

مقایسه‌ی روش‌های حجم محدود و آب پویایی ذرات هموار در شبیه‌سازی جریان بر روی سرریزهای لبه تیز

علی مهدوی^۱، حسین خورشیدی^{۲*}
تاریخ دریافت: ۹۴/۱۰/۲۰ تاریخ پذیرش: ۹۵/۲/۴

چکیده

در این تحقیق، الگوریتم ترکیبی جدیدی برای تشکیل دیواره جامد در قالب شبیه‌سازی آب پویایی ذرات هموار (SPH) ارائه شده است. در این روش، چند لایه از ذرات جعلی در ناحیه‌ی غیرقابل نفوذ در نظر گرفته می‌شوند که برای بهبود دقت جواب به کار می‌آیند. همچنین، لایه‌ای از ذرات با عملکرد نیروی دافعه به منظور جلوگیری از خروج ذرات از مرز جامد در طول سطح مشترک سیال-جامد قرار داده می‌شود. لایه‌ی اخیر برخلاف مدل معمول لئونارد-جونز، دیگر باعث ایجاد نوسان‌های فشار در نزدیکی دیواره نمی‌گردد. این روش ترکیبی جدید همراه با شبیه‌سازی SPH به عنوان یک حل لاگرانژی از معادلات آب‌عدی ناویر-استوکس مورد استفاده قرار گرفته است. دقت روش پیشنهادی با شبیه‌سازی جریان روگذر از سرریز لبه‌تیز و مقایسه با نتایج حاصل از روش حجم محدود مورد بررسی واقع شده است که با همخوانی مطلوبی همراه بوده است.

واژه‌های کلیدی: آب پویایی ذرات هموار، شرایط مرز جامد، جریان سطح آزاد، سرریز لبه‌تیز، روش حجم محدود.

مقدمه

سرریزها به منظور تنظیم جریان در مجاری روباز مورد استفاده قرار می گیرند که در دو نوع لبه پهن و لبه تیز تقسیم بندی می شوند. سرریز لبه تیز معمولاً به صورت یک صفحه با ضخامت کم است که عمود بر مسیر جریان نصب می گردد. رسوبگذاری در پشت سرریزهای لبه تیز بیش از سرریزهای لبه پهن رخ می دهد. در سرریزهای لبه تیز، عمق بحرانی قبل از تاج سرریز اتفاق می افتد که محل دقیق آن مشخص نمی باشد و به همین دلیل، برای بدست آوردن دبی جریان نمی توان مانند سرریزهای لبه پهن از رابطه ی انرژی استفاده کرد. سرریزهای لبه تیز بر اساس شکل تاج به مثلثی، مستطیلی، دایره ای، دوزنقه ای و سهمی گون تقسیم بندی می شوند. پژوهش حاضر به بررسی عددی جریان عبوری از روی سرریزهای لبه تیز خواهد پرداخت. روشهای عددی آب پویایی ذرات هموار و حجم محدود برای محاسبه ی میدان جریان و الگوی جریان بر روی این سرریزها مورد استفاده قرار می گیرند. ذکر این نکته ضروری به نظر می رسد که استفاده از نمونه آزمایشگاهی، به دلیل صرف هزینه و زمان زیاد، باعث گردیده است که به کارگیری روش های عددی در اغلب علوم مهندسی مورد توجه محققین قرار گرفته، و در راستای پدید آمدن رایانه های فوق پیشرفته، این روشها به عنوان ابزارهای کم هزینه تری معرفی شوند.

شبیه سازی عددی جریان عبوری از روی سرریز لبه تیز با پیچیدگی های بسیار توأم است، که از آن جمله می توان به حالت غیرآب ایستایی جریان و وجود دو مرز متحرک (نیم رخ های زیرین و زبرین) اشاره نمود. همچنین روش عددی بایستی قادر به حل همزمان جریانهای زیربحرانی و فوق بحرانی در حالت ناماندگار باشد.

روش عددی آب پویایی ذرات هموار^۳ (SPH)، روش بدون شبکه ی لاگرانژی است، که در ابتدا برای شبیه سازی های نجومی ابداع گردیده است (گینگولد و موناگان، ۱۹۷۷؛ لوسی، ۱۹۷۷). پیشرفتهای زیادی به کمک محققین مختلف در زمینه هایی همچون مکانیک جامدات (لیبرسکی و همکاران، ۱۹۹۳)، جریانهای پیچیده سطح آزاد (موناگان، ۱۹۹۴) و بررسی ساختار امواج (گومز-گستیرا و دالریمل،

۲۰۰۴) حاصل شده است. به منظور شناخت کامل از جزئیات روش آب پویایی ذرات هموار می توان به مطالعات انجام شده به وسیله ی لیو و لیو (۲۰۱۰) و موناگان (۲۰۰۵ و ۲۰۱۲) اشاره نمود.

شبیه سازی سطح آزاد مورد مطالعه در این تحقیق به عنوان یکی از نقاط قوت روش آب پویایی ذرات هموار شمرده می شود. در این روش، سطح آزاد به صورت خودکار ترسیم می گردد که این ویژگی برای هندسه های پیچیده نیز به راحتی قابل انجام است. محیط سیال در قالب مجموعه ی متناهی از ذرات، که تعیین کننده ی موقعیت مجموعه در هر لحظه می باشد، تجزیه می گردد. این ذرات قادر به جا به جایی بوده و این جا به جایی ها تنها در چارچوب معادلات حاکم بر حرکت سیال ممکن خواهد بود. فرآیند تر شدن-خشک شدن نیز به صورت صریح قابل شبیه سازی است، و این امر بدون هیچگونه کار اضافی، اعم از نگاشت یا روشهای باز تولید شبکه بندی میسر خواهد بود. به صورت کلی، این ویژگیها به ماهیت لاگرانژی این روش اشاره دارد.

