



Stiffness Analysis of Leaf Springs Using Multi-Point Constraints (MPC)

Alireza Arghavan^{1,2}

1- Department of Mechanic, Semnan Branch, **Islamic Azad University**, Semnan, Iran

2- Energy and Sustainable Development Research Center, Semnan Branch, **Islamic Azad University**, Semnan, Iran

P.O.B. 35145-179 Semnan, Iran, ar.arghavan@iau.ac.ir

Article Information

Original Research Paper

Received 15 September 2025

Accepted 28 October 2025

Available Online 09

January 2026

Keywords

spring stiffness

Leaf Spring

Static Analysis

Multi-Point Constraints

ABSTRACT

The leaf spring is a critical component of vehicle suspension systems, widely used in heavy-duty, off-road, and pickup vehicles, where it plays a key role in vibration control and load transmission. Accurate determination of spring stiffness is essential for both dynamic and static analyses of suspension systems. In this study, a six-layer leaf spring with varying lengths and a constant semi-elliptical cross-section was modeled in Patran using 113 beam elements. Instead of using contact elements between the layers, a multi-point constraint (MPC) sliding approach was applied to reduce the complexity of the analysis. Laboratory boundary conditions were implemented, and a load was applied at the midpoint of the spring. The spring stiffness was then computed using linear static analysis in Nastran. Comparison with experimental results demonstrated that the MPC sliding method can effectively replace contact elements with acceptable accuracy. This approach not only significantly reduces computational time but also enables straightforward linear static analyses and stress evaluations in spring attachments.

Please cite this article using:

Alireza Arghavan, Stiffness Analysis of Leaf Springs Using Multi-Point Constraints (MPC), *Journal of Mechanical Engineering and Vibration*, Vol. 16, No. 3, pp. 28-34, 2025 (In Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:



تحلیل سفتی فنر تخت با استفاده از قیود چند نقطه‌ای (MPC)

علی رضا ارغوان^{۱*}

۱- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد سمنان، دانشگاه آزاد اسلامی، سمنان، ایران

۲- استادیار، مرکز تحقیقات انرژی و توسعه پایدار، واحد سمنان، دانشگاه آزاد اسلامی، سمنان، ایران

سمنان، ۱۷۹-۳۵۱۴۵، ar.arghava@iau.ac.ir

اطلاعات مقاله

چکیده

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۲۴ شهریور ۱۴۰۴

پذیرش: ۶ آبان ۱۴۰۴

ارائه در سایت: ۱۹ دی ۱۴۰۴

کلیدواژگان

سفتی فنر

فنر تخت

آنالیز استاتیکی

قیود چند نقطه‌ای

فنر تخت یکی از اجزای کلیدی سیستم تعلیق خودروها است که عمدتاً در خودروهای سنگین، بیابانی و وانت‌ها استفاده می‌شود و نقش مهمی در کنترل ارتعاشات و انتقال نیرو دارد. تعیین دقیق سفتی فنر برای تحلیل دینامیکی و استاتیکی سیستم تعلیق ضروری است. در این مطالعه، یک فنر تخت شش لایه با طول‌های متفاوت و سطح مقطع ثابت از نوع نیم‌بیضی، در نرم‌افزار پترن با استفاده از ۱۱۳ المان تیر مدل‌سازی شده است. به جای استفاده از المان تماس بین لایه‌ها، قیود چندنقطه‌ای لغزش بکار رفت تا پیچیدگی تحلیل کاهش یابد. شرایط مرزی آزمایشگاهی و بارگذاری نیرو در وسط فنر اعمال و سفتی فنر با استفاده از تحلیل استاتیکی خطی در نرم‌افزار نسترن محاسبه گردید. نتایج شبیه‌سازی با داده‌های آزمایشگاهی مقایسه شد و نشان داد که استفاده از قیود چندنقطه‌ای با دقت قابل قبولی جایگزین المان تماس می‌شود. این روش علاوه بر دقت مناسب، زمان تحلیل را به‌طور چشمگیری کاهش داده و امکان انجام آنالیزهای استاتیکی و بررسی تنش در اتصالات فنر را فراهم می‌سازد.

