1^\circ \to x^\circ) \vee (y_2^\circ \to x^\circ) \preccurlyeq y_1^\circ \wedge y_2^\circ \to x^\circ$

و

$((y_1 \vee y_2) \to x)^\circ \preccurlyeq (y_1 \vee y_2)^\circ \to x^\circ \preccurlyeq$
$y_1^\circ \vee y_2^\circ \to x^\circ \ \mathbb{D}\ (y_1^\circ \to x^\circ) \wedge (y_2^\circ \to x^\circ).$

(۲۵) بنابه (۱۶) و قضیه ۴،۳ [۸] ثابت می‌شود.

(۲۶) بنابه (۱۶) و قضیه ۴،۳ [۸] ثابت می‌شود.

(۲۷) بنابه لم ۱،۳ [۸] ثابت می‌شود.

رابطه گرین در قسمت‌های (۲) و (۱۴) و (۱۶) (گزاره بالا) برقرار نیستند زیرا در مثال ۱،۳ داریم:

$a^{\circ *} = \circ^* = 1 \not\preccurlyeq a^{*\circ} = b^\circ = 0$

همچنین در مثال ۲،۳ داریم

$1 = 1^\circ = (c \vee d)^\circ \not\preccurlyeq c^\circ \vee d^\circ = n \vee n = n.$

اگر در مثال ۲،۳، $p^\circ = n^\circ = a$ و برای بقیه x های متعلق به A، $x^\circ = x$ تعریف کنیم، آن‌گاه

$n = c \wedge d = c^\circ \wedge d^\circ \not\preccurlyeq (c \wedge d)^\circ = n^\circ = a.$

از طرفی در مثال ۱،۳ داریم

$(a^\circ \odot n^\circ)^* = \circ^* = 1 \not\preccurlyeq (a \odot n)^{*\circ} = a^{*\circ} = b^\circ = 0.$

تعریف ۲،۳:

(۱) $x \in A$ یک عنصر پوچ توان نامیده می‌شود، اگر برای هر $n \geq 1$ ،$x^n \ \mathbb{D}\ 0$.

(۲) $x \in A$ یک عنصر خود توان نامیده می‌شود، اگر $x^2 \ \mathbb{D}\ x$.

(۳) $Rg(A) = \{x \in A | (x \to y) \to x \ \mathbb{D}\ x, \forall y \in A\}$ مجموعه عناصر منظم از A نامیده می‌شود،

(۴) $D(A) = \{x \in A | x \to r \ \mathbb{D}\ r, \forall r \in Rg(A)\}$ مجموعه عناصر چگال از A نامیده می‌شود.

مثال ۳،۳: فرض می‌کنیم

$A = \{0, e, a, b, n, c, d, m, 1\}$
$A = (A, \vee, \wedge, \to, \odot, 0, 1)$,

یک مشبکه کج مانده همراه با اعمال زیر باشد

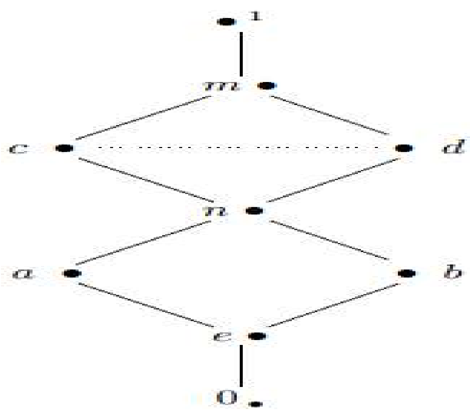
$(\mathbb{D}_c = \{c, d\}$ c $\mathbb{D}$ d$)$:

$\to$	0	e	a	b	n	c	d	m	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
e	n	1	1	1	1	1	1	1	1
a	b	b	1	b	1	1	1	1	1
b	a	a	a	1	1	1	1	1	1
n	e	e	a	b	1	1	1	1	1
c	0	e	a	b	$\mathbb{D}_c$	1	1	1	1
d	0	e	a	b	$\mathbb{D}_c$	1	1	1	1
m	0	e	a	b	n	$\mathbb{D}_c$	$\mathbb{D}_c$	1	1
1	0	e	a	b	n	$\mathbb{D}_c$	$\mathbb{D}_c$	m	1

