



Frequency analysis of floods with joint functions, case study: Zayandehrood Dam

Zahra Valaei Esfahani, Fatemeh Valaei Esfahani, Mehran Iranpoor

¹ MS of Aqiq non-profit institute, Shahinshahr, Iran.

² Senior Expert in Water Resources Management, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

³ Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Lanjan Branch, Islamic Azad University, Isfahan, Iran.

Corresponding author email: Valaei.esf@gmail.com

© The Author(s) 2023

Received: 23 Aug 2023

Accepted: 12 Oct 2023

Published: 14 Oct 2023

Abstract

Analyzing the frequency of floods and understanding the probability of their occurrence, as well as the return period of this phenomenon, is crucial for reservoir management. Flood occurrences are inherently multivariate, and the use of classical multivariate functions for their analysis is limited. Therefore, it is recommended to employ copula functions for multivariate flood frequency analysis. These functions combine the distribution functions of univariate variables while considering the correlation between them. In the case of this phenomenon, the variables of peak discharge, flood volume, and flood duration are utilized. This study was conducted using statistical data from the Zayandehrood dam. The best function for each variable was determined based on goodness-of-fit criteria. The correlation between each pair of variables was calculated, and the copula function was selected using Akaike, NSE, and RMSE criteria. For the peak discharge-flood volume relationship, Joy's copula function was chosen, while the peak discharge-flood duration and flood volume-flood duration relationships used the AMH function. Subsequently, the univariate and combined return periods were calculated and can be used for risk estimation.

Key words: Conditional probabilities, Bivariate frequency analysis, Copula functions, Bivariate return period, Zayandeh Rood Dam



تحلیل فراوانی دومتغیره سیلاب با استفاده از توابع مفصل، مطالعه موردی: سیلاب‌های ورودی به سد زاینده‌رود

زهرا ولائی اصفهانی^۱، فاطمه ولائی اصفهانی^{۲*}، مهران ایران‌پور^۳

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد مؤسسه غیرانتفاعی عقیق، شاهین‌شهر، ایران.

۲. کارشناس ارشد مدیریت منابع آب، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران.

۳. استادیار گروه مهندسی عمران، واحد لنجان، دانشگاه آزاد اسلامی، اصفهان، ایران.

*ایمیل نویسنده مسئول: Valaei.esf@gmail.com

© The Author(s) 2023

چاپ: ۱۴۰۲/۰۷/۲۲

پذیرش: ۱۴۰۲/۰۷/۲۰

دریافت: ۱۴۰۲/۰۶/۰۱

چکیده

تحلیل فراوانی سیل و اطلاع داشتن از احتمال وقوع و دوره بازگشت این پدیده در چگونگی بهره‌برداری از مخزن حائز اهمیت است. این پدیده، ذاتاً چند متغیره است و استفاده از توابع چند متغیره کلاسیک برای تحلیل این پدیده با محدودیت همراه است. بنابراین توصیه شده است که از توابع کاپولا جهت تحلیل فراوانی چند متغیره سیلاب استفاده شود. این توابع با در نظر گرفتن نوع همبستگی متغیرها از تابع توزیع تک متغیره تابع توزیع توأم می‌سازد. معمولاً برای تحلیل فراوانی سیلاب از متغیرهای دبی اوج، حجم و تداوم سیلاب استفاده می‌شود. این مطالعه بر روی ۵۲ سال داده آماری ورودی سد زاینده‌رود واقع در استان اصفهان انجام شده است. جهت برازش تابع توزیع حاشیه‌ای مناسب از معیارهای نیکویی برازش مانند آزمون‌های کلموگروف اسمیرنوف، اندرسون دارلینگ و کای مربع بر روی هر یک از متغیرهای دبی اوج، حجم و تداوم سیلاب استفاده شده است و به ترتیب توابع گوسین، نمایی، پارتو بر روی داده‌ها برازش داده شده است. سپس، همبستگی هر جفت متغیر به روش‌های پیرسون، اسپیرمن و کندال تاو محاسبه شده است و پارامتر تابع کاپولا با روش حداکثر درستنمایی محاسبه شده است و در نهایت تابع کاپولا بر اساس معیار آکائیکه، NSE و RMSE انتخاب شده است. برای دبی پیک-حجم سیلاب تابع کاپولا جو و برای دبی پیک-تداوم و حجم سیلاب-تداوم تابع علی-میکائیل-حق انتخاب شده است. پس از آن، دوره بازگشت تک متغیره و توأم به‌دست آمده با هم مقایسه شده و نمایش داده شده است از این نتایج می‌توان برای برآورد ریسک سیلاب استفاده کرد.

کلمات کلیدی: احتمالات شرطی، تحلیل فراوانی دو متغیره، توابع کاپولا، دوره بازگشت دو متغیره، سد زاینده رود