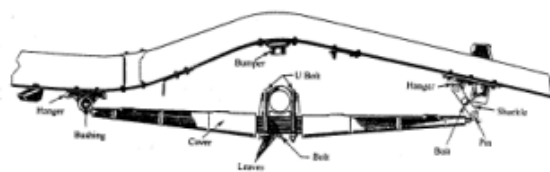
۱-مقدمه

سامانه تعلیق خودرو نقش اساسی در بهبود راحتی، ایمنی و پایداری حرکتی ایفا می‌کند. یکی از اجزای کلیدی این سامانه، فنرها هستند که وظیفه جذب ارتعاشات ناشی از ناهمواری‌های جاده و انتقال مناسب بار را بر عهده دارند. در میان انواع فنرهای به‌کاررفته در خودروها، فنرهای تخت به دلیل استحکام بالا و قابلیت تحمل بار زیاد، به‌طور گسترده در خودروهای بیابانی، شاسی‌بلندها و وسایل نقلیه سنگین استفاده می‌شوند. این نوع فنرها عمدتاً در سیستم‌های تعلیق یکپارچه به کار گرفته می‌شوند و طراحی بهینه آن‌ها می‌تواند عملکرد کلی خودرو را به‌طور چشمگیری ارتقا بخشد [۱]. از آنجا که میزان سختی و تغییرشکل‌پذیری فنر نقش مهمی در کیفیت عملکرد سامانه تعلیق دارد، مطالعات متعددی در زمینه تحلیل رفتار فنرهای تخت انجام شده است. اولی [۲] از نخستین پژوهشگرانی بود که فنر تخت را به‌صورت تیر یک‌سر گیردار مدل‌سازی کرده و خیز

آن را تحت بارگذاری محاسبه نمود. نیاشین و همکاران [۳] با در نظر گرفتن تماس میان لایه‌ها و صرف‌نظر از اصطکاک، رویکردی تحلیلی برای محاسبه خیز ارائه دادند. در ادامه، اسکرات و پاسزک [۴] با بهره‌گیری از مدل‌سازی سه‌بعدی نرم‌افزاری، رفتار فنر تخت را شبیه‌سازی کردند. در این مدل، تماس بین لایه‌ها لحاظ شده ولی اصطکاک نادیده گرفته شد. نتایج به‌دست‌آمده از این تحلیل‌ها با داده‌های تجربی و آزمایشگاهی مقایسه و اعتبارسنجی گردید. در پژوهش دیگری توسط ژانگ و همکاران [۵]، رفتار مکانیکی فنر تخت تحت بارگذاری واقعی با استفاده از روش تحلیل عددی مورد بررسی قرار گرفت. در این تحقیق، فنر به‌صورت مدل سه‌بعدی شبیه‌سازی شد و نتایج حاصل از شبیه‌سازی با داده‌های آزمایشگاهی مقایسه گردید. یافته‌ها نشان داد که مدل‌سازی عددی می‌تواند با دقت بالایی مقدار سفتی واقعی فنر را پیش‌بینی کند. همچنین مشخص شد که در نظر گرفتن تماس میان لایه‌ها و شرایط واقعی تکیه‌گاه‌ها نقش مهمی در تعیین سفتی مؤثر فنر دارد. در پژوهش دیگری که توسط لی

و همکاران [۶] انجام شد، اثر پیش‌تنش مونتاژی بر سفتی فنر تخت مورد بررسی قرار گرفت. در فرآیند مونتاژ، بین لایه‌های فنر تنش‌های اولیه‌ای ایجاد می‌شود که این تنش‌ها باعث تغییر در رفتار کلی فنر و میزان سفتی آن می‌شوند. نتایج این پژوهش نشان داد که با در نظر گرفتن پیش‌تنش در مدل، میزان سفتی به‌دست‌آمده تطابق بیشتری با نتایج آزمایشگاهی دارد و بی‌توجهی به این عامل می‌تواند منجر به خطا در طراحی شود. در ادامه، چن و همکاران [۷] به بررسی فنرهای تخت با ضخامت متغیر پرداختند. در این پژوهش، فنرهایی با مقطع غیر یکنواخت طراحی و مورد تحلیل قرار گرفتند تا اثر تغییر تدریجی ضخامت بر سفتی و توزیع تنش بررسی شود. نتایج نشان داد که کاهش تدریجی ضخامت در طول فنر، باعث توزیع یکنواخت‌تر تنش و بهبود عملکرد دینامیکی سامانه تعلیق می‌شود. این یافته‌ها مسیر تازه‌ای برای طراحی فنرهای تخت با سفتی متغیر متناسب با شرایط کاری خودرو فراهم کرد.