$\odot$	0	e	a	b	n	c	d	m	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	0	0	0	e	e	e	e
a	0	0	a	0	a	a	a	a	a
b	0	0	0	b	b	b	b	b	b
n	0	0	a	b	n	n	n	n	n
c	0	e	a	b	n	n	n	n	c
d	0	e	a	b	n	n	n	d	d
m	0	e	a	b	n	c	d	m	m
1	0	e	a	b	n	c	d	m	1

∧	0	e	a	b	n	c	d	m	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	e	e	e	e	e	e	e	e
a	0	e	a	0	a	a	a	a	a
b	0	e	0	b	b	b	b	b	b
n	0	e	a	b	n	n	n	n	n
c	0	e	a	b	n	c	c	c	c
d	0	e	a	b	n	d	d	d	d
m	0	e	a	b	n	c	d	m	m
1	0	e	a	b	n	c	d	m	1

∨	0	e	a	b	n	c	d	m	1
0	0	e	a	b	n	c	d	m	1
e	e	e	a	b	n	c	d	m	1
a	a	a	a	n	n	c	d	m	1
b	b	b	n	b	n	c	d	m	1
n	n	n	n	n	n	c	d	m	1
c	c	c	c	c	c	c	d	m	1
d	d	d	d	d	d	c	d	m	1
m	m	m	m	m	m	m	m	m	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1



عمل $''\circ''$ در A به‌صورت $c^\circ = d^\circ = n\, , a^\circ = b^\circ = e$ و برای بقیه xهای متعلق به A، $x^\circ = x$ تعریف می‌کنیم. در این‌صورت داریم

$Rg(A) = \{0, e, a, b, 1\},$
$D(A) = \{n, c, d, m, 1\}$

در مثال ۱،۳، $\{0, a, b\}$ عناصر پوچ توان، $\{0, n, c, d, m, 1\}$ عناصر خودتوان هستند.

قضیه ۱،۳:

(۱) اگر x یک عنصر پوچ توان باشد، آن‌گاه x° نیز یک عنصر پوچ توان است،

(۲) اگر x یک عنصر خودتوان و $(x \odot y)^\circ \mathbb{D}\, x^\circ \odot y^\circ$ باشد، آن‌گاه x° نیز یک عنصر خودتوان است.

اثبات:

(۱) داریم $x^\circ \preccurlyeq x$ بنابراین $x^{\circ\, n} \preccurlyeq x^n = 0$

(۲) با توجه به فرض داریم

$\mathbb{D}\ \ (x \odot x)^\circ\ \mathbb{D}\ x^\circ \odot x^\circ\ x^\circ$

تعریف ۳،۳: F زیرمجموعه A را یک فیلتر از A می‌نامیم اگر $x \in F$ و $x \preccurlyeq y$، آن‌گاه $y \in F$ و اگر $x, y \in F$، آن‌گاه $x \odot y \in F$ [۹].

تذکر ۲،۳: اگر F یک فیلتر از A باشد و $F_1^\circ = \{x \in A | x^\circ \in F\}$ و $F_2^\circ = \{x^\circ | x \in F\}$، آن‌گاه $F_1^\circ \subseteq F$ و F_1°, F_2° فیلتر نیستند. زیرا اگر در مثال ۲،۳، $p^\circ = n^\circ = a$ و برای بقیه xهای متعلق به A، $x^\circ = x$ تعریف کنیم، آن‌گاه $F = \{p, n, c, d, 1\}$ یک فیلتر هست اما $F_1^\circ = \{c, d, 1\}$ و $F_2^\circ = \{a, c, d, 1\}$ فیلتر نیستند.

قضیه ۲،۳:
(۱) اگر F یک فیلتر از A باشد و $F_1^\circ = \{x \in A | x^\circ \in F\}$ و $x^\circ \odot y^\circ \preccurlyeq (x \odot y)^\circ$ برای هر $x, y \in A$، آن‌گاه F_1° یک فیلتر از A است،
(۲) اگر F یک فیلتر از A باشد و $(x \odot y)^\circ \preccurlyeq x^\circ \odot y^\circ$ و $F_2^\circ = \{x^\circ | x \in F\}$ و $x^\circ \preccurlyeq y^\circ$ نتیجه دهد $x \preccurlyeq y$، آن‌گاه F_2° یک فیلتر از A است.

