دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و نهم، آذر و دی ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

حل مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم خطی و غیرخطی با استفاده از اسپلاین کششی

کریم فرجیان[۱]*، نادر رفعتی ملکی[۲]

(۱) گروه ریاضی کاربردی، واحد بناب، دانشگاه آزاد اسلامی، بناب، ایران
(۲) گروه ریاضی کاربردی، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۱۰/۰۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۱۰/۰۹

چکیده

در این مقاله حل عددی دسته‌های خاصی از مسائل مقدار مرزی معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوازدهم را با استفاده از اسپلاین کششی مورد بحث و بررسی قرار داده‌ایم. فرمول‌بندی اسپلاین ۱۵- کششی را ارایه می‌نماییم و رابطه سازگاری این گونه اسپلاین را بدست آورده‌ایم تا از این رابطه برای حل مسائل استفاده نمائیم. دسته‌هایی از روش‌های جدید با مراتب مختلف را ایجاد کردیم، همگرایی روش های حاصله را اثبات و کاربرد روش‌ها را روی مسائل مختلف آزمایش کرده و بدین طریق کاربرد مفیدی حاصله را در عمل نشان داده‌ایم. شرایط مرزی را برای روش‌ها فرمول‌بندی کرده و خطای برشی روش‌های موجود را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. با استفاده از رابطه مفیدی که از اسپلاین کششی بدست آوردیم مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم را حل کردیم، نتایج روش‌های مختلف را با روش‌های موجود محققین دیگر مقایسه کرده و رجحان و برتری روش‌های جدید را نشان داده‌ایم.

واژه‌های کلیدی: مسائل مقدار مرزی مرتبه داوازدهم، اسپلاین کششی، فرمول‌بندی، بررسی همگرایی.

[۱] عهده‌دار مکاتبات: Email: karim_faraj@yahoo.com

۱- مقدمه

در این مقاله مساله مقدار مرزی مرتبه دوازدهم را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathrm{u}^{(12)}(x) = f(x,u), \quad a < x < b, \quad a,b,x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

با شرایط مرزی

$$u^{(2m)}(a) = v_m, u^{(2m)}(b) = \bar{v}_m \qquad (2)$$

که v_m و $\bar{v}_m$ برای $m = 0,1,2,3,4,5$ ضرایب حقیقی و $u(x)$ و $f(x,u)$ توابع پیوسته در بازه $[a,b]$ هستند. این نوع از مسائل مقدار مرزی مراتب بالاتر در مدل‌سازی از جریان ویسکوالاستیک و شاخه‌های دیگر از ریاضی، فیزیک و علوم مهندسی ناشی می‌شوند.

معادلات دیفرانسیل مراتب بالاتر در زمینه‌های زیادی به وجود می‌آیند برای مثال زمانیکه یک لایه‌ی افقی نا محدود از سیال، از زیر حرارت داده می‌شود و یک میدان مغناطیسی یکنواخت نیز در سراسر سیال در همان مسیر بکار گرفته می‌شود در این حالت ناپایداری (بی‌ثباتی) شروع می‌شود، زمانی که بی‌ثباتی به عنوان همرفت عادی (معمولی) شروع شود توسط مسائل مقدار مرزی مرتبه دهم مدل‌سازی می‌شود. زمانی که بی‌ثباتی در حد بالاتر باشد، توسط مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم مدل‌سازی می‌شود[۱].

برخی از روش‌هایی که برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم توسط صدیقی و همکارانش در سال‌های۱۹۹۷ تا ۲۰۰۸، به کار برده شده، اسپلاین غیر چندجمله‌ای و اسپلاین‌های درجه دوازدهم و سیزدهم می‌باشد[۲-۴]. و همچنین روش‌هایی مانند روش تفاضلات متناهی، روش تکرار تغییرات، روش اصلاح شده آدومیان، [۵-۸] برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم به کار برده شده است. موسائی و همکارانش [۹] روش لاگرانژ بهبود یافته را برای حل مسائل مقدار مرزی دو نقطه‌ای به کار گرفته‌اند. علیزاده [۱۰] خواص تابع مقدار ویژه را مورد مطالعه قرار داده است.

در سال‌های اخیر با افزایش تقاضا برای ابزار مالی و مساله قیمت‌گذاری قراردادها، پژوهشگران متعددی، روش‌های عددی و تحلیلی را برای حل این مسائل را مورد توجه قرار داده‌اند[۱۱-۱۴].

ما در این مقاله به دنبال ارائه روشی هستیم که مشکلات و موانع آن برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم کم شده و همچنین به جواب تحلیلی، همگرا باشد و الگوریتمی که تعداد عملیات لازم را بهینه نماید، می‌توان، از اسپلاین اسپلاین کششی استفاده کرد. و سعی داریم با استفاده از اسپلاین کششی، مسائل مقدار مرزی خطی و غیرخطی را حل کنیم و با ایجاد روش‌های مناسب برای تقریب شرایط مرزی همراه با مسائل مقدار مرزی، روش-هایی با دقت بالا و با مراتب همگرایی بالاتر ارائه دهیم.

برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم، درصدد تعریف و ایجاد روش‌هایی با مراتب مختلف مبتنی بر اسپلاین ۱۵- کششی خاصی هستیم که جواب $u(x)$ این مسائل را در بازه‌ی$[a,b]$، تقریب زند. لذا بازه‌ی $[a,b]$، به n زیر بازه‌ی مساوی، با استفاده از نقاط $x_i = a + \mathrm{i}$ ، $i = 0,1,\dots,n-1$ و با طول گام $h = \frac{b-a}{n}$ افراز می-کنیم. برای دسترسی به این هدف تابع اسپلاین را در این مقاله به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\rho = \mathrm{Span}\{1, \mathrm{x}, \mathrm{x}^2, \dots, \mathrm{x}^{13}, \cosh(\mathrm{kx}), \sinh(\mathrm{kx})\}$$

توجه شود که $\mathrm{k} = \frac{\theta}{\mathrm{h}}$ می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد.

در این مقاله در بخش ۲ رابطه مفید اسپلاین ۱۵- کششی را بدست می‌آوریم تا از این رابطه مفید برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم استفاده نمائیم. در بخش ۳ فرمول‌بندی شرایط مرزی و در بخش ۴ خطای برشی بدست می‌آید و در بخش ۵ آنالیز همگرایی و سرانجام در بخش ۶ نتایج عددی بحث و بررسی می‌گردد.

۲ - اسپلاین ۱۵- کششی

تابع اسپلاین ۱۵- کششی، $S_i(x)$ ، را برای درونیابی تابع $u(x)$ در زیر بازه‌ی $[x_i, x_{i+۱}]$ و $i = ۰,۱,۲,\dots,n-۱$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$S_i(x) = \sum_{j=۰}^{۱۳} a_{ij}(x-x_i)^j + b_i \cosh k(x-x_i) + c_i \sinh k(x-x_i), \quad (۳)$$

که a_{ij} برای $j = ۰,۱,۲,\dots,۱۳$ و c_i, b_i ضرایب نامعین و حقیقی هستند و با نمایش روابط ذیل برای اسپلاین ۱۵- کششی، داریم:

$$\begin{aligned}
&S_i(x_l) = u_l, S_i^{(۲)}(x_l) = m_l, S_i^{(۴)}(x_l) = M_l,\\
&S_i^{(۶)}(x_l) = z_l, S_i^{(۸)}(x_l) = V_l, S_i^{(۱۰)}(x_l) = n_l,\\
&S_i^{(۱۲)}(x_l) = v_l, S_i^{(۱۴)}(x_l) = L_l,\\
&l = i, i+۱, \quad i = ۰,۱,۲,\dots,n-۱. \quad (۴)
\end{aligned}$$

چون می‌خواهیم رابطه‌ای بین مشتق مرتبه دوازدهم اسپلاین کششی v_i و تابع درونیاب u_i را بدست آوریم به همین دلیل از مشتقات مراتب دوم، چهارم، ششم، هشتم، دهم، دوازدهم و چهاردهم در شرایط (۴) استفاده می‌کنیم. با استفاده از شرایط (۴)، ضرایب (۳) را می‌توان بدست آورد و با استفاده از پیوستگی مشتق مرتبه اول، سوم، پنجم، هفتم، نهم، یازدهم و سیزدهم یعنی:

$$\begin{aligned}
&S_{i-۱}^{(\lambda)}(x_i) = S_i^{(\lambda)}(x_i)\\
&\lambda = ۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳،
\end{aligned}$$