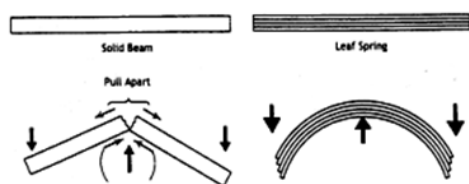
با توجه به اهمیت بهبود دقت مدل‌سازی و تحلیل فنرهای تخت، همچنان نیاز به پژوهش‌های تکمیلی در این حوزه وجود دارد تا بتوان طراحی کارآمدتر و دقیق‌تری برای سیستم‌های تعلیق خودرو ارائه کرد.



شکل ۱ ساختار فنر تخت [۱]

۳- چندلایه سازی فنرهای تخت و تماس بین آنها

در طراحی فنر تخت، هدف اصلی افزایش ظرفیت تحمل بار خمشی است. اگر تیغه‌ها از جنس نرم انتخاب شوند، فنر در زیر بار دچار خمش قابل‌توجه می‌شود و کارایی مکانیکی آن کاهش می‌یابد. از این رو، استفاده از مواد سخت برای تیغه‌ها ضروری است. با این حال، برای ارتقای مقاومت فنر در برابر خمش و توزیع یکنواخت تنش‌ها، فنرها معمولاً به صورت چندلایه ساخته می‌شوند. افزایش تعداد لایه‌ها علاوه بر افزایش ظرفیت تحمل بار خمشی، موجب بهبود مقاومت در برابر تنش‌های برشی نیز می‌شود. این اثر در شکل (۲) به وضوح نشان داده شده است.



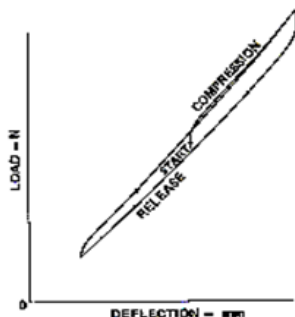
شکل ۲ تأثیر چند لایه سازی فنر تخت بر شکست آن [۱]

۲- فنرهای تخت

فنر تخت به‌عنوان یکی از اجزای اصلی سیستم تعلیق خودرو، در هر دو محور جلو و عقب مورد استفاده قرار می‌گیرد. این فنرها علاوه بر آرایش طولی، در برخی موارد به‌صورت عرضی نیز به کار گرفته می‌شوند؛ به‌گونه‌ای که در این حالت بخش میانی فنر به شاسی متصل شده و هر یک از دو انتهای آن وظیفه نگهداری یک چرخ را بر عهده دارد. عملکرد مکانیکی فنر تخت به نحوی است که هنگام برخورد چرخ با ناهمواری‌های جاده، با تغییر شکل به سمت بالا انرژی ضربه را جذب کرده و در شرایط ورود چرخ به فرورفتگی، با انحراف به سمت پایین، پایداری حرکتی خودرو را حفظ می‌کند. بدین ترتیب، فنر تخت رفتاری مشابه فنرهای مارپیچی از خود نشان می‌دهد. به منظور کاهش انتقال ارتعاشات به بدنه، این نوع فنرها عموماً از طریق اجزای واسطه‌ای همچون بالشتک‌ها و بوش‌های لاستیکی از اسکلت اصلی خودرو جدا می‌شوند.

فنرهای تخت غالباً به صورت چندلایه طراحی می‌گردند. بزرگ‌ترین لایه در این مجموعه که به شاه‌فنر موسوم است، وظیفه اصلی تحمل بار را بر عهده دارد و سایر لایه‌ها با ابعاد

شده است تا ضربه‌ای بین لایه‌ها ایجاد نشود تا اثرات اصطکاک به‌طور واقعی و بدون اغتشاش ناشی از ضربه، مورد اندازه‌گیری قرار گیرد.