اگرچه کارآیی روش SPH به منظور تعیین مرز سطح آزاد اثبات شده است، با این حال، توجه دقیق به شبیه سازی مناسب مرزهای جامدی که در برگزیده ی جریان سیال می باشد، مهم به نظر می رسد. به کارگیری نامناسب این مرزهای جامد ممکن است باعث ایجاد مشکلات جدی در کل دامنه ی محاسبات گردد، که در نتیجه پیش بینی های اشتباهی را در محاسبات به دنبال خواهد داشت. همچنین ممکن است با گذشت زمان، موجب ناپایداری عددی در شبیه سازی شود. علاوه بر این، بایستی از نفوذ غیرواقعی ذرات سیال به مرزهای جامد مانع به عمل آید.

تاکنون روشهای متعددی برای در نظر گرفتن مرزهای جامد در SPH پیشنهاد شده اند. تعدادی از این روشها با توجه به توانایی، محدودیتها و برتری آنها در اینجا مرور می شوند. یکی از روشهای ساده برای شبیه سازی مرزهای جامد با توجه به این واقعیت است که هر ذره از سیال به محض برخورد با مرز جامد، یک جهش کشسان^۴ را تجربه می کند که باعث هدر رفتن بخشی از کارمایه جنبشی آن ذره می شود (سوتوایگلسیاس و همکاران،

⁴ elastic bounce

³ smoothed particle hydrodynamics

عمل می‌کنند. نیروی لنارد-جونز^{۱۱} از این نمونه نیروها می‌باشد (لیو و لیو، ۲۰۰۳). به رغم سادگی این روش، در حالاتی که فاصله بین ذره‌ای خیلی کوچک می‌شود، دافعه بزرگی تولید می‌گردد که موجب مختل شدن توزیع فشار در نزدیکی مرز جامد می‌شود. روش‌های اصلاحی به منظور رفع این مشکل به وسیله‌ی محققین دیگری پیشنهاد شده‌اند (روجرز و دالریمل، ۲۰۰۸؛ شائو و همکاران، ۲۰۱۲).

در روش آب پویایی ذرات هموار غیر قابل تراکم^{۱۲}، تعدادی از روشها شامل روش ذرات قرینه^{۱۳} (لو و شائو، ۲۰۰۲) و روش ذرات ثابت دیواره^{۱۴}، (لو و شائو، ۲۰۰۳) به منظور به کارگیری رابطه‌ی بدون لغزش، لغزش آزاد و شرایط مرزی نیومن برای یک مرز جامد مورد مطالعه قرار گرفته است. اخیراً یک روش اصلاح شده‌ی ذرات قرینه پیشنهاد شده، که دقت عددی و پایداری این روش را بهبود بخشیده است، و این امر در قالب کاهش نوسان‌های فشار در مجاورت دیواره جامد نمایان شده است.

وقتی که یک ذره‌ی سیال به یک مرز جامد می‌رسد، دقت تخمین‌های مربوط به روش SPH کاهش می‌یابد، که به دلیل نبودن ذره‌ای در آن سوی مرز جامد به منظور تبادل داده با ذره‌ی نزدیک مرز می‌باشد. از این مشکل معمولاً به عنوان مسئله‌ی نقص چگالی^{۱۵} در تحقیقات مرتبط با SPH نام برده می‌شود (لیو و لیو، ۲۰۰۳). به علاوه، برخی از ذرات سیال ممکن است به مرز جامد نفوذ کنند که فرآیندی غیر فیزیکی است و منجر به هدر رفت ساختگی جرم و حتی ناپایداری محاسبات خواهد شد. هدف از این تحقیق، کاهش مشکلات فوق از طریق ترکیب کردن ذرات جعلی و مدل نیروی دافعه‌ی آرام برای بهبود دقت پیش‌بینی‌های جریان در مجاورت مرزهای جامد می‌باشد. از مزایای روش پیشنهادی، سادگی و کارایی مطلوب این روش است.

معادلات حاکم

۲۰۰۴). ولی در این روش، به دلیل نوسان قابل ملاحظه‌ی میدان جریان در مجاورت مرزهای جامد، از دقت جواب کاسته می‌شود (سوتو و همکاران، ۲۰۰۶).

برخی از محققین با استفاده از ذرات جعلی^۵ به تعریف مرزهای جامد پرداخته‌اند (راندلز و لایبرسکی، ۱۹۹۶؛ کلاگروسی و لاندیرینی، ۲۰۰۳). در این روش، تعدادی از ذرات از طریق قرینه‌سازی همزمان ذرات سیال مجاور خط مرز جامد، در خارج از مرز جامد تولید می‌شوند. این ذرات تمایل به تاثیر بر مرزهای جامد از طریق چگالی، فشار و سرعت ناشی از ذرات سیال مجاور خود، دارند. در این حالت، هر کدام از شرطهای مرزی لغزش آزاد^۶ و عدم لغزش^۷ می‌تواند وارد شبیه‌سازی گردد. با این وجود، موقعیت و تعداد ذرات جعلی ممکن است در هر گام زمانی تغییر کند، که باعث ایجاد پیچیدگی‌هایی در پیاده‌سازی برنامه نویسی خواهد شد. علاوه بر این، قرینه‌سازی ذرات نسبت به مرز جامد، نیازمند دانستن بردارهای قائم موضعی^۸ بر روی آن مرز خواهد بود، که به عنوان مشکل اصلی این روش، مخصوصاً در صورت وجود مرزهای نامنظم و لبه‌های تیز، شمرده می‌شود.