اثبات:
(۱) اگر $x \in F_1^\circ$ و $x \preccurlyeq y$ طبق لم ۱،۳ داریم آن‌گاه $x^\circ \preccurlyeq y^\circ$، بنابراین $x^\circ \in F$ نتیجه می‌دهد $y \in F_1^\circ$.
از طرفی اگر $x, y \in F_1^\circ$ آن‌گاه $x^\circ \odot y^\circ \in F$ این نتیجه می‌دهد $(x \odot y)^\circ \in F$ یعنی $x \odot y \in F_1^\circ$.
(۲) واضح است.
$I_d(A) = \{x \in A | x^\circ = x\}$ یک فیلتر از A نیست. زیرا در مثال ۱،۳، $I_d(A) = \{0, n, c, d, m, 1\}$ یک فیلتر نیست. $I_d(A)$ یک زیرجبر از A نیست زیرا اگر در مثال ۲،۳، تعریف کنیم $p^\circ = n^\circ = a$ و برای بقیه xهای متعلق به A، $x^\circ = x$، آن‌گاه داریم

$$I_d(A) = A\backslash\{p, n\}(c \wedge d)^\circ = n^\circ = a \neq c \wedge d = n$$

یعنی $c, d \in I_d(A)$ اما $c \wedge d \notin I_d(A)$.

تذکر ۳،۳:
(۱) $D(A)$ یک فیلتر از A است.

اثبات: اگر $x, y \in D(A)$ آن‌گاه

$$x \odot y \to r \,\mathbb{D}\, x \to (y \to r) \mathbb{D}\, x \quad \to r \,\mathbb{D}\, r$$

بنابراین $x \odot y \in D(A)$. حال اگر $x \preccurlyeq y$ و $x \in D(A)$ آن‌گاه داریم $r \preccurlyeq y \to r \preccurlyeq x \to$ $r \,\mathbb{D}\, r$ بنابراین $y \in D(A)$.
(۲) حصار عناصر چگال، چگال نیست و حصار عناصر منظم، منظم نیست.
زیرا در مثال ۳،۳، اگر عمل حصار را به‌صورت $c^\circ = d^\circ = n^\circ = a^\circ = b^\circ = e$، و برای بقیه $x \in A$، $x^\circ = x$ تعریف‌کنیم، آن‌گاه

$$D^\circ(A) = \{e, m, 1\}, D(A) = \{n, c, d, m, 1\}$$
$$Rg(A) = \{0, e, a, b, 1\}$$

و داریم $1 = e \to a \not\preccurlyeq a$ بنابراین $D^\circ(A)$ چگال نیست.

مثال ۴،۳: فرض می‌کنیم $A = \{0, a, b, c, d, 1\}$، $A = (A, \vee, \wedge, \to, \odot, 0, 1)$ یک مشبکه مانده (و در نتیجه یک مشبکه کج مانده) همراه با اعمال زیر باشد:

$\to$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	0	1	b	c	c	1
b	c	1	1	c	c	1
c	b	1	b	1	a	1
d	b	1	b	1	1	1
1	0	a	b	c	d	1

$\odot$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	b	d	d	a
b	0	b	b	0	0	b
c	0	d	0	d	d	c
d	0	d	0	d	d	d
1	0	a	b	c	d	1

اگر عمل حصار را به‌صورت $c^{\circ} = d$ و برای بقیه $x \in A$، $x^{\circ} = x$ تعریف کنیم در این‌صورت داریم $Rg(A) = \{0, c, b, 1\}$ و $Rg^{\circ}(A) = \{0, b, d, 1\}$ که منظم نیست، زیرا d یک عنصر منظم نیست.

(۳) اگر F یک فیلتر باشد، آن‌گاه D(F) یک فیلتر است. اما Rg (F) یک فیلتر نیست.

زیرا $F = \{b, n, c, d, m, 1\}$ یک فیلتر در مثال ۳،۳ است اما $Rg(F) = \{b, 1\}$ یک فیلتر نیست.

(۴) اگر $Rg(A) = \{0, 1\}$ و برای هر $x \neq 0$، $x^* = 0$، آن‌گاه $D(A) = A \backslash \{0\}$.