شکل ۳ منحنی فنر خاص در سرعت پایین بدون ایجاد ضربه [۸]

همانطوریکه دیده می‌شود در هر خیز معین، یک حد بالا و یک حد پایین برای نیروی اصطکاک بدست می‌آید که بستگی به جهت حرکت دارد. چنانچه مشاهده می‌شود هنگامیکه نیروی فشاری به فنر اعمال می‌شود حد بالایی اصطکاک در نظر گرفته می‌شود و زمانی که نیرو به سمت پایین و فنر آزاد می‌شود اصطکاک بین لایه‌ها افت کرده و به حد پایین می‌رسد. در فنرهای، تخت پارامتری بنام ضریب اصطکاک تعریف می‌شود که عبارتند از نیروی اصطکاک تقسیم بر بار متوسط که منظور از نیروی اصطکاک میانگین بین حد بالا و حد پایین اصطکاک است و منظور از بار متوسط، میانگین بار فشاری و بار کششی (آزاد کننده) اعمال به فنر می‌باشد. ضریب اصطکاک با استفاده از آزمایشاتی که در سرعت‌های پایین انجام می‌شود تعیین می‌گردد و ممکن است حداکثر به یک برسد. برای رسیدن به ضریب اصطکاک کم، باید تماس بین لایه‌ها را نرم کرد. برای این منظور انتهای لایه‌ها را بصورت نازک می‌سازند و بین لایه‌ها را نیز روغن کاری می‌کنند. با این شرایط ضریب اصطکاک به ۰.۲ تا ۰.۵ می‌رسد. ولی با آلوده شدن فنرها، ضریب اصطکاک افزایش می‌یابد [۵].

۵- استفاده از قیود چند نقطه‌ای 'بجای تماس

با توجه به تماس بین لایه‌های فنر و غیرخطی بودن رفتار آن، تحلیل دقیق مسئله معمولاً به صورت غیرخطی انجام می‌شود که این امر می‌تواند محاسبات را پیچیده کرده و نیاز به حافظه و

یکی دیگر از دلایل استفاده از طراحی چندلایه برای فنر تخت، توزیع بهینه تنش‌ها در تیغه‌ها است. در واقع، بیشینه تنش در مرکز تیر رخ می‌دهد، در حالی که در دو انتهای تیر، مقدار تنش به حداقل می‌رسد. این رفتار را می‌توان با رابطه (۱) به صورت ریاضی بیان کرد:

$$\sigma = \frac{MC}{I} \quad (1)$$

با توجه به اینکه تنش در مرکز تیر بیشینه است، طراحی تک‌لایه نمی‌تواند به طور مؤثر تنش را تحمل کند و منجر به افزایش خطر شکست زودرس می‌شود. بنابراین، چندلایه‌سازی تیغه‌ها باعث می‌شود که تنش‌ها به صورت یکنواخت‌تر توزیع شوند و ظرفیت باربری خمشی فنر به طور قابل توجهی افزایش یابد. این ویژگی یکی از مزایای مهم فنر تخت نسبت به سایر انواع فنرها محسوب می‌شود و عملکرد آن را در سامانه تعلیق خودرو بهبود می‌بخشد. به منظور دستیابی به توزیع یکنواخت تنش در طول تیر، سطح مقطع فنر معمولاً به صورت غیر یکنواخت طراحی می‌شود. همان‌طور که در شکل (۲) مشاهده می‌شود، تماس بین لایه‌های فنر وجود دارد که این عامل به طور قابل توجهی رفتار غیرخطی فنر را تحت بارگذاری‌های عملیاتی ایجاد می‌کند. علاوه بر تماس بین لایه‌ها، وجود اصطکاک میان آن‌ها نیز بر پاسخ دینامیکی فنر تأثیرگذار است و به همین دلیل تحلیل دقیق فنر نیازمند در نظر گرفتن این اثرات غیرخطی است. در بخش‌های بعدی، به بررسی نقش اصطکاک و نحوه مدل‌سازی آن پرداخته شده است.