رابطه نهایی بین مشتق مرتبه دوازدهم v_i و مقادیر تابع درونیابی شده u_i که $i = ۱,۲,\dots,n$ را بدست می‌آوریم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\alpha_۱(u_{i-۷}+u_{i+۷}) + \alpha_۲(u_{i-۶}+u_{i+۶}) +\\
&\alpha_۳(u_{i-۵}+u_{i+۵}) + \alpha_۴(u_{i-۴}+u_{i+۴}) +\\
&\alpha_۵(u_{i-۳}+u_{i+۳}) + \alpha_۶(u_{i-۲}+u_{i+۲}) +\\
&\alpha_۷(u_{i-۱}+u_{i+۱}) + \alpha_۸ u_i =\\
&-h^{۱۲}(\beta_۱(v_{i-۷}+v_{i+۷}) + \beta_۲(v_{i-۶}+v_{i+۶}) +\\
&\beta_۳(v_{i-۵}+v_{i+۵}) + \beta_۴(v_{i-۴}+v_{i+۴}) +\\
&\beta_۵(v_{i-۳}+v_{i+۳}) + \beta_۶(v_{i-۲}+v_{i+۲}) +\\
&\beta_۷(v_{i-۱}+v_{i+۱}) + \beta_۸ v_i),\\
&i = ۶,۷,\dots,n-۷. \quad (۵)
\end{aligned}$$

بطوریکه

$$\alpha_{۱} = \frac{-۱}{\gamma}\left(۱۳!\,\theta^{۱۲}\left(\theta - \sinh(\theta)\right)\right),$$
$$\alpha_{۲} = \frac{۱}{\gamma}(۲(۱۳!)\theta^{۱۲}(۶\theta + \theta\cosh(\theta) - ۷\sinh(\theta))),$$
$$\alpha_{۳} = \frac{-۱}{\gamma}(۱۳!\,\theta^{۱۲}(۶۷\theta + ۲۴\theta\cosh(\theta) - ۹۱\sinh(\theta))),$$
$$\alpha_{۴} = \frac{۱}{\gamma}(۴(۱۳!)\theta^{۱۲}(۵۸\theta + ۳۳\theta\cosh(\theta) - ۹۱\sinh(\theta))),$$
$$\alpha_{۵} = \frac{-۱}{\gamma}(۱۱(۱۳!)\theta^{۱۲}(۵۱\theta + ۴۰\theta\cosh(\theta) - ۹۱\sinh(\theta))),$$
$$\alpha_{۶} = \frac{۱}{\gamma}(۲۲(۱۳!)\theta^{۱۲}(۴۶\theta + ۴۵\theta\cosh(\theta) - ۹۱\sinh(\theta))),$$
$$\alpha_{۷} = \frac{-۱}{\gamma}(۳۳(۱۳!)\theta^{۱۲}(۴۳\theta + ۴۸\theta\cosh(\theta) - ۹۱\sinh(\theta))),$$
$$\alpha_{۸} = \frac{۱}{\gamma}(۲۶۴(۱۳!)\theta^{۱۲}(۶\theta + ۷\theta\cosh(\theta) - ۱۳\sinh(\theta))),$$
$$\gamma = (۱۵۶\theta(۱۱! + ۱۶۵(۸!)\theta^{۲} + ۳۳۲۶۴۰\theta^{۴} +$$
$$۷۹۲۰\theta^{۶} + ۱۱۰\theta^{۸} + \theta^{۱۰}) + (-۱۳! +$$
$$\theta^{۱۲})\sinh(\theta)),$$
$$\beta_{۱} = \frac{۱}{\gamma}(۱۳!\,\theta + ۲۶(۱۱!)\theta^{۳} + ۱۴۳(۹!)\theta^{۵} +$$
$$۱۷۱۶(۶!)\theta^{۷} + ۱۷۱۶۰\theta^{۹} + ۱۵۶\theta^{۱۱} +$$
$$\theta^{۱۳} - ۱۳!\,\sinh(\theta)),$$
$$\beta_{۲} = \frac{۱}{\gamma}(-(۲(\theta(۱۳! + ۲۶(۱۱!)\theta^{۲} +$$
$$۱۴۳(۹!)\theta^{۴} + ۱۲۳۵۵۲۰\theta^{۶} + ۱۷۱۶۰\theta^{۸} +$$
$$۱۵۶\theta^{۱۰} + \theta^{۱۲})\cosh(\theta) - ۳(-۲(۱۳!)\theta -$$
$$۲۶(۱۱!)\theta^{۳} + ۴۲۹(۹!)\theta^{۵} + ۲۳۴۷۴۸۸۰\theta^{۷} +$$
$$۱۴۲۴۲۸۰\theta^{۹} + ۵۲۸۸۴\theta^{۱۱} + ۱۳۶۳\theta^{۱۳} +$$
$$۳۶۴(۱۱!)\sinh(\theta))))),$$
$$\beta_{۳} = \frac{۱}{\gamma}((\theta(۶۷(۱۳!) + ۱۸۲(۱۱!)\theta^{۲} -$$
$$۱۶۱۵۹(۹!)\theta^{۴} + ۶۰۱۶۹۸۲۴۰\theta^{۶} +$$
$$۲۱۶۳۳۶۱۲۰\theta^{۸} + ۲۳۱۷۶۴۵۲\theta^{۱۰} +$$
$$۱۴۷۹۷۲۷\theta^{۱۲}) - ۱۲\theta(-۲(۱۳!) -$$
$$۲۶(۱۱!)\theta^{۲} + ۴۲۹(۹!)\theta^{۴} + ۲۳۴۷۴۸۸۰\theta^{۶} +$$
$$۱۴۲۴۲۸۰\theta^{۸} + ۵۲۸۸۴\theta^{۱۰} +$$
$$۱۳۶۳\theta^{۱۲})\cosh(\theta) - ۹۱(۱۳!)\sinh(\theta))),$$
$$\beta_{۴} = \frac{۱}{\gamma}(۴(\theta(-۵۸(۱۳!) + ۲۸۶(۱۱!)\theta^{۲} +$$
$$۶۷۲۱(۹!)\theta^{۴} - ۸۷۵۹۸۳۶۸۰\theta^{۶} +$$
$$۱۴۲۸۹۱۳۲۰\theta^{۸} + ۷۴۱۸۹۰۷۶\theta^{۱۰} +$$
$$۱۱۳۸۵۴۰۷\theta^{۱۲}) - ۹\theta(۵۷۲(۱۱!) +$$
$$۳۴۵۹۴۵۶۰۰\theta^{۲} - ۳۲۸۶۴۸۳۲۰\theta^{۴} +$$
$$۳۳۳۵۹۰۴۰\theta^{۶} + ۱۲۰۱۷۷۲۰\theta^{۸} +$$
$$۱۲۸۷۵۷۲\theta^{۱۰} + ۸۲۲۰۷\theta^{۱۲})\cosh(\theta) +$$
$$۹۱(۱۳!)\sinh(\theta))),$$
$$\beta_{۵} = \frac{۱}{\gamma}(((۳\theta(۱۸۷(۱۳!) + \theta^{۲}(-۱۸۹۸(۱۱!) +$$
$$\theta^{۲}(۶۷۲۱(۹!) + ۱۰۹۵۹۰۶۲۴۰\theta^{۲} -$$
$$۵۶۳۴۱۴۲۸۰\theta^{۴} + ۲۹۲۸۸۱۷۳۲\theta^{۶} +$$
$$۱۴۱۵۸۷۰۸۷\theta^{۸}))) - ۱۰۰\theta(-۲۷۳۹۸۸۹۱۵۲۰$$
$$+\theta^{۲}(۲۶(۱۱!) + \theta^{۲}(۱۷۶۴۳۲۲۵۶ -$$
$$۷۲۸۹۵۶۸۰\theta^{۲} + ۱۱۲۶۰۳۹۲\theta^{۴} +$$

$۵۹۲۸۷۸۰\theta^{۶} + ۹۱۰۶۶۹\theta^{۸})))\cosh(\theta) -$
$۱۰۰۱(۱۳!)\sinh(\theta))),$
$\beta_{۶} = \frac{۱}{\gamma}(۲(\theta(-۵۰۶(۱۳!) + \theta^{۲}(۶۷۳۴(۱۱!) +$
$\theta^{۲}(-۷۴۵۰۳(۹!) + ۲۶۱۸۰۶۶۸۸۰\theta^{۲} -$
$۲۷۶۶۳۶۳۶۰\theta^{۴} + ۲۷۴۳۷۱۲۴\theta^{۶} +$
$۷۷۵۵۷۷۴۷۹\theta^{۸}))) - ۱۵\theta(۳۳(۱۳!) +$
$\theta^{۲}(-۳۹۰(۱۱!) + \theta^{۲}(۸۸۲۱۶۱۲۸۰ +$
$۱۷۹۱۵۰۴۰۰\theta^{۲} - ۱۲۷۱۰۴۱۲۰\theta^{۴} +$
$۵۷۰۳۱۲۶۰\theta^{۶} + ۲۸۲۱۸۷۶۹\theta^{۸})))\cosh(\theta) +$
$۱۰۰۱(۱۳!)\sinh(\theta))),$
$\beta_{۷} = \frac{۱}{\gamma}(۳(۳\theta(۲۴۵۹۶(۱۱!) +$
$\theta^{۲}(-۹۳۷۵۱۲۵۷۶۰۰ + \theta^{۲}(۲۸۸۷۱۷(۸!) -$
$۱۶۲۷۱۷۹۸۴۰\theta^{۲} + ۲۸۴۸۱۵۹۶۰\theta^{۴} -$
$۱۱۲۴۶۷۲۱۲\theta^{۶} + ۲۹۹۸۲۸۱۷۱\theta^{۸}))) -$
$۸\theta(-۶۶(۱۳!) + \theta^{۲}(۱۰۱۴(۱۱!) +$
$\theta^{۲}(-۱۴۴۴۳(۹!) + ۷۴۰۰۷۶۴۸۰\theta^{۲} -$
$۹۳۰۲۴۳۶۰\theta^{۴} - ۲۰۱۳۰۳۹۶\theta^{۶} +$
$۱۲۵۴۶۸۴۵۹\theta^{۸})))\cosh(\theta) -$
$۱۰۰۱(۱۳!)\sinh(\theta))),$
$\beta_{۸} = \frac{۱}{\gamma}(۲۴(\theta(-۶۶(۱۳!) +$
$\theta^{۲}(۱۰۱۴(۱۱!) + \theta^{۲}(-۱۴۴۴۳(۹!) +$
$۷۴۰۰۷۶۴۸۰\theta^{۲} - ۹۳۰۲۴۳۶۰\theta^{۴} -$
$۲۰۱۳۰۳۹۶\theta^{۶} + ۱۲۵۴۶۸۴۵۹\theta^{۸}))) -$
$۷\theta(۱۱(۱۳!) + \theta^{۲}(-۱۸۲(۱۱!) +$
$\theta^{۲}(۳۰۰۳(۹!) - ۲۰۶۳۳۱۸۴۰\theta^{۲} +$
$۵۳۲۱۳۱۶۰\theta^{۴} - ۲۲۲۳۴۲۱۲\theta^{۶} +$
$۲۷۰۸۵۳۸۱\theta^{۸})))\cosh(\theta) +$
$۱۴۳(۱۳!)\sinh(\theta))).$