(۵) حصار عناصر چگال، منظم، خودتوان و پوچ‌توان فیلتر نیستند. زیرا در مثال۳،۳، اگر عمل حصار را به‌صورت $c^{\circ} = d^{\circ} = n^{\circ} = a^{\circ} = b^{\circ} = e$، و برای بقیه $x \in A$، $x^{\circ} = x$ تعریف‌کنیم، آن‌گاه

$D^{\circ}(A) = \{e, m, 1\}, D(A) = \{n, c, d, m, 1\}$
$Rg(A) = \{0, e, a, b, 1\}$,
$Rg^{\circ}(A) = \{0, e, 1\}$

و در مثال ۱،۳، $\{0\}$ حصار عناصر پوچ توان، $\{0, n, c, d, m, 1\}$ حصارعناصر خودتوان هستند. مجموعه حصارهای عناصر فوق در صورتی می‌توانند فیلتر باشند که برابر مجموعه A باشند.

(۶) ترکیب دو حصار لزوماً یک حصار نیست.

زیرا در مثال ۱،۳، اگر عمل "$\circ_1$ " را به‌صورت $a^{\circ_1} = b^{\circ_1} = 0$، $c^{\circ_1} = d^{\circ_1} = n$ و برای بقیه $x \in A$، $x^{\circ_1} = x$ و عمل"$\circ_2$ " را به‌صورت $a^{\circ_2} = b^{\circ_2} = 0, m^{\circ_2} = c, d^{\circ_2} = n$ و برای بقیه $x \in A$، $x^{\circ_2} = x$ تعریف کنیم، آن‌گاه

$m^{(\circ_1\circ_2)\circ_1\circ_2} = m^{\circ_2\circ_1\circ_2} = c^{\circ_1\circ_2} = n^{\circ_2} = n \not\geqslant m^{\circ_1\circ_2} = m^{\circ_2} = c$

یعنی" $\circ_1\circ_2$" یک حصار نیست.

قضیه ۳،۳: اگر " $\circ_1$ "و " $\circ_2$ " دو عمل حصار در A باشند و $x^{\circ_2\circ_1} \mathbb{D}\, x^{\circ_1\circ_2}$، آن‌گاه: $''\circ_1\circ_2''$ یک حصار در A است.

اثبات: داریم $x \leqslant x^{\circ_2} \leqslant x^{\circ_1\circ_2}$. از طرفی اگر $x \leqslant y$، آن‌گاه $x^{\circ_1} \leqslant y^{\circ_1}$ بنابراین $x^{\circ_1\circ_2} \leqslant y^{\circ_1\circ_2}$ همچنین داریم

$(x^{\circ_1\circ_2})^{\circ_1\circ_2} \,\mathbb{D}\, (x^{\circ_1\circ_1})^{\circ_2\circ_2} \,\mathbb{D}\, x^{\circ_1\circ_2}.$

و

$(x \to y)^{\circ_1\circ_2} \leqslant (x^{\circ_1} \to y^{\circ_1})^{\circ_2} \leqslant x^{\circ_1\circ_2} \to y^{\circ_1\circ_2}$

قضیه ۴،۳: اگر " $\circ$ '' یک حصار در A باشد و برای

$A^{\circ} = \{x^{\circ} | x \in A\}, x \in A$
$H(x) = \{z \in A^{\circ} | z \leqslant x\}$

تعریف کنیم، آن‌گاه $\mathbb{D}_{x^{\circ}} = sup\, H(x)$.

اثبات: برای هر $y \in A^{\circ}$ داریم $y^{\circ} \,\mathbb{D}\, y$. طبق فرض داریم $x \in A, H(x) \subseteq A^{\circ}$. زیرا $H(x) \neq \emptyset$ $x^{\circ} \in H(x)$. اگر فرض کنیم $b \in H(x)$، آن‌گاه $b \,\mathbb{D}\, b^{\circ}, b \leqslant x$. بنابراین $b^{\circ} \leqslant x^{\circ} \in \mathbb{D}_{x^{\circ}}$. پس نتیجه می‌گیریم $\mathbb{D}_{x^{\circ}} = sup\, H(x)$.