۴- اصطکاک در فنرهای تخت

نیروی اصطکاک میان لایه‌های فنر تخت را می‌توان به عنوان نیرویی در جهت مخالف حرکت نسبی لایه‌ها مدل‌سازی کرد. در خودروهای سنگین که از فنرهای تخت چندلایه استفاده می‌شود، این اصطکاک به عنوان عامل جذب ارتعاشات عمل می‌کند و نقش فنرهای کمکی را کاهش می‌دهد. با این حال، در خودروهای سبک‌تر مانند خودروهای بیابانی و وانت‌ها، مقدار نیروی اصطکاک بین لایه‌ها تحت تأثیر عوامل متعددی از جمله خواص سطح تماس، نیروی اعمالی به فنر و سرعت نسبی لغزش لایه‌ها قرار می‌گیرد [۸].

شکل (۳) منحنی تجربی رابطه بین خیز فنر و نیروی اصطکاک را در سرعت‌های پایین نمایش می‌دهد. در این منحنی، تلاش

جدول ۱ مشخصات مربوط به لایه های فنر تخت و ضخامت های آن

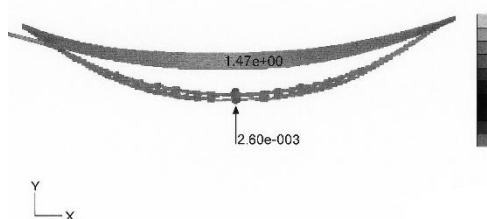
شماره لایه	طول (mm)	ضخامت (mm)
۱	۱۲۰۵	۶
۲	۱۳۵۵	۷
۳	۱۰۱۰	۷
۴	۷۲۰	۷
۵	۵۲۰	۷
۶	۳۳۰	۷

لایه‌های فنر با استفاده از المان تیر و با سطح مقطع مستطیلی به عرض ۷۰ میلی‌متر و ضخامت ۷ میلی‌متر مدل‌سازی شده‌اند و کل مجموعه لایه‌ها شامل ۱۱۳ المان تیر می‌باشد. برای شبیه‌سازی تماس بین لایه‌ها، به جای استفاده از المان تماس، رفتار لغزش بین آن‌ها در نظر گرفته شده است.

شرایط مرزی مطابق شرایط آزمایشگاهی که در بخش بعد توضیح داده خواهد شد تعریف شده است؛ به‌گونه‌ای که یک سمت فنر ثابت و تنها گشتاور حول مرکز چشمی در آن آزاد است، در سمت دیگر به صورت ریلی فنر اجازه حرکت دارد. محل اعمال بار نیز همان نقطه‌ای است که فنر به محور (اکسل) متصل می‌شود. جنس لایه‌های فنر از فولاد با مدول یانگ ۲۰۵ گیگا پاسکال و ضریب پواسون ۰.۳ در نظر گرفته شده است. حال با استفاده از تحلیل استاتیکی خطی در نرم‌افزار نستر، نتایج حاصل شده‌اند.

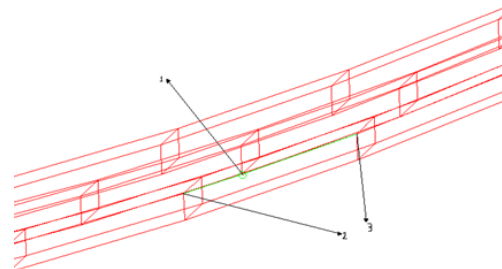
۷- نتایج

شکل ۶ خیز محل اعمال نیرو را به ازای بار ۲۰۰۰ نیوتن نشان می‌دهد که معادل ۳۷.۴ میلی‌متر می‌باشد. حال برای چند بار مختلف این کار را انجام شده و نمودار جابجایی بر حسب نیروی اعمالی بدست آمده است. نمودار شکل ۷ نیرو بر حسب جابجایی را نشان می‌دهد.