روش دیگر شبیه‌سازی مرزهای جامد عبارت است از توزیع یکنواخت یا شطرنجی ذرات پویا در دو یا چند لایه در خارج از مرز جامد (گومز و دالریمل، ۲۰۰۴؛ کرسپو و همکاران، ۲۰۰۷). موقعیت ذرات پویا در کل زمان شبیه‌سازی ثابت می‌ماند، حال آنکه چگالی و فشار آنها همانند یک ذره سیال واقعی از ارضای رابطه‌ی بقای جرم و معادله حالت^۹ بدست می‌آید. اگرچه به کارگیری این روش ساده می‌باشد، ولی بررسیهای عددی نشان می‌دهند که چسبندگیهای غیرواقعی ذرات سیال بر روی سطح مشترک جامد و سیال به وجود می‌آید (گومز-گستیرا و همکاران، ۲۰۱۰).

بر اساس روش نیروی دافعه^{۱۰}، ردیفی از ذرات مستقر بر روی سطح مشترک جامد و سیال، دافعه‌ای بر ذرات سیال وارد می‌کنند که باعث جلوگیری از نفوذ آنها به درون مرز جامد می‌گردد. اساساً این نیروها از توانایی‌های درون مولکولی ناشی می‌شوند و در راستای خط گذرنده از دو ذره

¹¹ Leonard-Jones force

¹² incompressible SPH

¹³ mirror particles

¹⁴ fixed wall particles

¹⁵ density deficiency problem

⁵ ghost particle

⁶ free-slip condition

⁷ No-slip condition

⁸ local normal vectors

⁹ equation of state

¹⁰ repulsive force method

جریان های سطح آزاد به کار می رود (مونگان، ۱۹۹۴) که به صورت زیر نوشته می شود:

$$p = b_0 \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right), \quad (4)$$

که ρ چگالی سیال در هر نقطه از جریان و ρ_0 چگالی مرجع سیال در فشار هوای آزاد (که برای آب $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ می باشد) است. توان γ معمولاً برای جریان های سطح آزاد برابر ۷ در نظر گرفته می شود (کلاگروسی و لاندیرینی، ۲۰۰۳). ضریب b_0 به سرعت صوت مربوط می شود و به صورتی انتخاب می گردد که در کل زمان شبیه سازی، تغییرات چگالی در حد ۱٪ مقدار مجاز باقی بماند (فراری و همکاران، ۲۰۰۹). این امر با توجه به فرض کم تراکم پذیر بودن سیال که از خصوصیات SPH می باشد، برقرار است.

روش عددی

نحوه ی گسسته سازی SPH

اندیشه ی اصلی روش SPH، بر اساس تجزیه محیط سیال به مجموعه ی متناهی از ذرات گسسته لاگرانژی می باشد که هر کدام از آنها مقادیر فیزیکی به خصوصی را انتقال داده و از معادلات حاکم بر جریان سیال تبعیت می کند. این ذرات معمولاً در ابتدا بر روی یک مجموعه مختصات کارتزین توزیع می شوند که یک طرح با فواصل یکسان را تشکیل می دهند. با افزایش تعداد ذرات تشکیل دهنده سیال، ویژگیهای جریان به نحوی مطلوبتر تعیین می شوند، ولی با صرف زمان طولانی تر محاسبات همراه خواهد بود. به هر ذره یک جرم معین نسبت داده می شود، m ، که به واسطه آن جرم، ذره حجمی از فضا را به صورت تابعی از زمان اشغال می کند، $V = \frac{m}{\rho}$ ، که ناشی از تغییرات چگالی است، که ذاتاً در یک سیال کم تراکم پذیر وجود دارد. ذرات سیال اساساً به صورت نقاط درون یابی متحرک^{۲۱} عمل می کنند. با پیشرفت جریان، مقادیر فیزیکی مربوط به هر ذره، بر اساس اطلاعات همسایگان آن ذره، درون یابی می شوند که این کار از طریق هسته W به عنوان یک تابع وزنی انجام می پذیرد. ذرات مجاور برای یک ذره ی خاص، i ، ذراتی هستند که در محدوده ی دامنه ی

مطالعه ی حاضر بر حل معادلات ناویر استوکس متمرکز شده است، که با استفاده از دیدگاه لاگرانژی و در حالت غیر لزج به شکل زیر بیان می شود:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u}, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{F}. \quad (2)$$

معادلات (۱) و (۲) قوانین اساسی برای بقای جرم و اندازه حرکت را بیان می کنند که t زمان، ρ چگالی سیال، \vec{u} بردار بردار سرعت جریان، p فشار و \vec{F} بردار نیروی خارجی بر واحد جرم می باشد که معمولاً شامل نیروی ثقل (که ناشی از شتاب جاذبه g است) و نیروهای مرزی دافعه (که بعداً تشریح می شود) خواهد بود.

با توجه ماهیت لاگرانژی SPH، امکان پیش بینی مسیر حرکت بخش معینی از پیکره سیال وجود دارد. این نکته به عنوان مزیت کلیدی این روش شمرده می شود، به خصوص در مواردی که مرزهای متحرک وجود دارد که از این نمونه می توان به مورد سطح آزاد سیال اشاره نمود. به عبارتی دیگر، نیازی به حل معادلات اضافی برای ترسیم سطح آزاد (شبیه مدل حجم سیال^{۱۶} یا VOF) سیال نیست. همچنین، معادله ی لاگرانژی اندازه حرکت دارای مولفه ی انتقالی^{۱۷} نمی باشد و موقعیت ذرات به سادگی به هنگام سازی می شود:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}, \quad (3)$$