۱- مقدمه

سیل یکی از مهم‌ترین بلایای طبیعی در جهان است که سالانه منجر به خسارات مالی و جانی زیادی می‌شود. بیش از نیمی از خسارات سیل در جهان در آسیا رخ می‌دهد. عوامل طبیعی و انسانی زیادی می‌تواند باعث پدیدار شدن این واقعه شود که از بین آن‌ها می‌توان به بارندگی شدید، جزر و مد، استفاده نامناسب از زمین، جنگل‌زدایی و ... اشاره کرد. تحلیل فراوانی سیلاب اطلاعات مفیدی راجع به بزرگی و احتمال وقوع سیل با دوره بازگشت‌های متفاوت را فراهم می‌کند، بنابراین در مدیریت منابع آب به خصوص مدیریت مخازن لازم است که با تحلیل فراوانی سیلاب به این اطلاعات دست یافت تا بتوان خسارات سیل را کاهش داد و استفاده از آورد سیل را به حداکثر رساند و ریسک کمبود آب در زمان کم‌آبی را کاهش داد (Samantaray & Sahoo 2020). فرایندهای زیست محیطی و هیدرولوژیکی مانند سیل با بیش از یک متغیر تصادفی همبسته مشخص می‌شوند. این وقایع پیچیده، چندمتغیره هستند و برای تحلیل فراوانی آن‌ها باید از توابع چندمتغیره کمک گرفت، بنابراین استفاده از توابع کلاسیک تک‌متغیره در بسیاری از موارد محدودکننده هستند و باعث دست بالا یا دست پایین گرفتن نتایج می‌شوند. از طرفی در توابع توزیع چند متغیره کلاسیک فرض بر این است که هر یک از متغیرهای تصادفی دارای یک نوع توزیع احتمال حاشیه‌ای مشابه باشند، متغیرها از توزیع نرمال پیروی می‌کنند و متغیرها مستقل فرض می‌شوند. در صورتی که در واقعیت این مفروضات لزوماً صحیح نیستند (Zhang & Singh 2006). بنابراین توصیه شده است که از توابع کاپولا جهت ساخت تابع توزیع توأم استفاده شود. تا کنون تحقیقات زیادی با استفاده از توابع کاپولا بر روی وقایع هیدرولوژیک انجام شده است. از این بین می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. (Shiau (2006) برای تحلیل فراوانی خشکسالی از دو متغیر شدت خشکسالی و تداوم خشکسالی از هفت تابع کاپولا خانواده ارشمیدسی بر روی یک منطقه در جنوب تایوان استفاده کردند و پارامترهای توابع کاپولا را بر اساس روش گشتاورها محاسبه کردند. (Zhang & Singh (2007) از توابع کاپولا برای تحلیل فراوانی بارش با سه متغیر شدت، مدت، عمق بارش برای داده‌های بارش ساعتی در حوضه رودخانه آمیت لوئیزیانا استفاده کردند و نتایج آن را با توابع کلاسیک چند متغیره مقایسه کردند. تابع گامبل-هوگارد به عنوان بهترین تابع بر اساس معیار آکائیکه انتخاب شد. نتایج نشان می‌دهد که تابع کاپولا سه متغیره بهتر از تابع توزیع نرمال سه متغیره عمل می‌کند. (Reddy & Ganguli (2012) برای تحلیل فراوانی جریان رودخانه گداواری در هند از یک روش مبتنی بر توابع کاپولا استفاده کردند. ایشان با استفاده از توابع ارشمیدسی متغیرهای دبی پیک سالانه، حجم سیل و تداوم سیل را تجزیه و تحلیل کردند. برای تعیین بهترین تابع احتمال حاشیه‌ای، توزیع احتمال‌های پارامتری و ناپارامتری مورد بررسی قرار گرفت و بهترین مدل برای برازش تابع کاپولا انتخاب شد. چهار خانواده تابع ارشمیدسی علی-میکائیل-حق، کلایتون، گامبل-هوگارد و فرانک برای مدل‌سازی ساختار وابستگی دبی-حجم و حجم-تداوم استفاده شده که از این بین تابع فرانک بر اساس آزمون‌های آماری استاندارد بهترین نتیجه را ارائه داد. ۵۸ رویداد سیل به روش حداکثر سالانه در یکی از ایستگاه‌های رودخانه ساوا در اسلوونی توسط Sraj et al. (2015) مورد بررسی قرار گرفت. متغیرهای دبی، حجم، تداوم سیلاب از روی هیدروگراف داده‌های تاریخی استخراج شد و توابع مختلفی از خانواده کاپولا مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج مقایسه بر اساس معیارهای آماری و گرافیکی نشان می‌دهد که تابع گامبل-هوگارد مناسب‌ترین تابع برای متغیرهای دبی و حجم است و تابع مفصل Student-t بهترین عملکرد را برای توزیع مشترک دبی و تداوم سیلاب دارد. روابط بین احتمالات شرطی و دوره بازگشت توأم محاسبه و مقایسه شده که تفاوت قابل توجهی را بین توابع کاپولا نشان می‌دهد. (Zhou et al. (2019) یک رویکرد یکپارچه برای برآورد رسیک مخزن با توابع کاپولا پیشنهاد دادند. در این مقاله با سناریوهای مختلف به بررسی تحلیل فراوانی سیلاب و ریسک بهره‌برداری از سد پرداختند و چگونگی عملکرد این سناریوها بر تحلیل فراوانی سیل در مخزن میشان چین را در نظر گرفتند. مجموعه‌ای از هیدروگراف‌های سیل با احتمال وقوع ۰/۰۱ تحت توابع کاپولا ساخته شد و خطرات سیل بالادست و پایین‌دست برای هر سناریو محاسبه شد. مقایسه بین خطرات سیل در تحلیل

فراوانی تک متغیره و دو متغیره نشان داد که تحلیل فراوانی سیل دو متغیره تنوع کمتری در نتایج ایجاد می‌کند، بنابراین نتایج توابع کاپولا در ارزیابی ریسک قابل اعتمادتر هستند. (Jafry et al. (2023) برای یافتن بهترین توزیع دو متغیره بین متغیرهای سیل در حوضه رودخانه جوهور، مالزی، از شش مدل تابع کاپولا گاوسین، Student-t، کلایتون، گامبل، فرانک، و جو استفاده کردند. بر روی متغیرهای دبی اوج و حجم سیلاب تابع پیرسون نوع سه برازش داده شده است. بر اساس معیار آکائیکه تابع فرانک بهترین ارتباط را بین دبی و حجم سیلاب برقرار می‌کند. تاکنون مطالعات زیادی بر روی تحلیل فراوانی دو متغیره و سه متغیره سیلاب انجام شده است. (Klaho et al. (2022) تحلیل فراوانی دو و سه متغیره سیلاب را بر روی ۵۵ سال داده حجم و دبی پیک و تداوم سد دز در ایران انجام دادند نتایج نشان داد که دوره بازگشت شرطی دو متغیره به دست آمده برای دوره‌های کوتاه مدت قابل اعتمادتر از دوره بازگشت شرطی سه متغیره است؛ بنابراین در این تحقیق از کاپولا دو متغیره برای تحلیل فراوانی سیلاب استفاده شده است.