شکل ۶ خیز تیر با اعمال شرایط آزمایشگاهی

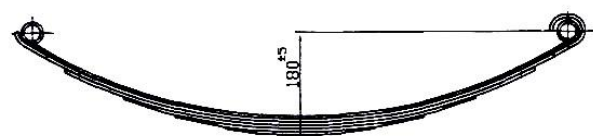
زمان زیادی داشته باشد. برای ساده‌سازی تحلیل، استفاده از قیود چندنقطه‌ای پیشنهاد می‌شود. با این روش، مسئله می‌تواند به صورت خطی تحلیل شود و علاوه بر کاهش زمان تحلیل، نیاز حافظه نیز کاهش می‌یابد. نوع قید به کار رفته، قید لغزش است. برای تعریف این قید در نرم‌افزار پترن، ابتدا دو المانی که با هم در تماس هستند شناسایی می‌شوند. سپس گره‌هایی که بین دو گره از سطح دیگر تماس پیدا کرده و پس از بارگذاری شروع به لغزش می‌کنند، مشخص شده و لغزنده بین آن‌ها تعریف می‌شود. همان‌طور که در شکل (۴) نشان داده شده است، گره ۱ بین دو گره ۲ و ۳ لغزش می‌کند. در این حالت، گره ۱ به‌عنوان گره وابسته و گره‌های ۲ و ۳ به‌عنوان گره‌های مستقل تعریف می‌شوند. پس از تعیین تمامی لغزنده‌ها، می‌توان با استفاده از تحلیل استاتیکی خطی مسئله را به‌طور نسبتاً دقیق تحلیل کرد.



شکل ۴ تعریف لغزش بین گره ۱، ۲ و ۳

۶- مدل‌سازی و تحلیل المان محدود فنر تخت

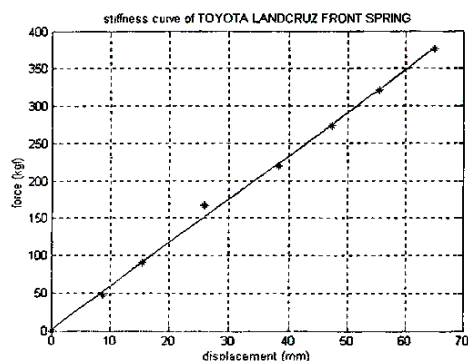
شکل ۵ فنر تخت استفاده شده جهت مدل‌سازی در نرم‌افزار پترن را نشان می‌دهد.



شکل ۵ فنر تخت با کمبر ۱۸۰ در حالت آزاد

جدول ۱ مشخصات مربوط به هریک از لایه ها را نشان می‌دهد.

با استفاده از داده‌های به‌دست‌آمده از نیرو و جابجایی، منحنی نیرو بر حسب جابجایی فنر در نرم‌افزار متلب ترسیم شده است. نمودار حاصل در شکل (۹) ارائه شده و روند تغییرات نیرو بر اساس جابجایی فنر را نشان می‌دهد. شیب این منحنی نمایانگر سفتی فنر می‌باشد.

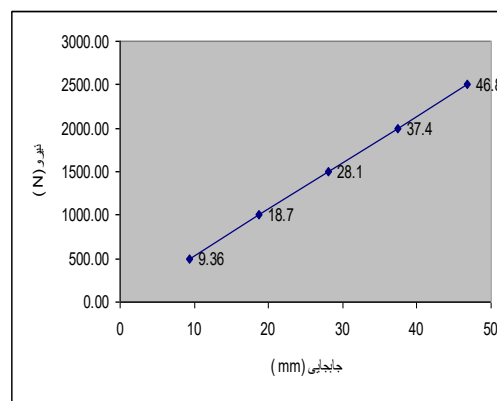


شکل ۹ نمودار جابجایی نسبت به بار اعمال شده در فنر

نقاط داده برداری شده با علامت * مشخص، سپس خط با بهترین شیب از این نقاط گذرانده و سفتی برابر ۵۷.۷ نیوتن بر میلی‌متر بدست آمده است.