که \vec{x} نشان دهنده ی موقعیت ذره ی سیال در هر زمان است. حرکت جریان به صورت کلی با انتگرال گیری از معادله (۳) برای هر ذره ی سیال حاصل می شود. معمولاً در SPH، سیال به صورت کم تراکم پذیر^{۱۸} در نظر گرفته می شود. این فرض اجازه می دهد که مقادیر فشار به صورت منحصر به فرد از طریق میدان چگالی تعیین گردد که این امر به واسطه ی معادله حالت یا EOS امکان پذیر است. استفاده از EOS باعث کاهش هزینه های محاسبات برای تعیین میدان فشار خواهد شد، که به دلیل عدم نیاز به حل معادله ی پواسون^{۱۹}، که خود مولفه ای ضروری برای هر روش حل SPH غیرقابل تراکم می باشد، می گردد. معادله ی حالت تایت^{۲۰} برای تعیین فشار p به صورت معمول برای

¹⁹ poisson equation

²⁰ tait eos

²¹ moving interpolation points

¹⁶ volume of fluid

¹⁷ convection term

¹⁸ weakly-compressible

تنظیم می‌باشد که قبل از هر شبیه‌سازی بایستی واسنجی شوند.

در این پژوهش، تعیین میدان چگالی بر اساس روش ارائه شده به وسیله‌ی فراری و همکاران (۲۰۰۹) پایه‌گذاری شده است که نیازی به هیچ فراسخ واسنجی شده نداشته، و به راحتی قابل استفاده است. در این روش، لزجت عددی ذاتی^{۲۶} مربوط به شار روزانف^{۲۷} (تورو، ۲۰۰۹) برای حذف نوسان‌های جعلی در میدان جریان مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین، معادله پیوستگی به صورت زیر قابل بیان است:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \rho_i \sum_j V_j (\vec{u}_i - \vec{u}_j) \cdot \vec{\nabla}_i W_{ij} + \sum_j (c_{ij} V_j (\rho_j - \rho_i)) \vec{n}_{ij} \cdot \vec{\nabla}_i W_{ij}, \quad (۶)$$

در اینجا $\vec{n}_{ij} = \vec{x}_{ji} / |\vec{x}_{ji}|$ شبیه‌سازی SPH در مورد مجموعه‌ای از ذرات مجاور (که با نمایه j نشان داده شده است) پیاده‌سازی می‌شود که موقعیت آنها درون دامنه‌ی تاثیر مربوط به ذره i قرار می‌گیرند. بنابراین، همه‌ی جفت ذراتی که به وسیله‌ی دامنه‌ی تاثیر احاطه شده‌اند، در هر بازه‌ی محاسباتی در نظر گرفته می‌شوند. این امر از طریق ارتباط الگوریتم جستجوی فهرستی^{۲۸} به صورت مطلوبی انجام می‌گردد (لیو و لیو، ۲۰۰۳). شیب تابع هسته برای ذره i محاسبه می‌گردد و با $\vec{\nabla}_i W_{ij}$ نشان داده می‌شود. به راحتی می‌توان چنین اثبات نمود که $\vec{\nabla}_i W_{ij} = -\vec{\nabla}_j W_{ij}$ می‌باشد.

معادله (۶) از ایجاد نوسان‌های جعلی میدان چگالی جلوگیری می‌کند که به پایداری بیشتر میدان فشار منجر می‌شود. در اینجا، $c_{ij} = \max(c_i, c_j)$ تعیین کننده‌ی بیشترین مقدار تندی موج^{۲۹} مابین هر جفت از ذرات متعامل می‌باشد. با توجه به فرض سیال کم‌تراکم‌پذیر، تندی موج به صورت صریح به میدان‌های فشار و چگالی مرتبط می‌گردد و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$c_i = \left(\frac{b_0 \gamma}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (۷)$$

حمایتی^{۲۲} ذره قرار دارند و دایره‌ای را به شعاع kh و به مرکزیت \vec{x}_i برای مسائل دوبعدی ترسیم می‌کنند. به عبارتی دیگر، محدوده‌های را از محیط اطراف به گونه‌ای مجزا می‌سازد که تابع هسته در داخل این محدوده تعریف شده و خارج آن صفر است.

از بین انتخابهای گوناگون برای تابع هسته که محققین مختلف پیشنهاد داده‌اند، یک هسته گاوسین اصلاح شده^{۲۳} (کلاگروسی و لاندیرینی، ۲۰۰۳) برگزیده شده است، که به دلیل داشتن پایداری اصلاح‌شده و کارایی مطلوب در برنامه نویسی بوده است. این تابع هسته قادر به حفظ خصوصیات مطلوب تابع گاوسین سنتی بوده، و در عین حال دارای دامنه‌ی حمایت معین می‌باشد. این تابع هسته به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$W_{ij} = \begin{cases} \frac{\exp(-q_{ij}^2) - \exp(-k^2)}{2\pi h^2 \int_0^k \psi(\exp(-\psi^2) - \exp(-k^2)) d\psi} & \text{for } 0 \leq q_{ij} \leq k \\ 0 & \text{for } q_{ij} > k \end{cases} \quad (۵)$$

در اینجا $q_{ij} = |\vec{x}_{ij}|/h$ که بردار رابط دو ذره‌ی متعامل i و j می‌باشد. در این مطالعه، طول مشخصه‌ی هموار h برابر با فاصله بین ذره‌ی اولیه در نظر گرفته می‌شود که با Δ نشان داده می‌شود، همچنین، $k = 3$ فرض شده است.