این تحقیق جهت تحلیل فراوانی سیلاب بر روی ورودی‌های سد زاینده رود در شهرستان اصفهان انجام شده است و دوره بازگشت تک متغیره و دو متغیره به دست آمده است و نتایج با هم به صورت گرافیکی مقایسه شده است. در این مقاله ابتدا همبستگی بین جفت متغیرهای دبی-پیک-حجم سیلاب، دبی-پیک-تداوم و حجم سیلاب-تداوم بر اساس سه روش تاو کندال، اسپیرمن و پیرسون محاسبه شده است. سپس بر روی هر یک از متغیرها تابع توزیع حاشیه‌ای مناسب برازش داده شده است. پس از آن با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی و معیارهای نکویی برازش تابع مفصل مناسب انتخاب شده است. سپس دوره بازگشت در حالت تک متغیره و دو متغیره برای هر جفت متغیر محاسبه شده است و نتایج آن نمایش داده شده است.

۲- مواد و روش‌ها

۲-۱- منطقه مطالعاتی و داده‌های مورد استفاده

سد زاینده‌رود اصفهان بر روی رودخانه زاینده‌رود اصفهان ساخته شده است. سد ذکر شده در سال ۱۳۴۹ آماده بهره‌برداری قرار گرفت و مختصات جغرافیایی این سد $23^{\circ}30'$ شمالی $50^{\circ}74'$ شرقی است. این سد در فاصله‌ی ۱۱۰ کیلومتری غرب اصفهان در شهرستان چادگان اصفهان واقع شده است (شکل ۱). حداکثر حجم مخزن، ۱۴۷۰ میلیون متر مکعب و حجم مفید آن ۱۰۹۰ میلیون متر مکعب و همچنین مساحت دریاچه سد، ۵۴ کیلومتر مربع در تراز حداکثر است. میانگین بارندگی سالانه در این حوضه ۱۳۰ میلی‌متر است و دما بین ۳ تا ۳۰ درجه سانتیگراد است. میزان تبخیر و تعرق بالقوه ۱۵۰۰ میلی‌متر در سال است. از اهداف ساخت سد زاینده‌رود می‌توان به تولید سالیانه ۲۵۰ میلیون کیلووات ساعت انرژی برق‌آبی، کنترل سیلاب‌های فصلی، تنظیم آب کشاورزی مورد نیاز ۱۰۰ هزار هکتار از اراضی کشاورزی پایین‌دست اشاره کرد. در این مطالعه از داده‌های دبی اوج طی دوره آماری ۵۲ ساله، از سال آبی ۱۳۵۱-۱۳۵۰ به عنوان متغیر تحلیل فراوانی استفاده شده است که بر اساس آن متغیر حجم سیلاب و تداوم سیلاب برای هر سال از روی هیدروگراف روزانه محاسبه شده است.

۲-۲- ارزیابی میزان همبستگی

پیش از استفاده از توابع کاپولا باید میزان همبستگی متغیرها را سنجید تا از این طریق بتوان شدت رابطه بین متغیرها و همچنین نوع رابطه متغیرها که مستقیم یا معکوس است را ارزیابی کرد. محدوده ضرایب همبستگی در بازه +۱ تا -۱ هست. اگر ضریب همبستگی به مثبت یک نزدیک باشد، متغیرها به هم وابستگی مستقیم دارند و اگر به منفی یک نزدیک باشد، متغیرها با هم همبستگی معکوس دارند. در صورتی که این عدد به صفر نزدیک باشد؛ یعنی رابطه معناداری بین متغیرها وجود ندارد و متغیرها

از یکدیگر مستقل هستند. ضرایب همبستگی ناپارامتری کندال تاوو اسپیرمنو ضریب پارامتری پیرسون از معروف‌ترین ضرایب همبستگی هستند که در روابط ۱، ۲ و ۳ نشان داده شده اند (She & Xia, 2018).

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (1)$$

$$\tau = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \text{sgn}((x_i - x_j)(y_i - y_j)) \quad (2)$$

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (3)$$

در روابط بالا n تعداد داده‌های مشاهداتی و sgn تابع علامت و \bar{x} و \bar{y} میانگین حسابی دو متغیر X و Y است.

شکل ۱. موقعیت جغرافیایی حوضه آبریز سد زاینده رود در ایران (Zareian, 2015)



Fig 1. Geographic Location of the Zayandeh Rood Dam Basin in Iran (Zareian, 2015)

۲-۳- برآزش تابع توزیع حاشیه‌ای

هدف از توزیع‌های آماری ارتباط دادن بزرگی وقایع حدی با فراوانی وقوع آنها است؛ بنابراین لازم است که پیش از تحلیل فراوانی دومتغیره سیلاب، بر روی هر یک از متغیرهای سیلاب تابع توزیع حاشیه‌ای مناسب برآزش داده شود. در این مطالعه توابع مختلف بر روی متغیرهای دبی پیک، تداوم و حجم سیلاب برآزش داده شده است و سپس برای انتخاب بهترین تابع توزیع از آزمون‌های کلموگروف اسمیرنوف، اندرسون دارلینگ و کای مربع استفاده شده است.