برای رابطه‌ی (۵)، اگر $k \to ۰$ ، از طرفی $\theta = kh$ بنابراین $\theta \to ۰$ آنگاه خواهیم داشت:

$(\alpha_{۱},\alpha_{۲},\alpha_{۳},\alpha_{۴},\alpha_{۵},\alpha_{۶},\alpha_{۷},\alpha_{۸}) \to$
$(۱,-۸,۱۹,۳۲,-۳۱۹,۹۶۸,-۱۷۴۹,۲۱۱۲),$
$(\beta_{۱},\beta_{۲},\beta_{۳},\beta_{۴},\beta_{۵},\beta_{۶},\beta_{۷},\beta_{۸}) \to$
$\frac{-۱}{۳۵(۱۳!)}(۱,۳۲۷۵۲,۱۳۸۲۴۷۳۹,۸۴۸۰۹۰۹۱۲,$
$۱۵۰۴۱۲۲۹۵۲۱,۱۰۲۷۷۶۹۹۸۹۲۸,$
$۳۱۱۳۸۷۵۹۸۴۱۱,۴۴۷۵۳۸۸۱۷۴۷۲),$

با این مقادیر، ضرایب رابطه (۵) رابطه‌ای خواهد بود که از اسپلاین چندجمله‌ای درجه پانزدهم بدست خواهد آمد. برای گسسته‌سازی معادله (۱) با رابطه اسپلاین (۵)، بازه $[a,b]$ را به تعداد $n+۱$ نقطه، $x_i = a + \mathrm{ih}$ که $i = ۰,۱,۲,\ldots,n$ با طول گام $h = \frac{b-a}{n}$ که به فاصله مساوی از هم قرار دارند افراز می‌کنیم، فرض می‌کنیم:

$v_i = {u_i}^{(۱۲)} = f(x_i,u_i) = f_i \equiv f(x_i,u(x_i))$

و با جایگذاری در رابطه (۵) از اسپلاین ۱۵- کششی، $(n-۱۳)$ معادله، $(n+۱)$ مجهولی u_i که $i = ۰,۱,۲,۳,\ldots,n$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\alpha_1(u_{i-7}+u_{i+7})+\beta_1 h^{12}(f(x_{i-7},u_{i-7})+f(x_{i+7},u_{i+7}))+\alpha_2(u_{i-6}+u_{i+6})+\beta_2 h^{12}(f(x_{i-6},u_{i-6})+f(x_{i+6},u_{i+6}))+\alpha_3(u_{i-5}+u_{i+5})+\beta_3 h^{12}(f(x_{i-5},u_{i-5})+f(x_{i+5},u_{i+5}))+\alpha_4(u_{i-4}+u_{i+4})+\beta_4 h^{12}(f(x_{i-4},u_{i-4})+f(x_{i+4},u_{i+4}))+\alpha_5(u_{i-3}+u_{i+3})+\beta_5 h^{12}(f(x_{i-3},u_{i-3})+f(x_{i+3},u_{i+3}))+\alpha_6(u_{i-2}+u_{i+2})+\beta_6 h^{12}(f(x_{i-2},u_{i-2})+f(x_{i+2},u_{i+2}))+\alpha_7(u_{i-1}+u_{i+1})+\beta_7 h^{12}(f(x_{i-1},u_{i-1})+f(x_{i+1},u_{i+1}))+\alpha_8 u_i+\beta_8 h^{12} f(x_i,u_i)=0,\quad i=7,8,\dots,(n-7). \tag{6}$$

۳- فرمول‌بندی مرزی

سیستم (۶) شامل $(n-13)$ معادله و $(n+1)$ مجهول است، برای بدست آوردن جواب، برای این سیستم، نیاز به چهارده معادله دیگر داریم، بنا به شرایط مرزی (۲)، دو معادله $u(a)=v.$ و $u(b)=\bar{v}.$ هستند و دوازده معادله دیگر را با استفاده از (۲)، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases}
(i)\ \sum_{i=0}^{8}\gamma_{1,i}u_i+\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{1,i}u_0^{(2i)}=h^{12}\sum_{i=0}^{17}\delta_{1,i}u_i^{(12)}+t_1,\\
(ii)\ \sum_{i=0}^{9}\gamma_{2,i}u_i+\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{2,i}u_0^{(2i)}=h^{12}\sum_{i=0}^{17}\delta_{2,i}u_i^{(12)}+t_2,\\
(iii)\ \sum_{i=0}^{10}\gamma_{3,i}u_i+\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{3,i}u_0^{(2i)}=h^{12}\sum_{i=0}^{17}\delta_{3,i}u_i^{(12)}+t_3,\\
(iv)\ \sum_{i=0}^{11}\gamma_{4,i}u_i+\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{4,i}u_0^{(2i)}=h^{12}\sum_{i=0}^{17}\delta_{4,i}u_i^{(12)}+t_4,\\
(v)\ \sum_{i=0}^{12}\gamma_{5,i}u_i+\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{5,i}u_0^{(2i)}=h^{12}\sum_{i=0}^{17}\delta_{5,i}u_i^{(12)}+t_5,\\
(vi)\ \sum_{i=0}^{13}\gamma_{6,i}u_i+\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{6,i}u_0^{(2i)}=h^{12}\sum_{i=0}^{17}\delta_{6,i}u_i^{(12)}+t_6,\\
(vii)\ \sum_{i=0}^{13}\gamma_{6,i}u_{n-i}+\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{6,i}u_n^{(2i)}=h^{12}\sum_{i=0}^{17}\delta_{6,i}u_{n-i}^{(12)}+t_{n-6},\\
(viii)\ \sum_{i=0}^{12}\gamma_{5,i}u_{n-i}+\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{5,i}u_n^{(2i)}=h^{12}\sum_{i=0}^{17}\delta_{5,i}u_{n-i}^{(12)}+t_{n-5},\\
(ix)\ \sum_{i=0}^{11}\gamma_{4,i}u_{n-i}+\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{4,i}u_n^{(2i)}=h^{12}\sum_{i=0}^{17}\delta_{4,i}u_{n-i}^{(12)}+t_{n-4},\\
(x)\ \sum_{i=0}^{10}\gamma_{3,i}u_{n-i}+\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{3,i}u_n^{(2i)}=h^{12}\sum_{i=0}^{17}\delta_{3,i}u_{n-i}^{(12)}+t_{n-3},\\
(xi)\ \sum_{i=0}^{9}\gamma_{2,i}u_{n-i}+\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{2,i}u_n^{(2i)}=h^{12}\sum_{i=0}^{17}\delta_{2,i}u_{n-i}^{(12)}+t_{n-2},\\
(xii)\ \sum_{i=0}^{8}\gamma_{1,i}u_{n-i}+\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{1,i}u_n^{(2i)}=h^{12}\sum_{i=0}^{17}\delta_{1,i}u_{n-i}^{(12)}+t_{n-1},
\end{cases} \tag{7}$$

اگر با سری تیلور معادله های (۷) را بسط دهیم، به کمک الگوریتم زیر و نرم افزار مسمتیکا می‌توان ضرایب مجهول در رابطه (۷) را به بدست آورد. بنابراین:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{j} \gamma_{k,i} = 0, \\ \frac{1}{(2m-1)!}\left(\sum_{i=1}^{j} i^{2m-1}\gamma_{k,i}\right) = 0, \\ \frac{1}{(2n)!}\left(\sum_{i=1}^{j} i^{2n}\gamma_{k,i}\right) + \tilde{a}_{k,n} = 0, \\ \frac{1}{12!}\left(\sum_{i=1}^{j} i^{12}\gamma_{k,i}\right) = \sum_{i=0}^{17} \delta_{k,i}, \\ \frac{1}{l!}\left(\sum_{i=1}^{j} i^{l}\gamma_{k,i}\right) = \frac{1}{r!}\left(\sum_{i=0}^{17} i^{r}\delta_{k,i}\right). \end{cases} \qquad (8)$$

که $m = 1,2,3,4,5,6$ ، $n = 1,2,3,4,5$ و $l = 12 + r$ ، $r = 1,2,\dots,17$.