این نکته به خوبی قابل درک است که ویژگی کم-تراکم‌پذیر بودن SPH با نوسان‌های غیرواقعی میدان‌های چگالی و فشار همراه است، که در بعضی حالات ممکن است به ناپایداری کششی و حتی واگرایی در حل مسئله منجر شود. در این حالت معمولاً یک جمله‌ی لزجت مصنوعی^{۲۴} معرفی می‌گردد که به منظور جلوگیری از ناپایداری SPH به کار می‌رود (موناگان، ۱۹۹۴). این جمله به صورت تجسمی از تاثیر لزجت واقعی فرض می‌شود. این آثار تمایل به هموار کردن نوسان‌های مربوط به میدان چگالی را دارند و در نتیجه پایدار شدن میدان فشار را در پی دارند. لزجت مصنوعی که به وسیله‌ی موناگان پیشنهاد گردیده است (موناگان، ۱۹۹۴)، هر دوی اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای^{۲۵} را حفظ می‌کند. ولی این روش دارای ۲ جمله‌ی قابل

²⁶ intrinsic numerical viscosity

²⁷ Rusanov flux

²⁸ link list search algorithm

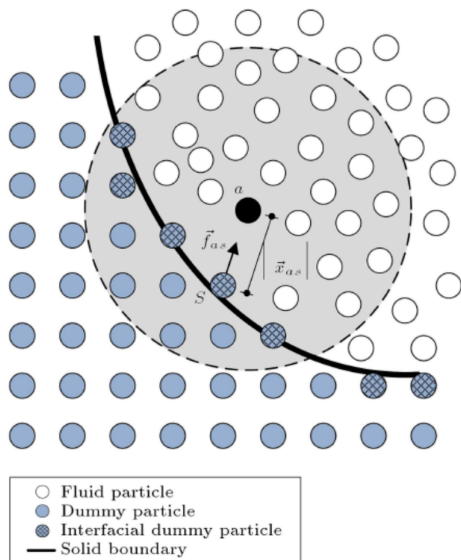
²⁹ wave celerity

²² support domain

²³ modified Gaussian kernel

²⁴ artificial viscosity

²⁵ linear and angular momentum



شکل ۱- الگوریتم پیشنهادی برای مرز جامد

سیال نزدیک به خود (ذره ی a) ، بدست می آید (آدامی و همکاران، ۲۰۱۲):

$$p_s = p_a + \rho_a g(y_a - y_s). \quad (9)$$

مقادیر متناظر با ذرات ساختگی و ذرات سیال نزدیک با نمایه های مربوط به خود نشان داده می شوند. جمله ی دوم در سمت راست معادله ی (۹)، مولفه ی آب ایستائی ناشی از اختلاف ارتفاع بین ذرات سیال و ذرات ساختگی است. در قرارداد SPH، معادله ی (۹) به صورت زیر بیان می گردد:

$$p_s = \frac{\sum_a (p_a + \rho_a g(y_a - y_s)) W_{sa} V_a}{\sum_a W_{sa} V_a}. \quad (10)$$

معادله ی (۱۰) شامل تخمین هسته اصلاحی^{۳۱} برای p_s می باشد که در مورد ذراتی که در تعامل با ذره ی s هستند، فرآیند جمع شدن انجام می گردد. چگالی ذره ی ساختگی بر اساس معادله حالت و با توجه به مقدار فشار آن ذره محاسبه می شود.

اگرچه این روش به ایجاد یک میدان جریان پیوسته در نزدیکی مرز می انجامد، ولی در برخی شرایط ممکن است ذرات سیال بتوانند در مرز جامد نفوذ کنند و حتی از دامنه محاسبات خارج شوند. برای جلوگیری از این مشکل، ذرات ساختگی مستقر بر روی سطح مشترک سیال و جامد، دافعه ای بر روی ذرات سیال نزدیک وارد می کنند.

که در واقع $c_i = [(\partial p / \partial \rho)_i]^{1/2}$ می باشد. بر اساس نتایج مطالعات عددی انجام شده، چنین نتیجه گیری می شود که این روش از ایجاد ذرات با نامنظمی بالا جلوگیری می کند و برخلاف آنچه در XSPH وجود دارد، نیازی به اصلاحات بیشتر برای تصحیح جا به جایی ذرات نمی باشد (مونگان، ۱۹۹۴).

الگوهای متعددی برای گسسته سازی شیب فشار در معادله اندازه حرکت قابل انتخاب است. روش پیشنهاد شده به وسیله ی هو و آدامز (۲۰۰۶) در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفته است. بر این اساس، معادله ی اندازه حرکت به صورت زیر بیان می گردد:

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt} = -\frac{1}{m_i} \sum_j (V_i^2 + V_j^2) \left(\frac{\rho_j p_i + \rho_i p_j}{\rho_i + \rho_j} \right) \vec{\nabla}_i W_{ij} + \vec{F}_i. \quad (8)$$

ویژگی پاد تقارن^{۳۰} مربوط به جمله ی شیب فشار در معادله ی (۸) باعث می گردد که نیروی فشاری بین ذرات i و j با یکدیگر برابر و مختلف الجهد باشد، که گویای برقراری قانون سوم نیوتون و بقای اندازه حرکت در این روش است.

روش ترکیبی جدید شبیه سازی مرز جامد

مدل سازی دقیق مرز جامد همیشه به عنوان یک معضل در SPH شناخته می شود. این موضوع به عنوان نقیصه مشترک بسیاری از روش های لاگرانژی مبتنی بر ذره در مقایسه با روش های دارای شبکه می باشد که مدل سازی مرز جامد را براحتی انجام می دهند. الگوریتم ترکیبی پیشنهادی مورد استفاده برای شبیه سازی مرز جامد در شکل (۱) نشان داده شده است.