۲-۴- توابع مفصل

تابع کاپولا یا مفصل یک تکنیک ریاضی انعطاف‌پذیر است که توزیع‌های احتمالاتی تجمعی تک متغیره را ترکیب می‌کند و از ترکیب آنها توزیع‌های احتمال تجمعی چند متغیره می‌سازد. در حقیقت از توابع کاپولا برای ایجاد توزیع‌های توام بر اساس

ترکیب توزیع‌های حاشیه‌ای هر یک از متغیرها در بازه [۰،۱] استفاده می‌شود. توابع مفصل دارای خانواده‌های متعددی هستند. در این مطالعه از توابع خانواده ارشمیدسی استفاده شده است. تابع کاپولا برای دو متغیر تصادفی X و Y که از توزیع حاشیه‌ای دلخواه $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ پیروی می‌کنند، مطابق رابطه (۴) است.

$$F_{X,Y}(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y)) \quad (4)$$

این رابطه نشان می‌دهد که یک تابع کاپولا می‌تواند با کمک توزیع‌های تک‌متغیره، تابع چندمتغیره را توصیف کند. در صورتی که توزیع حاشیه‌ای متغیرها پیوسته باشد، تابع کاپولا متغیرها یک تابع منحصر به فرد است و تابع احتمال مشترک آن‌ها مطابق رابطه (۵) است (Shiau et al., 2006).

$$f_{X,Y}(x,y) = c(F_X(x), F_Y(y))f_X(x)f_Y(y) \quad (5)$$

در این رابطه $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ تابع چگالی احتمال متناظر با $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ هستند. c تابع چگالی احتمال C است و به صورت رابطه (۶)، تعریف می‌شود.

$$c(u,v) = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} \quad (6)$$

در جدول (۱) تعدادی از مشهورترین توابع خانواده ارشمیدسی ذکر شده است.

جدول ۱. توابع مفصل خانواده ارشمیدسی

Table 1. Archimedean copula family functions

فضای پارامتر	رابطه تابع کاپولا	نام توابع
$0 \leq \theta$	$(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$	Clayton
$-1 \leq \theta \leq 1$	$\frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$	Ali-Mikhail-Haq
$\theta \neq 0$	$-\frac{1}{\theta} \ln(1 + \frac{(e^{\theta u} - 1)(e^{\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1})$	Frank
$1 < \theta$	$1 - [1 - \prod_{i=1}^d (1 - (1 - u_i)^\theta)]^{1/\theta}$	Joe
$0 \leq \theta$	$uv \exp(((-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^\theta))^{-\frac{1}{\theta}}$	Galambos
$1 \leq \theta$	$\exp(((-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^\theta))^{-\frac{1}{\theta}}$	Gumble-Hougaard

۲-۵- برآورد پارامتر توابع مفصل و آزمون نیکویی برازش

برای تخمین پارامترهای توابع مفصل روش‌های زیادی وجود دارد. در این مطالعه از روش حداکثر درست‌نمایی برای برآورد پارامتر تابع مفصل استفاده شده است. این روش متداول‌ترین روش پارامتری برای تخمین پارامترهای توابع مفصل شناخته می‌شود. در این روش پارامترهای توزیع حاشیه‌ای تابع مفصل به طور هم‌زمان تخمین زده می‌شوند. به عبارت دیگر حداکثر درست‌نمایی، حاصل ضرب احتمالات برای کلیه داده‌های مشاهده شده است. بنابراین اگر X_1, X_2, \dots, X_n داده‌های مشاهداتی

مستقل از هم باشند و مقدار چگالی احتمال برای $X=x_i$ را $f(x_i)$ در نظر گرفته شود، احتمال اینکه متغیر تصادفی در دسته‌ی مورد نظر اتفاق بیفتد برابر است با $f(x_i)dx$ و احتمال مرکب مطابق رابطه (۷) است.

$$f(x_1)dx f(x_2)dx \dots f(x_n)dx = \prod_{i=1}^n f(x_i)(dx)^n \quad (7)$$

با ثابت در نظر گرفتن طول دسته‌ها (dx)، حداکثر درست‌نمایی مطابق رابطه (۸) است.

$$L = \prod_{i=1}^n f(x_i) \quad (8)$$

برای نیکویی برازش تابع مفصل از معیارهای آکائیکه، معیار نش-ساتکلیف و معیار خطای جذر میانگین مربعات (روابط ۹-۱۱) استفاده شده است. معیار نش-ساتکلیف در بازه (۱ و $-\infty$) قرار دارد و مقدار بیش‌تر از یک نشان‌دهنده عملکرد بهتر این معیار است در حالی که مقادیر منفی نشان‌دهنده ضعف مدل پیش‌بینی است. معیار خطای جذر میانگین مربعات به طور معمول در بازه مثبت قرار دارد. اگر مدل پیش‌بینی دقیق باشد و هیچ خطایی وجود نداشته باشد، این مقدار برابر صفر است. هر چه مقدار این خطا به صفر نزدیک‌تر باشد به این معنی است که دقت مدل پیش‌بینی بیش‌تر بوده است.