الف) اگر در سیستم (۸) به جای $k = 1, j = 8$ و $\gamma_{1,7} = -8, \gamma_{1,8} = 1$ قرار دهیم، ضرایب مجهول در معادله-های $(i), (xii)$ در (۷) بدست می‌آید.

ب) اگر در سیستم (۸) به جای $k = 2, j = 9$ و $\gamma_{2,7} = 19, \gamma_{2,8} = -8, \gamma_{2,9} = 1$ قرار دهیم، ضرایب مجهول در معادله‌های $(ii), (xi)$ در (۷) بدست می‌آید.

ج) اگر در سیستم (۸) به جای $k = 3, j = 10$ و $\gamma_{3,7} = 32$ و $\gamma_{3,8} = 19, \gamma_{3,9} = -8, \gamma_{3,10} = 1$ قرار دهیم، ضرایب مجهول در معادله‌های $(iii), (x)$ در (۷) بدست می‌آید.

ح) اگر در سیستم (۸) به جای $k = 4, j = 11$ و $\gamma_{4,7} = \gamma_{4,8} = 32$ ، $\gamma_{4,9} = 19, \gamma_{4,10} = -8, \gamma_{4,11} = 1$ ، -319 قرار دهیم، ضرایب مجهول در معادله‌های $(iv), (ix)$ در (۷) بدست می‌آید.

خ) اگر در سیستم (۸) به جای $k = 5, j = 12$ و $\gamma_{5,7} = 968, \gamma_{5,8} = 32$ و $\gamma_{5,10} = 19, \gamma_{5,11} = -8, \gamma_{5,12} = 1$ ، $\gamma_{5,9} = -319$ قرار دهیم، ضرایب مجهول در معادله‌های $(v), (viii)$ در (۷) بدست می‌آید.

د) اگر در سیستم (۸) به جای $k = 6, j = 13$ و $\gamma_{6,7} = -1749, \gamma_{6,8} = 968, \gamma_{6,9} = -319$ ، $\gamma_{6,10} = 32$ ، $\gamma_{6,11} = 19, \gamma_{6,12} = -8, \gamma_{6,13} = 1$ قرار دهیم، ضرایب مجهول در معادله‌های $(vi), (vii)$ در (۷) بدست می‌آید.

۴ - خطای برشی

برای بدست آوردن کلاسی از روش‌ها، خطای برشی رابطه (۵) را با استفاده از سری تیلور حول x_i بسط می‌دهیم که بعد از بسط دادن و ساده کردن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} T_i &= \sigma_0 u_i + \sigma_1 h^2 u_i^{(2)} + \frac{1}{12}\sigma_2 h^4 u_i^{(4)} + \\ &\frac{2}{6!}\sigma_3 h^6 u_i^{(6)} + \frac{2}{8!}\sigma_4 h^8 u_i^{(8)} + \frac{2}{10!}\sigma_5 h^{10} u_i^{(10)} \\ &+ \left(\frac{2}{12!}\sigma_6 + \varrho_0\right) h^{12} u_i^{(12)} + \left(\frac{2}{14!}\sigma_7 + \right. \\ &\left.\varrho_1\right) h^{14} u_i^{(14)} + \left(\frac{2}{16!}\sigma_8 + \frac{1}{12}\varrho_2\right) h^{16} u_i^{(16)} + \\ &\left(\frac{2}{18!}\sigma_9 + \frac{2}{6!}\varrho_3\right) h^{18} u_i^{(18)} + \left(\frac{2}{20!}\sigma_{10} + \right. \\ &\left.\frac{2}{8!}\varrho_4\right) h^{20} u_i^{(20)} + \left(\frac{2}{22!}\sigma_{11} + \frac{2}{10!}\varrho_5\right) h^{22} u_i^{(22)} \\ &+ \left(\frac{2}{24!}\sigma_{12} + \frac{2}{12!}\varrho_6\right) h^{24} u_i^{(24)} + \left(\frac{2}{26!}\sigma_{13} + \right. \\ &\left.\frac{2}{14!}\varrho_7\right) h^{26} u_i^{(26)} + \left(\frac{2}{28!}\sigma_{14} + \right. \\ &\left.\frac{2}{16!}\varrho_8\right) h^{28} u_i^{(28)} + \left(\frac{2}{30!}\sigma_{15} + \right. \\ &\left.\frac{2}{18!}\varrho_9\right) h^{30} u_i^{(30)} + \dots \\ i &= 7,8,\dots,n-7. \end{aligned} \qquad (9)$$

که

$$\sigma_{۰} = ۲(\alpha_۱ + \alpha_۲ + \alpha_۳ + \alpha_۴ + \alpha_۵ + \alpha_۶ + \alpha_۷) + \alpha_۸,$$
$$\sigma_i = ۷^{۲i}\alpha_۱ + ۶^{۲i}\alpha_۲ + ۵^{۲i}\alpha_۳ + ۴^{۲i}\alpha_۴ + ۳^{۲i}\alpha_۵ + ۲^{۲i}\alpha_۶ + \alpha_۷,\quad i = ۱,۲,\ldots,۱۵,$$
$$\varrho_{۰} = ۲(\beta_۱ + \beta_۲ + \beta_۳ + \beta_۴ + \beta_۵ + \beta_۶ + \beta_۷) + \beta_۸,$$
$$\varrho_j = ۷^{۲j}\beta_۱ + ۶^{۲j}\beta_۲ + ۵^{۲j}\beta_۳ + ۴^{۲j}\beta_۴ + ۳^{۲j}\beta_۵ + ۲^{۲j}\beta_۶ + \beta_۷,\quad j = ۱,۲,\ldots,۹,$$

کلاسی از روش‌ها:

۴-۱ روش مرتبه دوم ($\chi_۱$):

اگر

$$\alpha_۱ = ۰, \alpha_۲ = \frac{۱}{۱۲}, \alpha_۳ = -۱, \alpha_۴ = \frac{۱۱}{۲},$$
$$\alpha_۵ = -\frac{۵۵}{۳}, \alpha_۶ = \frac{۱۶۵}{۴}, \alpha_۷ = -۶۶, \alpha_۸ = ۷۷,$$
$$\beta_۱ = ۰, \beta_۲ = ۰, \beta_۳ = ۰, \beta_۴ = ۰, \beta_۵ = ۰,$$
$$\beta_۶ = ۰, \beta_۷ = ۰, \beta_۸ = -\frac{۱}{۱۲}$$

در نظر بگیریم، ضرایب $h^۲$، $h^۴$، ...، $h^{۱۲}$ حذف می‌شوند و لذا خطای برشی روش $T_i = O(h^{۱۴})$ می‌شود و از طرفی چون مساله مقدار مرزی از مرتبه دوازدهم است (در سیستم (۶)، مشتق مرتبه دوازدهم یعنی $u_i^{(۱۲)}$ را تقریب می زنیم) بنابراین نتیجه می‌گیریم که دقت روش $O(h^۲)$ می‌شود و روشی از مرتبه دوم، با خطای برشی $T_i = \frac{۱}{۲۴}h^{۱۴}u_i^{(۱۴)} + O(h^{۱۶})$، خواهیم داشت.

۴-۲ روش مرتبه چهارم(χ_2) :

اگر

$$\alpha_۱ = \frac{۱}{۶}, \alpha_۲ = -\frac{۸}{۳}, \alpha_۳ = \frac{۱۱۵}{۶}, \alpha_۴ = -\frac{۲۴۸}{۳},$$
$$\alpha_۵ = \frac{۱۴۴۱}{۶}, \alpha_۶ = -\frac{۱۴۹۶}{۳}, \alpha_۷ = \frac{۱۵۲۹}{۲},$$
$$\alpha_۸ = -۸۸۰, \beta_۱ = \beta_۲ = \beta_۳ = \beta_۴ = ۰,$$
$$\beta_۵ = \beta_۶ = \beta_۷ = ۰, \beta_۸ = \frac{۱}{۳}$$

در نظر بگیریم، ضرایب $h^۲$ ، $h^۴$ ،...، $h^{۱۴}$ حذف می‌شوند و لذا خطای برشی روش $T_i = O(h^{۱۶})$ می‌شود و از طرفی چون مساله مقدار مرزی از مرتبه دوازدهم است بنابراین نتیجه می‌گیریم که دقت روش $O(h^۴)$ می‌شود و روشی از مرتبه چهارم، با خطای برشی $T_i = \frac{۱}{۱۲۰}h^{۱۶}u_i^{(۱۶)} + O(h^{۱۸})$، خواهیم داشت.