حال می‌خواهیم رابطه بین H و بقیه اعمال مشبکه کج مانده و برخی عناصر خاص (چگال و پوچ توان و خود توان و منظم) را مورد بررسی قرار دهیم:

تذکر ۴،۳:

(۱) $A^{\circ} = H(1)$،

$sup\, H(x \to y) \leqslant sup\, H(x) \to sup\, H(y)$

(۲) اگر $x \leqslant y$، آن‌گاه $H(x) \subseteq H(y)$ و اگر $x \,\mathbb{D}\, y$، آن‌گاه $H(x) \,\mathbb{D}\, H(y)$.

(۳) $H(x^{\circ}) = \{z \in A^{\circ} | z \preccurlyeq x^{\circ}\} \subseteq H(x)$ و $sup\, H(x^{\circ}) = \mathbb{D}_{x^{\circ}}$.

(۴) $(H(x))^{\circ} = \{z \in A^{\circ} | z \preccurlyeq x\}^{\circ} = H(x)$. (با توجه به اینکه داریم $x^{\circ\circ} \mathbb{D} x^{\circ}$)، حال به کمک (۳) داریم $H(x^{\circ}) \subseteq (H(x))^{\circ}$.

(۵) اگر x یک عنصر پوچ توان باشد، آن‌گاه $H(x)$ نیز پوچ توان است.

(زیرا وجود دارد $n \in N$ به طوری‌که $x^n \mathbb{D} 0$ ازطرفی به ازای هر $z \in H(x)$ داریم $z^n \preccurlyeq x^n$).

(۶) اگر x یک عنصر خودتوان باشد، آن‌گاه $H(x)$ لزوماً خودتوان نیست.

(زیرا در مثال۳،۳، a یک عنصر خودتوان است اما $H(a) = \{0, e\}$ خودتوان نیست چون e خودتوان نیست).

(۷) اگر x یک عنصر چگال باشد، آن‌گاه $H(x)$ لزوماً چگال نیست.

(زیرا در مثال۳،۳، n یک عنصر چگال است اما $H(n) = \{0, e, n\}$ چگال نیست چون $0\,, e$ چگال نیستند).

(۸) اگر x یک عنصر منظم باشد، آن‌گاه $H(x)$ لزوماً منظم نیست.

(زیرا در مثال۳،۳، b یک عنصر منظم در A است و $1 = (e \to 0) \to e \not\preccurlyeq e$ اما $H(b) = \{0, e\}$ یعنی $H(b)$ منظم نیست).

(۹) $H(x \odot y) \neq H(x) \odot H(y)$، (زیرا در مثال۱،۳، اگر عمل حصار را به‌صورت $c^{\circ} = n^{\circ} = a$ و برای بقیه $x \in A$، $x^{\circ} = x$ تعریف کنیم در این‌صورت داریم

$$A^{\circ} = \{0, a, b, d, m, 1\}$$

و

$$H(a \odot n) = \{0, a, b\} \neq H(a) \odot H(n) = \{0, a, b\} \odot \{0, a, b\} = \{0\}$$

اگر همه عناصر متعلق به $H(x \odot y)$ خودتوان باشند، آن‌گاه داریم $H(x \odot y) \subseteq H(x) \odot H(y)$.

(زیرا اگر $z \in H(x \odot y)$ آن‌گاه $z \preccurlyeq x \odot y \preccurlyeq x, y$ و $z \in A^{\circ}$ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $z \in H(x), H(y)$ پس

$$z = z \odot z \in H(x) \odot H(y)$$

(۱۰) اگر $1 \in H(x)$، آن‌گاه $H(x) = A^{\circ}, x = 1$.

(۱۱) $\{x \in A | sup\, H(x) = x\} = \{x \in A | x^{\circ} = x\} = I_d(A)$

(۱۲) $H(x^*) \neq H^*(x)$، (زیرا در مثال ۲،۳، داریم $H(a^*) = H(0) = \{0\} \neq H^*(a) = \{0, m\}^* = \{0, 1\}$.)