$$AIC = N \log(MSE) + 2(p) \quad (9)$$

$$NSE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Q_m^t - Q_o^t)^2}{\sum_{i=1}^n (Q_o^t - \bar{Q}_o)^2} \quad (10)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2} \quad (11)$$

x_i : مقادیر مشاهده شده (واقعی) \hat{x}_i : مقادیر پیش‌بینی شده

MSE: میانگین مربعات خطا P: تعداد پارامترها

Q_m^t : مقادیر پیش‌بینی شده Q_o^t : مقادیر مشاهده شده

\bar{Q}_o : میانگین مقادیر مشاهده شده N: تعداد مشاهدات

۲-۶- دوره بازگشت توأم

تجزیه و تحلیل و بررسی پارامترهای سیلاب درک خوبی از دوره بازگشت این پدیده فراهم می‌کند که به کمک آن می‌توان در زمینه مدیریت مخازن و کاهش ریسک سیلاب برنامه‌ریزی کرد. از آنجایی که در پدیده سیلاب چندین متغیر دخیل است، بهتر است که این ارتباط را به صورت توأم (مشترک) مورد بررسی قرار داد. بنابراین؛ بعد از انتخاب تابع مفصل مناسب در حالت دو متغیره، توابع توزیع تجمعی دو متغیره به دست می‌آید. رابطه (۱۲) احتمال وقوع پدیده را نشان می‌دهد که به کمک آن می‌توان دوره بازگشت دو متغیره را در دو حالت «و» و «یا» با استفاده از روابط (۱۳ و ۱۴) محاسبه کرد. برای دوره بازگشت توأم در حالت «و» اگر $F_{x,y}(x,y) = C(F_x(x), F_y(y))$ آنگاه:

$$P(x \leq X, y \leq Y) = 1 - F_x(x) - F_y(y) + F_{x,y}(x, y) \quad (12)$$

$$T_{x,y}^{and} = \frac{1}{P(x \leq X, y \leq Y)} = \frac{1}{1 - F_x(x) - F_y(y) + F_{x,y}(x, y)} \quad (13)$$

برای دوره بازگشت توأم در حالت «یا» داریم:

$$T_{x,y}^{or} = \frac{1}{1 - F_{x,y}(x, y)} \quad (14)$$

۳- نتایج و بحث

۳-۱- مشخصات آماری و ضریب همبستگی متغیرها

پس از استخراج متغیرها از روی هیدروگراف روزانه سد زاینده رود، مشخصات آماری داده‌ها محاسبه شده است و در جدول (۲) نمایش داده شده است. همچنین همبستگی بین متغیرها بر اساس سه روش کندال تاو، اسپیرمن و پیرسون محاسبه شده است و در جدول (۳) نمایش داده شده است.

جدول ۲. مشخصات آماری داده‌های دبی اوج، حجم سیلاب و تداوم از سال ۱۳۵۰-۵۱ تا ۱۴۰۱-۰۲

Table 2. Statistical characteristics of peak discharge, flood volume, and duration data from 1350-1401 (1971- 2022)

کورتوسیس	چولگی	انحراف معیار	حداکثر	حداقل	میانگین	
4.202	1.878	1.878	788.86	81.3	251.965	دبی اوج (m ³ /s)
-0.081	1.064	1.064	167752.828	1506.35	49351.292	حجم سیلاب (MCM)
-0.85	-0.013	-0.013	170	15	96.980	تداوم سیلاب (day)

جدول ۳. ضرایب همبستگی

Table 3. Correlation coefficients

کندال تاو	اسپیرمن	پیرسون	متغیر
0.054	0.0867	0.0463	دبی اوج- حجم
-0.1674	-0.2236	-0.2739	دبی اوج- تداوم
0.4203	0.5906	0.5405	حجم سیلاب- تداوم

همانطور که از جدول (۳) مشخص است ضریب همبستگی مستقیم و معناداری بین حجم سیلاب و تداوم سیلاب وجود دارد که نشان دهنده وابستگی قوی بین این دو متغیر است و این درحالی است که همبستگی بین دبی اوج و حجم نزدیک به صفر است و این نشان می‌دهد که این دو متغیر از یکدیگر مستقل هستند.

۳-۲- برازش تابع توزیع حاشیه‌ای مناسب

بر روی هریک از متغیرها تابع توزیع مناسب برازش داده شده است و جهت ارزیابی و انتخاب بهترین تابع توزیع حاشیه‌ای از معیارهای کلموگروف اسمیرنوف، اندرسون دارلینگ و کای مربع مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج برازش تابع توزیع حاشیه‌ای منتخب در جدول (۴) قابل مشاهده است.

جدول ۴. برآورد پارامترهای توابع توزیع حاشیه‌ای منتخب

Table 4. Estimated parameters of selected marginal distribution functions

پارامترهای تابع توزیع منتخب				تابع توزیع منتخب		متغیر
μ	λ	k	σ	θ		
251.9656	846.9905				گوسین	دبی اوج
49351.2918	-				نمایی	حجم سیلاب
		-1.0571	163.8524	15	پارتو	تداوم سیلاب

۳-۳- برازش تابع مفصل مناسب

برای تخمین پارامتر تابع مفصل از روش حداکثر درستمایی استفاده شده است و تابع مفصل مناسب با توجه به آزمون نیکویی برازش آکائیکه، RMSE و NSE انتخاب شده است. تابع جو برای جفت متغیر دبی اوج- حجم سیلاب انتخاب شده است و تابع مفصل علی میکائیل حق برای جفت متغیر دبی اوج-تداوم و حجم-تداوم انتخاب شده است. جدول (۵) نتایج انتخاب تابع مفصل را نشان می‌دهد.