به منظور جبران نقصان چگالی در نزدیکی مرز جامد، لایه های مختلفی از ذرات ساختگی هم-فاصله در خارج از خط مرزی در نظر گرفته می شوند. تعداد لایه ها به شعاع دامنه ی تاثیر مربوط به هر ذره ی سیال نزدیک بستگی دارد. برای مثال، ۳ لایه از ذرات ساختگی برای وقتی که $k = 3$ می باشد، کافی است. ذرات ساختگی دارای سرعتی برابر با صفر هستند تا بتوانند شرایط دیواره جامد ایستا را برقرار کنند. سایر متغیرهای جریان نیز بایستی به صورت صحیح اختصاص یابند. فشار ذره ساختگی s، از ذره ی

³¹ corrective kernel approximation

³⁰ antisymmetry property

معادلات جریان SPH مجموعه‌ای از معادلات مشتقات معمولی (ODE) را تشکیل می‌دهند که به صورت صریح می‌تواند در طول زمان برای تعیین حرکت سیال بررسی شوند. اگرچه هر روش پایدار مشتق‌گیری زمانی برای معادلات ODE می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد، ولی در عمل روشهایی با محدوده‌ی پایداری وسیع و نیاز محاسباتی کمتر، در اولویت هستند. هر معادله جریان می‌تواند در قالب شکل عمومی زیر نوشته شود:

$$\frac{dU}{dt} = L(U) \quad (13)$$

در مطالعه‌ی حاضر، روش سنتی ۴ مرحله‌ای رانج-کوتا^{۳۲} برای گسسته‌سازی معادلات ODE مورد استفاده قرار گرفته است. اگرچه این روش در مقایسه با روش تخمین و تصحیح^{۳۳} دارای هزینه‌ی عددی بیشتری است، ولی پایداری بهتری به همراه دارد و قادر به استفاده از بازه‌های زمانی بزرگتری نسبت به روش تخمین-تصحیح می‌باشد (دلارمه و همکاران، ۲۰۰۹). این روش کاملاً صریح در قالب فشرده شده‌ی زیر قابل بیان است:

$$U_i^{(k)} = U_i^{(0)} + \alpha_k \Delta t (L(U_i^{(k-1)})) + 2\beta_k L(U_i^{(k-2)}) + 2\beta_k L(U_i^{(k-3)}) + \beta_k L(U_i^{(k-4)}) \quad (14)$$

که $k=1, \dots, 4$ همچنین $U_i^{n+1} = U_i^{(0)} = U_i^n$ و $U_i^{(4)}$ می‌باشد. نمایه‌ی n و $n+1$ به ترتیب نشان دهنده‌ی بازه‌ی زمانی کنونی و بعدی می‌باشد. ضرایب وزنی انتگرال‌گیری روابط $\alpha_3 = 2\alpha_1 = 2\alpha_2 = 6\alpha_4 = 1$ را ارضا می‌کنند، و ضرایب β_k بجز β_4 که برابر با ۱ است، بقیه برابر با صفر در نظر گرفته می‌شوند. برای پایداری روش عددی، اندازه‌ی بازه‌ی زمانی، Δt ، بایستی بر اساس معیار کورانت-فریدریس-لوی^{۳۴} (CFL) مقید باشد، که به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\Delta t = C_n \min\left(\frac{h}{C_i}, \frac{h}{|\bar{u}_i|}\right) \quad (15)$$

که در آن، C_n عدد CFL می‌باشد.

مثال تحقیق

این نیروهای دافعه در امتداد خط شعاعی واصل دو ذره اعمال می‌گردد. هر دوی این ذرات جرم یکسانی دارند. همان طور که قبلاً اشاره گردید، استفاده از روش معمول نیروی مولکولی لئونارد-جونز، باعث ایجاد آشفتگی‌های فشار در مناطق نزدیک به مرز می‌گردد. این مشکل با به کارگیری یک نیروی دافعه‌ی با مقدار معین که در این تحقیق پیشنهاد شده است، قابل رفع می‌باشد. بر این اساس، ذره‌ی سیال a نیرویی (بر جرم واحد) را تجربه می‌کند که ناشی از عملکرد ذره‌ی ساختگی تنه‌ای s است که در سطح مشترک سیال-جامد و در مجاورت ذره a قرار دارد:

$$\vec{f}_{as} = K\Psi(q_{as}) \frac{\vec{x}_{as}}{|\vec{x}_{as}|^2} \quad (11)$$

که $K = 0.01b_0\gamma/\rho_0$ نشان دهنده‌ی تخمینی از نیروی حداکثر مورد نیاز برای نگهداشتن ذره‌ی سیال است که با سرعت بیشینه تخمینی حرکت می‌کند (مونگان، ۲۰۰۵). برای جلوگیری از هر گونه نفوذ به دیواره، تابع $\Psi(q_{as})$ به گونه‌ای تعریف می‌شود که با کاهش متغیر خود، $q_{as} = |\vec{x}_{as}|/h$ ، به صورت یکنواخت افزایش یابد:

$$\Psi(q_{as}) = \begin{cases} \frac{\exp(-3q_{as}^2) - \exp(-3k_s^2)}{1 - \exp(-3k_s^2)} & \text{for } 0 \leq q_{as} \leq k_s \\ 0 & \text{for } q_{as} > k_s \end{cases} \quad (12)$$

در این حالت، در صورتی که ذره‌ی سیال در فاصله‌ای کمتر از شعاع دامنه‌ی تاثیر $k_s h$ نسبت به ذره سطح مشترک قرار گرفته باشد، نیروی دافعه‌ی معینی را تحمل می‌کند. برآیند نیروی وارد بر ذره‌ی سیال مجاور مرز، از تجمیع نیروی تک تک ذرات سطح مشترک متعامل با آن حاصل می‌گردد که مجموعه آنها با IDPs نشان داده می‌شود. بنابراین، نیروی خارجی وارد بر ذره‌ی a ، به دلیل تاثیرات مرزی، به صورت $\vec{F}_a = \sum_{s \in \text{IDPs}} \vec{f}_{as}$ برآورد می‌شود. مطالعات عددی مختلف نشان داده‌اند که به شرطی $k_s \sim 1.5$ باشد، دافعه‌ی آرامی بین ذرات شکل می‌گیرد. مادامی که مقدار k_s در محدوده‌ی مقادیر فوق تغییر کند، نتایج محاسبات حساسیت چندانی به k_s نشان نمی‌دهند. محاسبات این تحقیق به ازای $k_s = 1.5$ انجام شده است.