۴-۳ روش مرتبه ششم ($\chi_۳$) :

اگر

$$\alpha_۱ = \frac{۱}{۴۱}, \alpha_۲ = -\frac{۳۸۶}{۷۷۹}, \alpha_۳ = \frac{۳۱۶۹}{۷۷۹},$$
$$\alpha_۴ = -\frac{۱۴۸۳۶}{۷۷۹}, \alpha_۵ = \frac{۴۵۴۱۹}{۷۷۹}, \alpha_۶ = -\frac{۹۷۴۳۸}{۷۷۹},$$

$$\alpha_7 = \frac{152097}{779}, \alpha_8 = -\frac{176088}{779}, \beta_1 = 0,$$
$$\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0,\ \beta_7 = \frac{1}{19},\ \beta_8 = \frac{2}{41}$$

در نظر بگیریم، ضرایب h^2 ، h^4 ،...، h^{16} حذف می‌شوند و لذا خطای برشی روش $T_i = O(h^{18})$ می‌شود، بنابراین نتیجه می‌گیریم که دقت روش $O(h^6)$ می‌شود و روشی از مرتبه ششم، با خطای برشی $T_i = \frac{5021 h^{18} u_i^{(18)}}{3926160} + O(h^{20})$ ، خواهیم داشت.

۴-۴ روش مرتبه هشتم (χ_4) :

اگر

$$\alpha_1 = \frac{1}{5021}, \alpha_2 = -\frac{2093}{321344}, \alpha_3 = \frac{5047}{80336},$$
$$\alpha_4 = -\frac{51149}{160672}, \alpha_5 = \frac{81851}{80336}, \alpha_6 = -\frac{720643}{321344},$$
$$\alpha_7 = \frac{142527}{40168}, \alpha_8 = -\frac{331419}{80336}, \beta_1 = 0,$$
$$\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0, \beta_6 = \frac{1}{5120},$$
$$\beta_7 = \frac{5669}{6426880}, \beta_8 = \frac{20183}{12853760}$$

در نظر بگیریم، ضرایب h^2 ، h^4 ،...، h^{18} حذف می‌شوند و لذا خطای برشی روش $T_i = O(h^{20})$ می‌شود و دقت روش $O(h^8)$ می‌شود و روشی از مرتبه هشتم، با خطای برشی $T_i = \frac{126733 h^{20} u_i^{(20)}}{19434885120 0} + O(h^{22})$، خواهیم داشت.

۵-۴ روش مرتبه دهم (χ_5) :

اگر

$$\alpha_1 = \frac{1}{126733}, \alpha_2 = -\frac{2994}{3928723},$$
$$\alpha_3 = \frac{33541}{3928723}, \alpha_4 = -\frac{180244}{3928723}, \alpha_5 = \frac{594231}{3928723},$$
$$\alpha_6 = -\frac{1329262}{3928723}, \alpha_7 = \frac{2120613}{3928723}, \alpha_8 = -\frac{2471832}{3928723},$$
$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0, \beta_5 = \frac{1}{468720},$$
$$\beta_6 = \frac{344927}{9900381960}, \beta_7 = \frac{631069}{3960152784},$$
$$\beta_8 = \frac{769127}{2970114588}$$

در نظر بگیریم، ضرایب h^2 ، h^4 ،...، h^{20} حذف می‌شوند و لذا خطای برشی روش $T_i = O(h^{22})$ می‌شود و دقت روش $O(h^{10})$ می‌شود و روشی از مرتبه دهم، با خطای برشی $T_i = \frac{30433 h^{22} u_i^{(22)}}{78411025123200} + O(h^{24})$، خواهیم داشت.

۶-۴ روش مرتبه دوازدهم (χ_6) :

اگر

$$\alpha_1 = \frac{1}{30433}, \alpha_2 = -\frac{2060}{30433}, \alpha_3 = \frac{24643}{30433},$$
$$\alpha_4 = -\frac{1354 00}{30433}, \alpha_5 = \frac{451121}{30433}, \alpha_6 = -\frac{1014772}{30433},$$

$$\alpha_7=\frac{1623435}{30433},\alpha_8=-\frac{1893936}{30433},\beta_1=0,$$
$$\beta_2=\beta_3=0,\beta_4=\frac{1}{302400},\beta_5=\frac{587869}{2300734800},$$
$$\beta_6=\frac{8528131}{2300734800},\beta_7=\frac{37773123}{2300734800},$$
$$\beta_8=\frac{4876331}{1840587784}$$

در نظر بگیریم، ضرایب h^2 ، h^4 ،...، h^{22} حذف می‌شوند و لذا خطای برشی روش $T_i=O(h^{24})$ می‌شود و دقت روش $O(h^{12})$ می‌شود و روشی از مرتبه دوازدهم، با خطای برشی $T_i=\frac{241091h^{24}u_i^{(24)}}{6632742340224000}+O(h^{26})$، خواهیم داشت.

۴-۷ روش مرتبه چهاردهم (χ_7) :

اگر

$$\alpha_1=\frac{-1}{241091},\alpha_2=\frac{-23086}{166593881},\alpha_3=\frac{17381}{8768099},$$
$$\alpha_4=\frac{-1910636}{166593881},\alpha_5=\frac{6515509}{166593881},$$
$$\alpha_6=\frac{-14832818}{166593881},\alpha_7=\frac{2387047}{166593881},$$
$$\alpha_8=\frac{-27898728}{166593881},\beta_1=\beta_2=0,$$
$$\beta_3=\frac{1}{4597084800},\beta_4=\frac{940627}{36943859050560},$$
$$\beta_5=\frac{210453763}{221663154303360},\beta_6=\frac{16661231}{1458310225680},$$
$$\beta_7=\frac{39843503}{833320128960},\beta_8=\frac{158788499}{2083300322400}$$

در نظر بگیریم، ضرایب h^2 ، h^4 ،...، h^{24} حذف می‌شوند و لذا خطای برشی روش $T_i=O(h^{26})$ می‌شود و دقت روش $O(h^{14})$ می‌شود و روشی از مرتبه چهاردهم، با خطای برشی $T_i=-\frac{44239919h^{26}u_i^{(26)}}{217850548049342208000}+O(h^{28})$ خواهیم داشت.

۴-۸ روش مرتبه شانزدهم (χ_8) :

اگر

$$\alpha_1=1,\alpha_2=-8,\alpha_3=19,\alpha_4=32,$$
$$\alpha_5=-319,\alpha_6=968,\alpha_7=-1749,\alpha_8=2112,$$
$$\beta_1=\frac{-7499}{1307674368000},\beta_2=\frac{19093}{326918592000},$$
$$\beta_3=\frac{-6142051}{118879488000},\beta_4=\frac{-658026881}{163459296000},$$
$$\beta_5=\frac{-922262937339}{1307674368000},\beta_6=-\frac{153187251253}{326918592000},$$
$$\beta_7=-\frac{6211140297683}{435891456000},\beta_8=-\frac{56219106661}{27243216000}$$

در نظر بگیریم، ضرایب h^2 ، h^4 ،...، h^{26} حذف می‌شوند و لذا خطای برشی روش $T_i=O(h^{28})$ می‌شود و دقت روش $O(h^{16})$ می‌شود و روشی از مرتبه شانزدهم، با خطای برشی $T_i=\frac{-89h^{28}u_i^{(28)}}{39481344000}+O(h^{30})$، خواهیم داشت.

۴-۹ روش مرتبه هجدهم $(\chi_{۹})$:

اگر

$$\alpha_{۱}=\frac{-۱}{۸۱۶۹۱۷۳},\alpha_{۲}=\frac{۵۱۹۹۸}{۳۵۱۰۲۹۳۶۳۸۱},$$
$$\alpha_{۳}=\frac{-۲۹۳۱۰۷}{۳۵۱۰۲۹۳۶۳۸۱},\alpha_{۴}=\frac{۱۰۲۵۵۴۸}{۳۵۱۰۲۹۳۶۳۸۱},$$
$$\alpha_{۵}=\frac{-۲۵۰۶۰۹۷}{۳۵۱۰۲۹۳۶۳۸۱},\alpha_{۶}=\frac{۴۵۶۳۳۹۴}{۳۵۱۰۲۹۳۶۳۸۱},$$
$$\alpha_{۷}=-\frac{۶۴۴۱۱۷۱}{۳۵۱۰۲۹۳۶۳۸۱},\alpha_{۸}=\frac{۷۲۰۷۴۶۴}{۳۵۱۰۲۹۳۶۳۸۱},$$
$$\beta_{۱}=\frac{۱}{۴۲۹۷(۱۵!)},\beta_{۲}=\frac{۱۰۳۸۱۳۶۹}{۳۶۸۵۸۰۸۳۲۰۰۰۵(۱۳!)},$$
$$\beta_{۳}=\frac{۲۸۷۴۰۳۹۸۹۵۴۳}{۳۵۱۰۲۹۳۶۳۸۱(۱۵!)},\beta_{۴}=\frac{۵۳۶۳۶۲۸۸۱۸۷۹۷}{۲۸۷۴۹۳۰۴۸۹۶۰۳۹۰(۱۱!)},$$
$$\beta_{۵}=\frac{۳۰۸۳۱۰۲۴۵۳۱۴۵۷۳}{۳۵۱۰۲۹۳۶۳۸۱(۱۵!)},\beta_{۶}=\frac{۶۸۰۴۸۵۱۳۱۶۳۱۱۲۷}{۳۶۸۵۸۰۸۳۲۰۰۰۵(۱۳!)},$$
$$\beta_{۷}=\frac{۷۹۵۰۸۵۴۷۵۹۸۸۷۳۳}{۱۷۵۵۱۴۶۸۱۹۰۵(۱۴!)},\beta_{۸}=\frac{۱۰۴۹۱۹۳۷۸۰۵۸۳۶۱}{۴۷۹۱۵۵۰۸۱۶۰۰۶۵(۱۱!)}$$