جدول ۵. تابع مفصل منتخب و نتایج آزمون نیکویی برازش

Table 5. Selected copula function and goodness-of-fit test results

حجم-تداوم	دبی اوج-تداوم	دبی اوج- حجم سیلاب	
AMH	AMH	Joe	بهترین تابع مفصل
1.0000	-0.4208	1.2314	پارامتر تابع مفصل
0.1834	0.1274	0.1527	RMSE
0.9901	0.9905	0.9918	NSE

۳-۴- تابع کاپولای برازش داده شده و دوره بازگشت توأم

در شکل‌های (۲)، (۳) و (۴) به ترتیب تابع توزیع مشترک که بر اساس تابع توزیع حاشیه‌ای متغیرها به دست آمده است. مطابق با جدول (۵) تابع مفصل انتخاب شده بر روی هر جفت متغیر برازش داده شده است. بر روی جفت متغیرهای دبی اوج- حجم سیلاب تابع جو و بر روی جفت دبی اوج-تداوم و حجم-تداوم تابع علی میکائیل حق برازش داده شده است.

شکل ۲. تابع توزیع مشترک برازش داده شده بر روی دبی پیک - حجم سیلاب با تابع مفصل جو

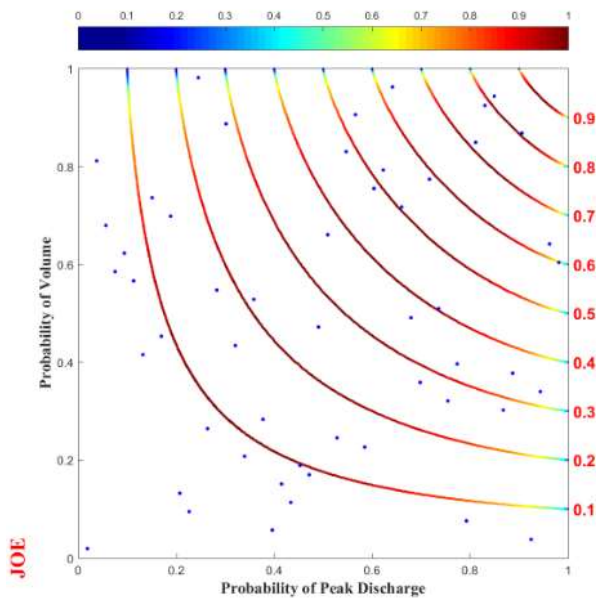


Fig 2. Fitted joint distribution function for peak discharge - flood volume using the Joy Copula

شکل ۳. تابع توزیع مشترک برازش داده شده بر روی دبی پیک - تداوم سیلاب با تابع مفصل علی-میکائیل-حق

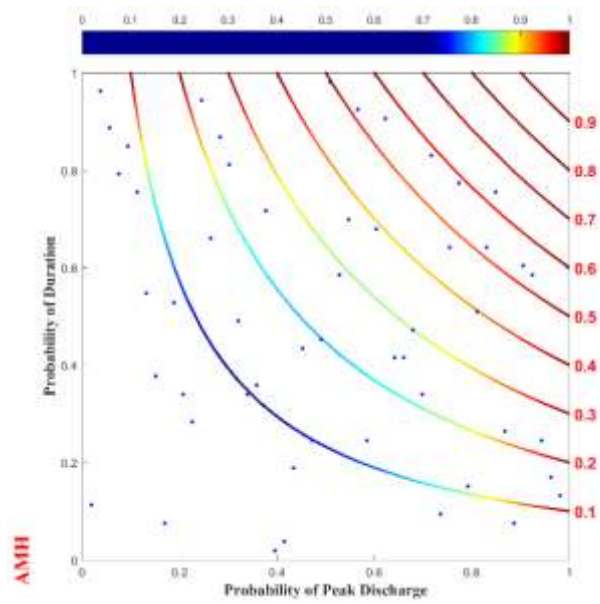


Fig 3. Fitted joint distribution function for peak discharge - flood duration using the Ali-Mikhail-Haq Copula

شکل ۴. تابع توزیع مشترک برازش داده شده بر روی حجم سیلاب - تداوم سیلاب با تابع مفصل علی-میکائیل-حق

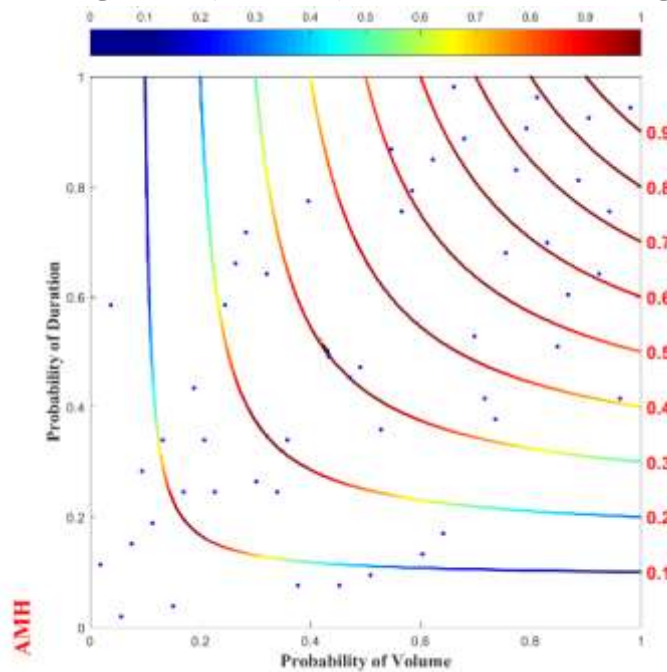


Fig 4. Fitted joint distribution function for flood volume - flood duration using the Ali-Mikhail-Haq Copula

در شکل های (۵)، (۶) و (۷) به ترتیب دوره بازگشت تک متغیره در نمودارهای آبی رنگ و توأم در نمودارهای رنگی برای هر جفت متغیره های دبی اوج- حجم سیلاب، دبی اوج-تداوم و حجم-تداوم بر اساس تابع کاپولا منتخب قابل مشاهده است.