مشتق‌گیری زمانی و بررسی پایداری

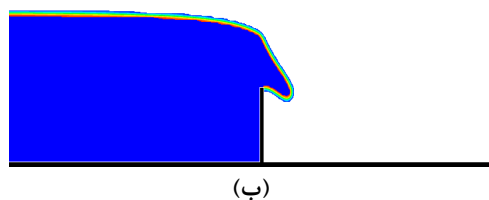
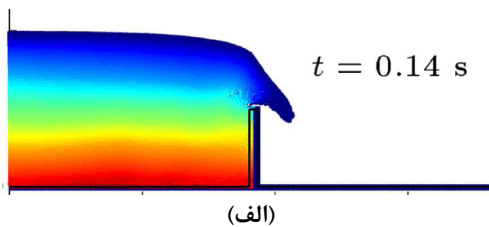
³⁴ Courant-Friedrichs-Lewy criterion

³² conventional four stage Runge-Kutta method

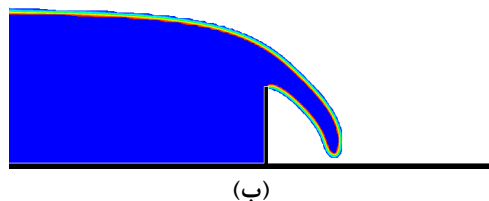
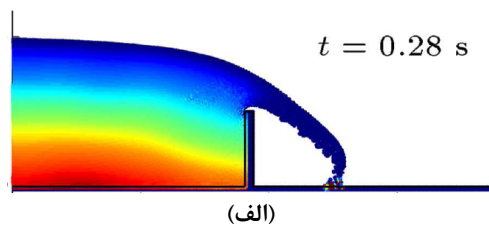
³³ predictor-corrector scheme

خود سرریز باز می گردد و جریان قائمی را به سمت نیمرخ زیرین ایجاد می کند، که این امر در نتایج هر دو شبیه سازی به خوبی قابل مشاهده است.

عبور جریان بر روی سرریز، همزمان باعث ایجاد یک موج منفی بر روی سطح مخزن می گردد، که با گذشت زمان موجب کاهش تراز سطح آب مخزن شده و این موج به سمت دیواره بالادست مخزن حرکت می کند.

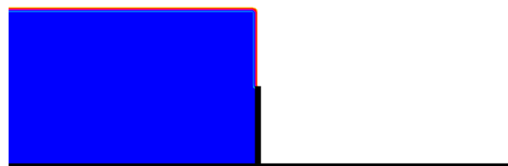


شکل ۳- نیمرخ افشانه ی عبوری از روی سرریز در زمان ۰/۱۴ ثانیه (الف) روش SPH و (ب) روش VOF



شکل ۴- نیمرخ افشانه ی عبوری از روی سرریز در زمان ۰/۲۸ ثانیه (الف) روش SPH و (ب) روش VOF

آبراهه ای به طول ۶/۴ متر با مقطع مستطیلی و به ارتفاع ۰/۸ در نظر گرفته شده است که سرریز لبه تیزی به ارتفاع ۰/۳ متر و ضخامت ۳ سانتی متر در موقعیت ۲/۴ متری از ابتدای آبراهه واقع گردیده است. در زمان $t = 0$ ، ستونی از آب به ارتفاع ۰/۳ متر بالای لبه ی سرریز قرار دارد که به عبارتی دیگر، مخزنی به طول ۲/۴ متر و ارتفاع ۰/۶ متر بالادست سرریز در نظر گرفته شده است. در شروع حل معادلات جریان، مسیر حرکت جریان آب به گونه ای عمل می نماید که گویا دریچه ای کشویی در همان ابتدای حل از روی سرریز برداشته شده، و آب، به دلیل خاصیت ثقل و همچنین نیروی لختی به سمت پایین دست شروع به حرکت می نماید. در شکل (۲)، تصویری از لحظه ی شروع حل نشان داده شده است.



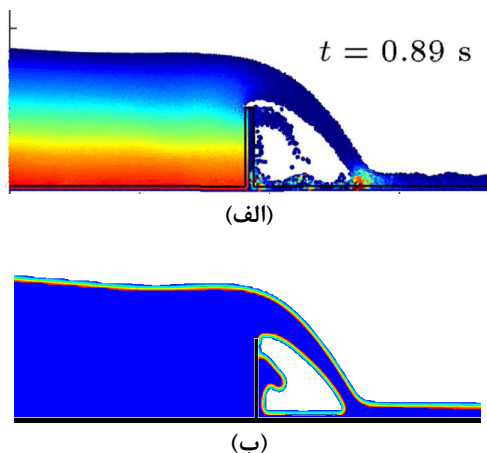
شکل ۲- دامنه حل در لحظه شروع محاسبات

در روش حجم محدود، با توجه به نامانگار بودن فرآیند حل، گام های زمانی ۰/۰۰۱ ثانیه با توجه به اندازه ی ۱ سانتی متر برای ابعاد سلولهای محاسباتی انتخاب گردیده، به گونه ای که شرط پایداری CFL برقرار شود. در روش حجم محدود بکار گرفته شده در این تحقیق، از الگوی تکرار ۳۵ استفاده شده است و به ازای هر گام زمانی ۲۰ تکرار در نظر گرفته شده است.