در نظر بگیریم، ضرایب $h^{۲}$ ، $h^{۴}$ ،...، $h^{۲۸}$ حذف می‌شوند و لذا خطای برشی روش $T_i=O(h^{۳۰})$ می‌شود و دقت روش $O(h^{۱۸})$ می‌شود و روشی از مرتبه هجدهم، با خطای برشی $T_i=\frac{۹۳۷۸۵۱۵۵۵۲۹h^{۳۰}u_i^{(۳۰)}}{۳۵۱۰۲۹۳۶۳۸۱(۱۹!)}+O(h^{۳۲})$، خواهیم داشت.

۵ - آنالیز همگرایی

در این بخش همگرایی روش مرتبه شانزدهم را بررسی می‌کنیم. سیستم (۶) همراه با شرایط مرزی (۷) می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$A.U+h^{۱۲}\mathrm{Bf}(U)=R \qquad (۱۰)$$

که $f(u)=(f_{۱},\dots,f_{n-۱})^t$ و ماتریس‌های $B, A.$ ، از مرتبه $(n-۱)\times(n-۱)$، و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A.=(P_{n-۱}(۱,۲,۱))^{۴}(P_{n-۱}(-۱,۴,-۱))^{۳}+۲(P_{n-۱}(۱,۲,۱))^{۳}(P_{n-۱}(-۱,۴,-۱))^{۳}-$$
$$۱۰(P_{n-۱}(۱,۲,۱))^{۶}+۷۲(P_{n-۱}(۱,۲,۱))^{۵}-۴۳۲(P_{n-۱}(۱,۲,۱))^{۳},$$

که

$$P_{n-1}(x,z,y)=\begin{pmatrix} z & -y & & & \\ -x & z & -y & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -x & z & -y \\ & & & -x & z \end{pmatrix}$$

$$B=\left(\begin{array}{cccccccccccccc}
-\delta_{1,1} & -\delta_{1,2} & -\delta_{1,3} & -\delta_{1,4} & \cdots & -\delta_{1,17} & & & & & & & & \\
-\delta_{2,1} & -\delta_{2,2} & -\delta_{2,3} & -\delta_{2,4} & \cdots & -\delta_{2,17} & & & & & & & & \\
-\delta_{3,1} & -\delta_{3,2} & -\delta_{3,3} & -\delta_{3,4} & \cdots & -\delta_{3,17} & & & & & & & & \\
-\delta_{4,1} & -\delta_{4,2} & -\delta_{4,3} & -\delta_{4,4} & \cdots & -\delta_{4,17} & & & & & & & & \\
-\delta_{5,1} & -\delta_{5,2} & -\delta_{5,3} & -\delta_{5,4} & \cdots & -\delta_{5,17} & & & & & & & & \\
-\delta_{6,1} & -\delta_{6,2} & -\delta_{6,3} & -\delta_{6,4} & \cdots & -\delta_{6,17} & & & & & & & & \\
\beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 & \beta_7 & \beta_6 & \cdots & \beta_1 & & & \\
\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 & \beta_7 & \beta_6 & \cdots & \beta_1 & & \\
 & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \\
 & & \beta_1 & \cdots & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 & \beta_7 & \beta_6 & \beta_5 & \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 \\
 & & & \beta_1 & \cdots & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 & \beta_7 & \beta_6 & \beta_5 & \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 \\
 & & & & & & & & -\delta_{6,17} & \cdots & -\delta_{6,4} & -\delta_{6,3} & -\delta_{6,2} & -\delta_{6,1} \\
 & & & & & & & & -\delta_{5,17} & \cdots & -\delta_{5,4} & -\delta_{5,3} & -\delta_{5,2} & -\delta_{5,1} \\
 & & & & & & & & -\delta_{4,17} & \cdots & -\delta_{4,4} & -\delta_{4,3} & -\delta_{4,2} & -\delta_{4,1} \\
 & & & & & & & & -\delta_{3,17} & \cdots & -\delta_{3,4} & -\delta_{3,3} & -\delta_{3,2} & -\delta_{3,1} \\
 & & & & & & & & -\delta_{2,17} & \cdots & -\delta_{2,4} & -\delta_{2,3} & -\delta_{2,2} & -\delta_{2,1} \\
 & & & & & & & & -\delta_{1,17} & \cdots & -\delta_{1,4} & -\delta_{1,3} & -\delta_{1,2} & -\delta_{1,1}
\end{array}\right) \qquad (۱۱)$$

$$R=\left(\begin{array}{c}
-\gamma_{1,0}u_0-\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{1,i}u_0^{(2i)}+h^{12}\delta_{1,0}u_0^{(12)} \\
-\gamma_{2,0}u_0-\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{2,i}u_0^{(2i)}+h^{12}\delta_{2,0}u_0^{(12)} \\
-\gamma_{3,0}u_0-\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{3,i}u_0^{(2i)}+h^{12}\delta_{3,0}u_0^{(12)} \\
-\gamma_{4,0}u_0-\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{4,i}u_0^{(2i)}+h^{12}\delta_{4,0}u_0^{(12)} \\
-\gamma_{5,0}u_0-\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{5,i}u_0^{(2i)}+h^{12}\delta_{5,0}u_0^{(12)} \\
-\gamma_{6,0}u_0-\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{6,i}u_0^{(2i)}+h^{12}\delta_{6,0}u_0^{(12)} \\
-\alpha_1 u_0-h^{12}\beta_1 u_0^{(12)} \\
0 \\
\vdots \\
0 \\
-\alpha_1 u_n-h^{12}\beta_1 u_n^{(12)} \\
-\gamma_{6,0}u_n-\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{6,i}u_n^{(2i)}+h^{12}\delta_{6,0}u_n^{(12)} \\
-\gamma_{5,0}u_n-\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{5,i}u_n^{(2i)}+h^{12}\delta_{5,0}u_n^{(12)} \\
-\gamma_{4,0}u_n-\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{4,i}u_n^{(2i)}+h^{12}\delta_{4,0}u_n^{(12)} \\
-\gamma_{3,0}u_n-\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{3,i}u_n^{(2i)}+h^{12}\delta_{3,0}u_n^{(12)} \\
-\gamma_{2,0}u_n-\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{2,i}u_n^{(2i)}+h^{12}\delta_{2,0}u_n^{(12)} \\
-\gamma_{1,0}u_n-\sum_{i=1}^{5}h^{2i}\tilde{a}_{1,i}u_n^{(2i)}+h^{12}\delta_{1,0}u_n^{(12)}
\end{array}\right), \qquad (۱۲)$$

و $f(U)=\mathrm{diag}(f(x_i,u_i))$ که $i=۱,۲,\ldots,n-۱$ یک ماتریس از مرتبه $n-۱$ است.

فرض می‌کنیم:

$$A.\bar{U}+h^{۱۲}\mathrm{Bf}(\bar{U})=R+T \qquad (۱۳)$$

که بردار $\bar{U}=u(x_l)$ ، $l=۱,۲,\ldots,n-۱$ جواب دقیق و $T=[t_۱,t_۲,\ldots,t_{n-۱}]$ خطای برشی هستند. از (۱۰) و (۱۳) داریم:

$$[A]E=[A.+h^{۱۲}\mathrm{BF}(U)]E=T, \qquad (۱۴)$$

که $E=\bar{U}-U=[e_۱,e_۱,\ldots,e_{n-۱}]^t$ ، $f(\bar{U})-f(U)=F(U)E$ و $F(U)=\mathrm{diag}\left\{\frac{\partial f_i}{\partial u_i}\right\}$ برای $i=۱,۲,\ldots,n-۱$. برای اثبات معکوس پذیری $A.$ که $A=A.+h^{۱۲}\mathrm{BF}(U)$ ، داریم:

$$A.=(P_{n-۱}(۱,۲,۱))^۴(P_{n-۱}(-۱,۴,-۱))^۳+ ۲(P_{n-۱}(۱,۲,۱))^۳(P_{n-۱}(-۱,۴,-۱))^۳- ۱۰(P_{n-۱}(۱,۲,۱))^۶+۷۲(P_{n-۱}(۱,۲,۱))^۵-۴۳۲(P_{n-۱}(۱,۲,۱))^۳,$$

و بنابه [۱۵] داریم:

$$||P^{-۱}(۱,۲,۱)||\leq\frac{(b-a)^۲}{۸h^۲}, \qquad (۱۵)$$

و همچنین با استفاده از [۱۶] داریم:

$$||P^{-۱}(-۱,۴,-۱)||\leq\frac{۱}{۲}, \qquad (۱۶)$$

در نتیجه به وضوح ماتریس $A.$ نامنفرد و همچنین $||A.^{-۱}||<\omega$ و ω یک عدد مثبت است ($||.||$ نرم L_∞ است).