شکل ۵. دوره بازگشت تک متغیره و دو متغیره دبی اوج- حجم سیلاب

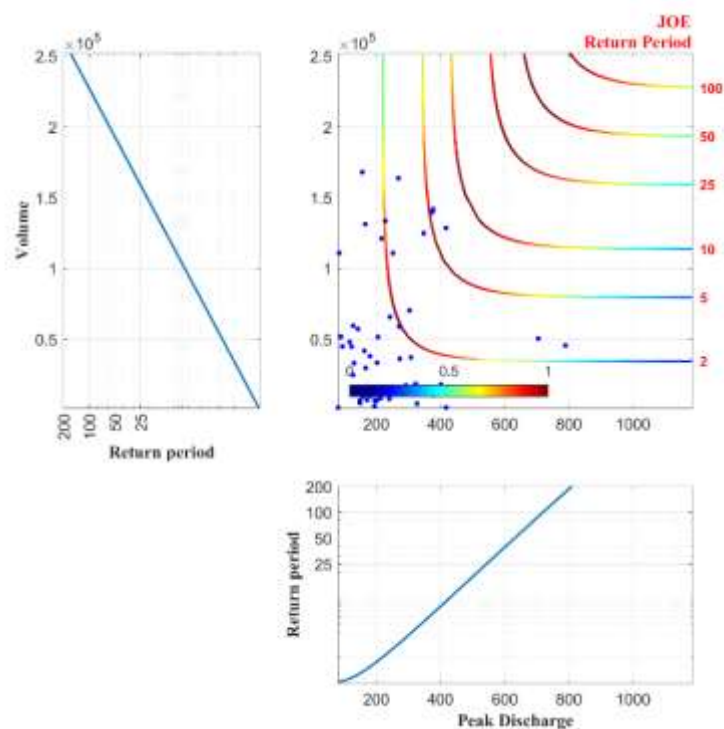


Fig 5. Return periods for single and two-variable peak discharge - flood volume

شکل ۶. دوره بازگشت تک متغیره و دو متغیره دبی اوج- تداوم

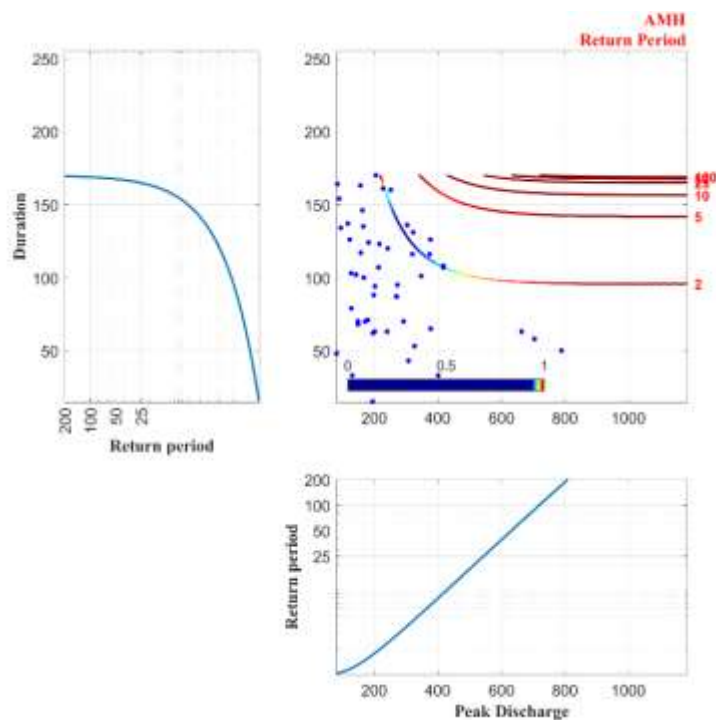


Fig 6. Return periods for single and two-variable peak discharge - flood duration