۸- نتیجه گیری

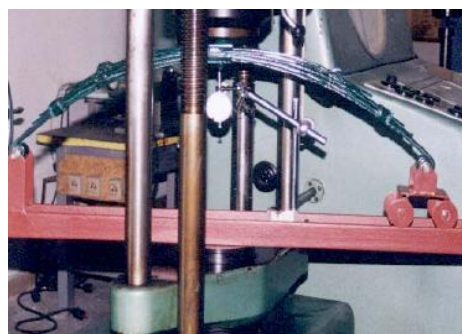
در این مطالعه، سفتی فنرهای تخت با استفاده از روش مدل‌سازی تیر و تحلیل خطی استاتیکی در نرم‌افزار شبیه‌سازی شد و با نتایج تجربی مقایسه گردید. نتایج نشان داد که سفتی فنر به‌صورت آزمایشگاهی ۵۷.۷ نیوتن بر میلی‌متر و در شبیه‌سازی ۵۳.۵ نیوتن بر میلی‌متر به دست آمده است، که درصد خطای حدود ۷ درصد را نشان می‌دهد و این میزان خطا در محدوده قابل قبول قرار دارد. مزیت اصلی روش به‌کار رفته، سرعت بالای اجرای برنامه و دقت مناسب آن است. این روش امکان انجام تحلیل‌های خطی استاتیکی فنر و همچنین تحلیل تنش در اتصالات فنر را به‌راحتی فراهم می‌کند، در حالی که استفاده از المان تماس باعث غیرخطی شدن مسئله شده و پیچیدگی محاسبات و نیاز به حافظه و زمان بیشتر را به همراه دارد. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که روش مدل‌سازی تیر با قیدهای لغزش برای تحلیل فنرهای تخت چندلایه، رویکردی مناسب، سریع و دقیق برای ارزیابی سفتی و توزیع تنش‌ها در شرایط عملیاتی خودرو است. این روش می‌تواند به عنوان یک ابزار مؤثر در طراحی و بهینه‌سازی سیستم‌های تعلیق مورد استفاده قرار گیرد.



شکل ۷ نیرو بر حسب جابجایی

۸- اندازه‌گیری سفتی فنر بصورت تجربی

جهت صحت‌گذاری و مقایسه جوابهای نرم‌افزاری با واقعیت فنر مورد نظر در آزمایشگاه مورد بررسی قرار گرفته و سختی آن به صورت آزمایشگاهی بدست آمده است. شکل ۸ شرایط بارگذاری و مرزی را برای فنر تخت در آزمایشگاه را نشان می‌دهد.



شکل ۸ دستگاه سفتی سنج فنر تخت

نیرو در محل نصب اکسل به فنر اعمال شده است. دو انتهای فنر توسط دو محور ساده بر روی تکیه‌گاه مستقر شده و عملکردی مشابه تکیه‌گاه غلطکی دارند. در این آزمایش، سفتی اسمی فنر بدون در نظر گرفتن اثر گوشواره و بدون بست‌های میانی اکسل اندازه‌گیری شده است.

برای اعمال نیرو از یک پمپ هیدرولیکی دستی به همراه جک استفاده شده است که قابلیت اعمال نیرو در هر دو جهت رفت و برگشت را دارد. سنسور اندازه‌گیری نیرو با دقت تفکیک ۱ کیلوگرم، و ساعت اندازه‌گیری با دقت ۰.۰۵ میلی‌متر برای ثبت جابجایی تحت بار به‌کار رفته است.

مراجع

- [۱] ر. کاظمی، ع. جعفری، م. انصاری موحد، *اصول طراحی سیستم تعلیق و فرمان خودرو*، تهران: انتشارات نخل دانش، ۱۳۸۱.
- [2] M. Olley, F. William, L. Douglas, *Chassis Design Principle and Analysis*, Engineering Publishing, 2002.
- [3] M. A. Osipenko, Yu. I. Nyashin, R. N. Rudakov, "A Contact Problem in the Theory of Leaf Spring Bending," *International Journal of Solids and Structures*, pp. 3129–3136, 2003.
- [4] A. Skrzat, T. Paszek, "Three-Dimensional Contact Analysis of the Car Leaf Spring," *Numerical Methods in Continuum Mechanics*, 2003.
- [5] Z. Zhang, Y. Zhao, and J. Zhang, "Analysis on the Stiffness of Leaf Spring Based on ABAQUS," *Applied Mechanics and Materials*, vol. 273, pp. 225–229, 2013.
- [6] L. Li, J. Liu, and H. Li, "Study on the Modeling Method of Leaf Spring Based on Assembly Pre-Stress," *Applied Mechanics and Materials*, vol. 663, pp. 545–549, 2013.
- [7] X. Chen, Y. Zhang, and M. Wang, "Calculation and Analysis of Stiffness of Taper-Leaf Spring with Variable Stiffness," *SAE Technical Paper 2014-01-0929*, 2014.
- [8] H. Carlson, *Spring Designer's Handbook*, CRC Press, 1978.