(۱۳) داریم

$$H(x \odot y) \subseteq H(x \wedge y) \subseteq H(x), H(y) \subseteq H(x \vee y)$$

و

$$H(x \odot y) \subseteq H(x \to y).$$

(۱۴) بین حصار حاصل‌ضرب دو عنصر و حاصل‌ضرب حصارهای آن دو عنصر هیچ رابطه‌ای وجود ندارد، (زیرا در مثال ۲،۳، اگر عمل حصار را به‌صورت $c^{\circ} = n^{\circ} = p^{\circ} = a$ و برای بقیه $x \in A$، $x^{\circ} = x$ تعریف کنیم در این‌صورت داریم

$$(b \odot c)^{\circ} = b^{\circ} = b \not\preccurlyeq b^{\circ} \odot c^{\circ} = b \odot a = m$$

از طرفی اگر در مثال ۲،۳، عمل حصار را به‌صورت $m^{\circ} = 0$ و برای بقیه $x \in A$، $x^{\circ} = x$ تعریف کنیم در این‌صورت داریم

$$b^{\circ} \odot a^{\circ} = b \odot a = m \not\preccurlyeq (b \odot a)^{\circ} = m^{\circ} = 0.$$

قضیه ۵،۳: اگر A یک مشبکه کج مانده باشد و $B \subseteq A$ به طوریکه $1 \in B$ و برای هر $x \in A$، $H(x) = \{y \in B | y \preccurlyeq x\}$ دارای sup باشد و $sup\, H(x \to y) \preccurlyeq sup\, H(x) \to sup\, H(y)$ آن‌گاه نگاشت $x \mapsto sup\, H(x)$ یک حصار در A است.

اثبات: اگر $b \in B$، آن‌گاه

$$sup\, H(b) = sup\{y \in B | y \preccurlyeq b\} = \mathbb{D}_b.$$

تعریف می‌کنیم $\mathbb{D}_{x^{\circ}} = sup\, H(x)$ داریم $1 \in B$ بنابراین $1^{\circ} = 1$. واضح است که $supH(x) \preccurlyeq x$ یعنی $x^{\circ} \preccurlyeq x$. از طرفی داریم $supH(supH(x)) \,\mathbb{D}\, supH(x)$ یعنی $x^{\circ\circ} \mathbb{D} x^{\circ}$

و بنابه فرض داریم

$$(x \to y)^{\circ} \preccurlyeq x^{\circ} \to y^{\circ}.$$

۴- نتیجه

در این مقاله، عمل حصار را در مشبکه کج مانده تعریف کردیم و نشان دادیم که حصار یک عنصر پوچ توان، پوچ توان است اما حصار یک عنصر خودتوان، لزوماً خودتوان نیست. نشان دادیم ترکیب دو حصار، لزوماً یک حصار نمی‌شود. همچنین ارتباط بین H و برخی عناصر خاص و عمل‌های مشبکه کج مانده را مورد بررسی قرار دادیم.

فهرست منابع

[1] P. Jordan, "Under nichtkommutative verbande", Arch. Math, 2, 56-59, (1949).

[2] J. Leech, "Normal skew lattices", Semigroup Forum, 44 1-8, (1992).

[3] J. Leech, "Skew Boolean algebras", Algebra Univ, 27, 497-506, (1990).

[4] K. Cvetko-Vah, M. Kinyon, J. Leech, and M. Spinks, "Cancellation in skew lattices", Order, 28, 9-32, (2011).

[5] K. Cvetko-Vah, "On skew Heyting algebra", Ars Math, Contemp, 13, 37-50, (2017).

[6] J. Pita Costa, "On ideals of a skew lattice", General Algebra and Applications, 32, 5-21, (2012).

[7] J. Pita Costa, "On the coset structure of a skew lattice", Demonst Math, 44(4), 1-21, (2011).

[8] A. Borumand Saeid, R. Koohnavard, "On residuated skew lattices", Analele. Stiintific ale Universitatii “Ovidius” Constanta, 27(1), 245-268, (2019).

[9] R. Koohnavard, A. Borumand Saeid, "(Skew) filters in residuated skew lattices: Part 1, Scientific Annals of Computer Science, 28(1), 115-140, (2018).

[10] R. Koohnavard, A. Borumand Saeid, "(Skew) filters in residuated skew lattices: Part 2, Honam Mathematical Journal, 40(3), 401-431, (2018).

[11] I. Chajda, "Hedges and successors in basic algebras", Soft Comput, 15(3), 613-618, (2011).

[12] Piciu. D, "Algebras of fuzzy logic", Univ, (2007).

[13] R. Koohnavard, A. Borumand Saeid, On Skew algebraic structures, International Conference on Recent Achievements in Mathematical Science, Yazd, Iran, (2019).