شکل ۷. دوره بازگشت تک متغیره و دو متغیره حجم سیلاب- تداوم

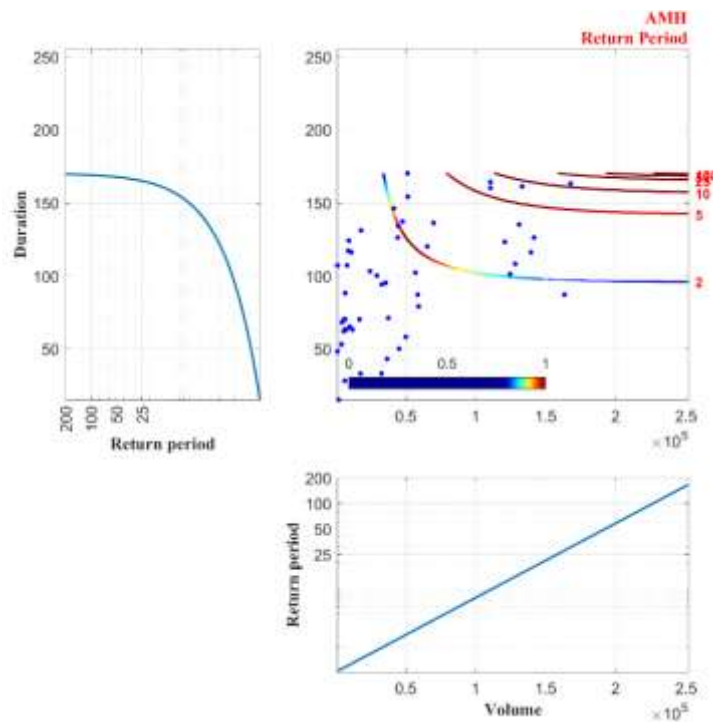


Fig 7. Return periods for single and two-variable flood volume - flood duration

۴- نتیجه‌گیری

در طول تاریخ سیلاب باعث خسارات مالی و جانی فراوانی شده است. بنابراین لازم است که با تحلیل فراوانی سیلاب از احتمال وقوع و دوره بازگشت این پدیده اطلاع داشت. این پدیده چند متغیره است و استفاده از توابع کلاسیک باعث دست بالا گرفتن یا دست پایین گرفتن نتایج می‌شود. بنابراین بهتر است که از توابع مفصل چند متغیره برای تحلیل فراوانی این پدیده استفاده کرد. در این مطالعه تحلیل فراوانی دو متغیره سیلاب با در نظر گرفتن سه متغیره دبی اوج، حجم سیلاب و تداوم سیلاب انجام شد. این مطالعه بر روی ۵۲ سال داده آماری ورودی سد زاینده‌رود از سال آبی ۱۳۵۲-۱۳۵۱ تا ۱۴۰۲-۱۴۰۱ انجام شد. ابتدا همبستگی بین متغیره‌ها بر اساس روش تاو کندال، اسپیرمن و پیرسون اندازه‌گیری شد و نتایج نشان می‌دهد که جفت متغیره دبی اوج و حجم سیلاب همبستگی نزدیک به صفر دارند و بدین معنی است که این دو متغیره از یکدیگر مستقل هستند. در حالی که همبستگی معناداری بین حجم سیلاب و تداوم وجود دارد. بر اساس معیارهای نیکویی برازش بر روی متغیره‌های دبی اوج، حجم و تداوم سیلاب به ترتیب توابع گوسین، نمایی، پارتو برازش داده شده است. تابع کاپولا بر اساس معیار آکائیکه، NSE و RMSE برای هر جفت متغیره انتخاب شده است که این توابع بین توزیع حاشیه‌ای هر یک متغیره‌ها ارتباط برقرار می‌کند و توزیع توأم می‌سازد. برای دبی پیک-حجم سیلاب تابع کاپولا جو و برای دبی پیک-تداوم و حجم سیلاب-تداوم تابع علی-میکائیل-حق انتخاب شده است. پس از آن دوره بازگشت تک متغیره و توأم به دست آمده با هم مقایسه شده و نمایش داده شده است. نتایج حاصل از دوره بازگشت این پدیده نشان می‌دهد که هر چه مقادیر متغیره‌های سیلاب بزرگ‌تر باشند این وقایع حدی‌تر هستند و احتمال وقوع کمتری دارند و این به این معنی است که دوره بازگشت توأم آن‌ها نیز بیشتر خواهد بود. همچنین در مقایسه بین دوره بازگشت تک متغیره و دو متغیره مشخص است که نتایج دوره بازگشت دو متغیره قابل اعتمادتر است و دوره بازگشت تک متغیره معمولاً دست بالا یا دست پایین در نظر گرفته شده است.

۵- تضاد منافع نویسندگان

نویسندگان این مقاله اعلام می‌دارند که هیچ تضاد منفعی در رابطه با نویسندگی و یا انتشار این مقاله ندارند.

۶- منابع

- Jafry, N. A., Suhaila, J., Yusof, F., Nor, S. R. M., & Alias, N. E. (2023, May). Bivariate copula for flood frequency analysis in Johor river basin. In IOP Conference Series: *Earth and Environmental Science* (Vol. 1167, No. 1, p. 012018). IOP Publishing.
- Klaho, M. H., Safavi, H. R., Golmohammadi, M. H., & Alkntar, M. (2022). Comparison between bivariate and trivariate flood frequency analysis using the Archimedean copula functions, a case study of the Karun River in Iran. *Natural Hazards*, 112(2), 1589-1610.
- Reddy, M. J., & Ganguli, P. (2012). Bivariate flood frequency analysis of upper Godavari River flows using Archimedean copulas. *Water Resources Management*, 26(14), 3995-4018.
- Samantaray, S., & Sahoo, A. (2020). Estimation of flood frequency using statistical method: Mahanadi River basin, India. *H₂ Open Journal*, 3(1), 189-207.
- She, D., & Xia, J. (2018). Copulas-based drought characteristics analysis and risk assessment across the Loess Plateau of China. *Water Resources Management*, 32, 547-564.
- Shiau, J. T., Wang, H. Y., & Tsai, C. T. (2006). Bivariate frequency analysis of floods using copulas1. *Journal of the American Water Resources Association*, 42(6), 1549-1564.
- Shiau, J. T. (2006). Fitting drought duration and severity with two-dimensional copulas. *Water Resources Management*, 20, 795-815.
- Sraj, M., Bezak, N., & Brilly, M. (2015). Bivariate flood frequency analysis using the copula function: a case study of the Litija station on the Sava River. *Hydrological Processes*, 29(2), 225-238.
- Zhang, L., & Singh, V. P. (2007). Trivariate flood frequency analysis using the Gumbel–Hougaard copula. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4), 431-439.
- Zhang, L. S. V. P., & Singh, V. P. (2006). Bivariate flood frequency analysis using the copula method. *Journal of hydrologic engineering*, 11(2), 150-164.
- Zhou, T., Liu, Z., Jin, J., & Hu, H. (2019). Assessing the impacts of univariate and bivariate flood frequency approaches to flood risk accounting for reservoir operation. *Water*, 11(3), 475.