لم ۵-۱. اگر M یک ماتریس مربع از مرتبه N و $||M||<۱$ باشد $(I+M)^{-۱}$ وجود دارد و $||(I+M)^{-۱}||\leq\frac{۱}{(۱-||M||)}$.

اثبات: [۱۷]

لم ۵-۲. ماتریس $[A.+h^{۱۲}\mathrm{BF}(U)]$ در (۱۴) نامنفرد است هرگاه $Y<\frac{۱}{\omega\lambda h^{۱۲}}$ که $||B||\leq\lambda$ و $Y=\max|\frac{\partial f_l}{\partial u_l}|, l=۱,۲,\ldots,n-۱$.

($\lambda=\frac{۴۵۹۸۵۲۵۰۳۶۷۵۲۸۴۶۳۱۰۱۵۹۱۴۳۸۳۱۳}{۸۳۵۷۶۸۴۸۸۵۱۸۹۵۲۴۶۸۴۸۰۰۰۰۰۰}$ و $||.||$ نرم L_∞ است).

اثبات: می دانیم

$$[A.+h^{۱۲}\mathrm{BF}(U)]=A.[I+h^{۱۲}A.^{-۱}\mathrm{BF}(U)]$$

بنابراین بنابه لم ۵-۱، $[I+h^{۱۲}A.^{-۱}\mathrm{BF}(U)]$ معکوس پذیر است و همچنین بنابه لم ۵-۱ داریم :

$$h^{۱۲}||A.^{-۱}\mathrm{BF}(U)||\leq h^{۱۲}||A.^{-۱}||||B||||F(U)||<۱, \qquad (۱۷)$$

با استفاده از (۱۱)،

$$||B||\leq\frac{۴۵۹۸۵۲۵۰۳۶۷۵۲۸۴۶۳۱۰۱۵۹۱۴۳۸۳۱۳}{۸۳۵۷۶۸۴۸۸۵۱۸۹۵۲۴۶۸۴۸۰۰۰۰۰۰}=\lambda$$

خواهد بود و همچنین $||F(U)|| \leq Y = \max|\frac{\partial f_l}{\partial u_l}|$ که $l = ۱,۲,\ldots,n-۱$ در این صورت با استفاده از (۱۷) بدست می‌آوریم:

$$Y < \frac{۱}{\omega\lambda h^{۱۲}}.$$

قضیه۵-۱. فرض کنیم $u(x_l)$ جواب دقیق مساله مقدار مرزی (۱) با شرایط مرزی (۲) و u_l برای $l = ۱,۲,\ldots,n-۱$ جواب تقریبی بدست آمده از حل سیستم غیر خطی (۶) و (۷) باشد در این صورت داریم:

$$||E|| \equiv O(h^{۱۶})$$

اثبات: معادله (۱۴) را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$E = (A_۰ + h^{۱۲}\mathrm{BF}(U))^{-۱}T$$
$$= (I + h^{۱۲}A_۰^{-۱}\mathrm{BF}(U))^{-۱}A_۰^{-۱}T,$$
$$||E|| \leq ||(I + h^{۱۲}A_۰^{-۱}\mathrm{BF}(U))^{-۱}||||A_۰^{-۱}||||T||,$$

بنابراین اگر $h^{۱۲}||A_۰^{-۱}||||B||||F(U)|| < ۱$ آنگاه داریم:

$$||E|| \leq \frac{||A_۰^{-۱}||||T||}{۱-h^{۱۲}||A_۰^{-۱}||||B||||F(U)||}, \qquad (۱۸)$$

همچنین داریم:

$$||T|| \leq \frac{۴۹۰۶۵۸۴۶۳۳۲۶۰۲۳۳۴۴۱۵۴۱۱۹۷۱۹}{۱۰۶۸۷۹۵۰(۲۳!)} h^{۲۸}M_{۲۸}, \qquad (۱۹)$$

که $M_{۲۸} = \max|u^{(۲۸)}(\xi)|,\ a \leq \xi \leq b$ و از طرفی

$$\alpha_۱ = ۱, \alpha_۲ = -۸, \alpha_۳ = ۱۹, \alpha_۴ = ۳۲,$$
$$\alpha_۵ = -۳۱۹, \alpha_۶ = ۹۶۸, \alpha_۷ = -۱۷۴۹,$$
$$\alpha_۸ = ۲۱۱۲, \beta_۱ = -\frac{۷۴۹۹}{۱۵!}, \beta_۲ = \frac{۱۹۰۹۳}{۸۱۹۰(۱۱!)},$$
$$\beta_۳ = -\frac{۶۱۴۲۰۵۱}{۳۲۷۶۰(۱۰!)}, \beta_۴ = -\frac{۶۵۸۰۲۶۸۸۱}{۴۰۹۵(۱۱!)},$$
$$\beta_۵ = -\frac{۹۲۲۶۲۹۳۷۳۳۹}{۱۵!}, \beta_۶ = -\frac{۱۵۳۱۸۷۲۵۱۲۵۳}{۸۱۹۰(۱۱!)},$$
$$\beta_۷ = -\frac{۶۲۱۱۴۰۲۹۷۶۸۳}{۵(۱۴!)}, \beta_۸ = -\frac{۵۶۲۱۹۱۰۶۶۶۱}{۷۵۰۷۵(۹!)},$$

از نابرابری‌های (۱۸)، (۱۹) و $||A_۰^{-۱}|| < \omega$ ، $||F(U)|| \leq Y$ و $||B|| \leq \lambda$ داریم:

$$||E|| \leq \frac{۴۹۰۶۵۸۴۶۳۳۲۶۰۲۳۳۴۴۱۵۴۱۱۹۷۱۹\ \omega h^{۲۸}M_{۲۸}}{۱۰۶۸۷۹۵۰(۲۳!)(۱-\omega\lambda h^{۱۲}Y)} \equiv O(h^{۱۶}$$

۶- نتایج عددی

در این بخش روش (۶)، برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم، به کار می‌بریم و با انتخاب $\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_۸$ و $\beta_۱, \beta_۲, \ldots, \beta_۸$ های مختلف از رابطه (۹) روش‌هایی از مرتبه‌های $O(h^{۲n})$ برای $n = ۱,۲,\ldots,۹$ خواهیم داشت. مثال‌های ۱-۴ را با روشی که در این مقاله معرفی کردیم، حل کرده و به کمک جواب دقیق $u(x_i)$ و تقریبی u_i ماکزیمم خطا، یعنی $|u(x_i) - u_i|$ را به ازای h های مختلف در نقاط گره ای محاسبه می‌کنیم. ماکزیمم خطای بدست آمده برای روش‌های مرتبه‌های دوم، ششم، دهم، چهاردهم و هجدهم در جدول‌های ۱تا ۷ لیست کرده‌ایم. ماکزیمم خطای بدست آمده در مثال‌های ۱تا ۴ را با روش‌های دیگر مقایسه کردیم [۳، ۵] . همچنین برای مثال‌های ۱تا ۴ شکلی از جواب دقیق و تقریبی را با طول گام‌های مختلف h رسم کردیم.

مثال ۱. مساله مقدار مرزی خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u^{(۱۲)}(x) = -xu(x) - (۱۲۰ + ۲۳x + x^۳)e^x,$$
$$۰ \leq x \leq ۱,$$
$$u(۰) = u^{(۲)}(۰) = ۰, u(۱) = ۰,$$
$$u^{(۴)}(۰) = \frac{۱}{۳}u^{(۶)}(۰) = \frac{۱}{۶}u^{(۸)}(۰) =$$
$$\frac{۱}{۱۰}u^{(۱۰)}(۰) = -۸,$$
$$u^{(۲)}(۱) = \frac{۱}{۴}u^{(۴)}(۱) = \frac{۱}{۹}u^{(۶)}(۱) =$$
$$\frac{۱}{۱۶}u^{(۸)}(۱) = \frac{۱}{۲۵}u^{(۱۰)}(۱) = -۴e,$$

جواب دقیق این مساله $u(x) = x(۱-x)e^x$ است.

این مثال را با طول گام‌های $h = \frac{۱}{۲۲}, \frac{۱}{۴۴}, \frac{۱}{۸۸}, \frac{۱}{۱۷۶}, \frac{۱}{۳۵۲}$ به روش مرتبه‌های دوم، ششم، دهم، چهاردهم و هجدهم حل کرده و ماکزیمم خطای مطلق را محاسبه و با روش مرجع [۳] مقایسه کردیم، نتایج در جدول‌های ۱ و ۲ درج شده است.

مثال ۲. مساله مقدار مرزی خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u^{(۱۲)}(x) = u(x) - ۱۲(۲x\cos(x) + ۱۱\sin(x)),$$
$$-۱ \leq x \leq ۱$$

با شرایط مرزی

$$u(-۱) = ۰,$$
$$u^{(۲)}(-۱) = -۴\cos(-۱) - ۲\sin(-۱),$$
$$u^{(۴)}(-۱) = ۸\cos(-۱) - ۱۲\sin(-۱),$$
$$u^{(۶)}(-۱) = -۱۲\cos(-۱) + ۳۰\sin(-۱),$$
$$u^{(۸)}(-۱) = ۱۶\cos(-۱) - ۵۶\sin(-۱),$$
$$u^{(۱۰)}(-۱) = -۲۰\cos(-۱) + ۹۰\sin(-۱),$$
$$u(۱) = ۰, u^{(۲)}(۱) = ۴\cos(۱) + ۲\sin(۱),$$
$$u^{(۴)}(۱) = -۸\cos(۱) - ۱۲\sin(۱),$$
$$u^{(۶)}(۱) = ۱۲\cos(۱) + ۳۰\sin(۱),$$
$$u^{(۸)}(۱) = ۱۶\cos(۱) - ۵۶\sin(۱),$$
$$u^{(۱۰)}(۱) = ۲۰\cos(۱) + ۹۰\sin(۱),$$

جواب دقیق این مساله $u(x) = (x^۲ - ۱)\sin(x)$ است.

این مثال را با طول گام های $h = \frac{۱}{۲۲}, \dots, \frac{۱}{۷۰۴}$ به روش مرتبه های دوم، ششم، دهم، چهاردهم و هجدهم حل کرده و ماکزیمم خطای مطلق را محاسبه و با روش مرجع [۳] مقایسه کردیم، نتایج در جدول های ۳ و ۴ درج شده است.

مثال ۳. مساله مقدار مرزی غیر خطی زیر را در نظر می‌گیریم [۶، ۸] :

$$u^{(۱۲)}(x) = \frac{۱}{۲}e^{-x}u^۲(x), ۰ \leq x \leq ۱,$$

با شرایط مرزی

$$u(۰) = u^{(۲)}(۰) = u^{(۴)}(۰) = u^{(۶)}(۰) =$$
$$u^{(۸)}(۰) = u^{(۱۰)}(۰) = ۲,$$
$$u(۱) = u^{(۲)}(۱) = u^{(۴)}(۱) = u^{(۶)}(۱) =$$
$$u^{(۸)}(۱) = u^{(۱۰)}(۱) = ۲e,$$

جواب دقیق این مساله $u(x) = ۲e^x$ است.

این مثال را با طول گام‌های $h=\frac{۱}{۲۲},\frac{۱}{۴۴},\frac{۱}{۸۸},\frac{۱}{۱۷۶}$ به روش مرتبه‌های دوم، ششم، دهم، چهاردهم و هجدهم حل کرده و ماکزیمم خطای مطلق را محاسبه و نتایج در جدول ۵ درج شده است.

مثال ۴. مساله مقدار مرزی غیر خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u^{(۱۲)}(x)=(۱۱!)e^{-۱۲u(x)}-۲(۱۱!)(۱+x)^{-۱۲},$$
$$۰\le x\le e^{\frac{۱}{۲}}-۱,$$

با شرایط مرزی

$$u(۰)=۰, u^{(۲i)}(۰)=-(۲i-۱)!,$$
$$u\left(e^{\frac{۱}{۲}}-۱\right)=\frac{۱}{۲}, u^{(۲i)}\left(e^{\frac{۱}{۲}}-۱\right)=e^{-\frac{۲}{۲}i}u^{(۲i)}(۰),$$
$$i=۱,\dots,۵.$$

جواب دقیق این مساله $u(x)=\mathrm{Ln}(۱+x)$ است.

این مثال را با طول گام‌های $h=\frac{۱}{۳۲},\dots,\frac{۱}{۵۱۲}$ به روش مرتبه‌های دوم، ششم، دهم، چهاردهم و هجدهم حل کرده و ماکزیمم خطای مطلق را محاسبه و با روش مرجع [۵] مقایسه کردیم، نتایج در جدول‌های ۶ و ۷ درج شده است.

نتیجه‌گیری

با توجه به مطالب ارائه شده در این مقاله، جواب‌های تقریبی برای مسائل مقدار مرزی مرتبه دوازدهم، دو نقطه‌ای را به ترتیب با استفاده از اسپلاین پانزده کششی بدست آوردیم. همگرایی روش را نیز بحث و بررسی کرده و روشی با همگرایی مراتب بالاتر ایجاد کرده‌ایم. همچنین نشان دادیم که روند اسپلاین کششی با اعمال شرایط مرزی مناسب، با کاهش چشم‌گیر خطا از کارایی بالاتری نسبت به روش‌های موجود دیگر آن برخوردار است و همچنین نشان دادیم که نتایج محاسبه شده با استفاده از این روش دارای دقت کافی و کارایی مطلوب می‌باشند.

فهرست منابع

[۱] Chandrasekhar, S., ۱۹۶۱, ***Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability***. Clarendon press, New York, ۱۹۸۱. Oxford.

[۲] Siddiqi, S.S., Akram, G., ۲۰۰۸, ***Solutions of ۱۲th order boundary value problems using non polynomial spline technique***, Appl. Math. Comput., ۱۹۹(۲), ۵۵۹-۵۷۱.

[۳] Siddiqi, S.S., Twizell, E.H., ۱۹۹۷, ***Spline solutions of linear twelfth-order boundary value problems***, J. Comput. Appl. Math., ۷۸, ۳۷۱-۳۹۰.

[۴] Siddiqi, S.S., Akram, G., ۲۰۰۶, ***Solutions of twelfth order boundary value problems using thirteen degree spline***, Appl. Math. Comput., ۱۸۲, ۱۴۴۳-۱۴۵۳.

[۵] Boutayeb, A., and Twizell, E.H., ۱۹۹۱, ***Finite-difference methods for twelfth-order boundary-value problems***, J. Comput. Appl. Math., ۳۵, ۱۳۳-۱۳۸.

[۶] Noor, M.A., and Mohyud-Din, S.T., ۲۰۱۰, ***Variational iteration method for solving twelfth-order boundary-value problems using Hes polynomials***, Computational Mathematics and Modeling, ۲۱(۲), ۲۳۹-۲۵۱.

[۷] Ravi Kanth, A.S.V., Aruna, K., ۲۰۰۹, ***Variational iteration method for twelfth-order boundaryvalue problems***, Computers and Mathematics with Applications, ۵۸, ۲۳۶۰-۲۳۶۴.

[۸] Wazwaz, A.M., ۲۰۰۰, ***Approximate solutions to boundary value problems of higher order by the modified decomposition method***, Comput. Math. Appl., ۴۰, ۶۷۹-۶۹۱.

[۹] Moosaei, H., Ketabchi, S., Fooladi, M.T., ۲۰۱۹, ***Augmented Lagrangian method for solving absolute value equation and its application in two-point boundary value problems***, Journal of New Research in Mathematics, ۵(۲۰), ۵-۱۴.

[۱۰] Alizadeh Nazarkandi, H., ۲۰۱۶, ***Properties of eigenvalue function***, Journal of New Research in Mathematics, ۲(۷), ۹۷-۱۰۵.

[۱۱] Hossein Aminikhah, h., Alavi, S.J., ۲۰۱۹, ***A new approach to using the cubic B-spline functions to solve the Black-Scholes equation***, Journal of New Research in Mathematics, ۵(۱۸), ۷۱-۸۰.

[۱۲] Peykani, P., Mohammadi, E., Emrouznejad, A., Pishvaee, M.S., Rostamy-Malkhalifeh, M., ۲۰۱۹, ***Fuzzy data envelopment analysis: an adjustable approach***, Expert Systems with Applications, ۱۳۶, ۴۳۹-۴۵۲.

[۱۳] Peykani, P., Mohammadi, E., Pishvaee, M.S., Rostamy-Malkhalifeh, M., and Jabbarzadeh, A., ۲۰۱۸, ***A novel fuzzy data envelopment analysis based on robust possibilistic programming: possibility, necessity and credibility-based approaches***, RAIRO-Operations Research, ۵۲(۴), ۱۴۴۵-۱۴۶۳.

[۱۴] Peykani, P., Mohammadi, E., Rostamy-Malkhalifeh, M., and Hosseinzadeh Lotfi, F., ۲۰۱۹, ***Fuzzy data envelopment analysis approach for ranking of stocks with an application to Tehran stock exchange***, Advances in Mathematical Finance and Applications, ۴(۱), ۳۱-۴۳.

[۱۵] Henrici, P., ۱۹۶۱, ***Discrete variable methods in ordinary differential equations***, Wiley, New York.

[۱۶] Usmani, R.A., and Warsi, S.A., ۱۹۸۰, ***Quintic spline solutions of boundary value problems***, Comput. Math. Appl., ۶, ۱۹۷-۲۰۳.

[۱۷] Usmani, R.A., ۱۹۸۷, ***Applied linear algebra***, Marcel Dekker, New York.