تحلیل نتایج

الف) نیمرخ جریان عبوری از روی سرریز

در شکل های (۳) الی (۸) تغییرات سطح جریان آب عبوری از روی سرریز در روشهای SPH و حجم محدود نشان داده شده اند. مطابق نتایج SPH، نیمرخ عبوری از روی سرریز پس از حدود ۰/۲۸ ثانیه به کف آبراهه برخورد می کند، این در حالی است که زمان مزبور برای روش حجم حدود ۰/۲۹ ثانیه می باشد که ممکن است به دلیل اختلاف اندک بازه های زمانی در این دو شبیه سازی مختلف باشد. در زمان های ۰/۶۴ ثانیه به بعد، مطابق شکل های (۷) و (۸)، قسمتی از جریان عبوری از روی سرریز به سمت



شکل ۸- نیمرخ افشانه‌ی عبوری از روی سرریز در زمان ۰/۸۹ ثانیه (الف) روش SPH و (ب) روش VOF

(ب) شرایط جریان شبه-ماندگار

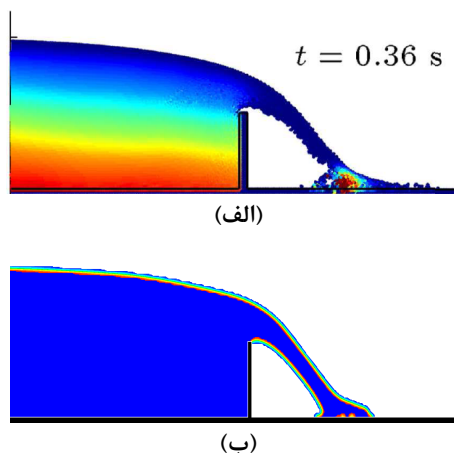
به صورت ریاضی، میدان جریان هیچ‌گاه به شرایط کاملاً ماندگار نمی‌رسد. با این وجود، حدوداً ۱ ثانیه بعد از شروع محاسبات، شرایط شبه-ماندگار حاکم شده است، که در این حالت ارتفاع جریان عبوری بر روی سرریز در حدود ۰/۲۲ متر می‌باشد. در این زمان، بده عبوری از روی سرریز برای SPH به میزان ۰/۱۹۸ متر مربع بر ثانیه در واحد عرض محاسبه شده است. این مقدار، بر اساس رابطه رایج بده-ارتفاع (ویسچر و هگر، ۱۹۹۸):

$$(0.611 + 0.075 \bar{h}_0 / \bar{w}) \sqrt{2g \bar{h}_0}^{3/2} \quad (16)$$

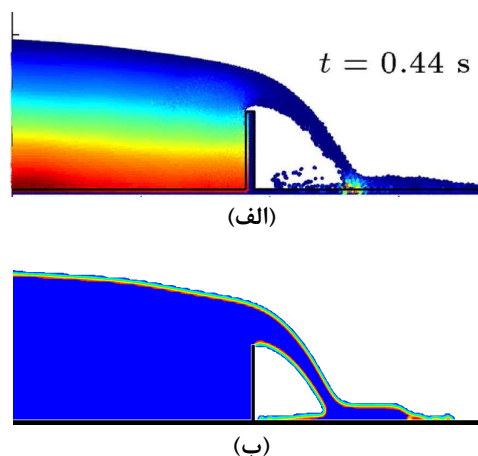
که در آن \bar{h}_0 و \bar{w} به ترتیب ارتفاع جریان روی سرریز و ارتفاع خود سرریز می‌باشد، برابر ۰/۲۰۳ مترمربع بر ثانیه در واحد عرض حاصل گردید. در همین زمان (۱ ثانیه پس از شروع محاسبات)، نتایج روش حجم محدود ارتفاع جریان عبوری از روی سرریز را برابر با ۰/۲۱ متر نشان داده، و بده جریان عبوری را از روی سرریز را ۰/۱۸۳ متر مربع بر ثانیه در واحد عرض تخمین زده است. نیمرخ جریان عبوری از روی سرریز در زمان ۱ ثانیه و رسیدن به حالت شبه ماندگار در شکل (۹) برای روش SPH و روش VOF نشان داده شده است. خط چین نشان داده شده در شکل (۹-الف) مربوط به نتیجه‌ی رابطه تجربی ارائه گردیده به وسیله‌ی ویسچر و هگر (۱۹۹۸) می‌باشد.

(ج) شرایط آب ایستائی مخزن

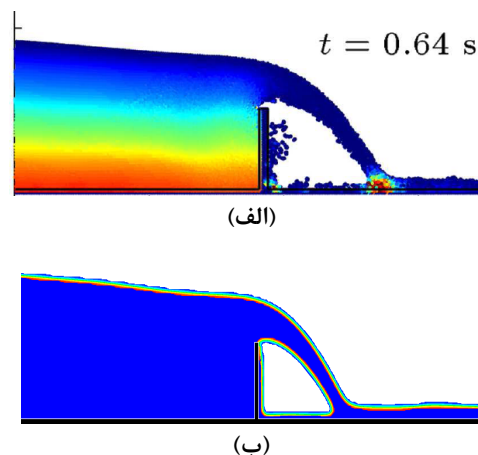
دور از محل سرریز، سرانجام تراز سطح مخزن تمایل به رسیدن به حالت ماندگار و توزیع فشار آب ایستائی را



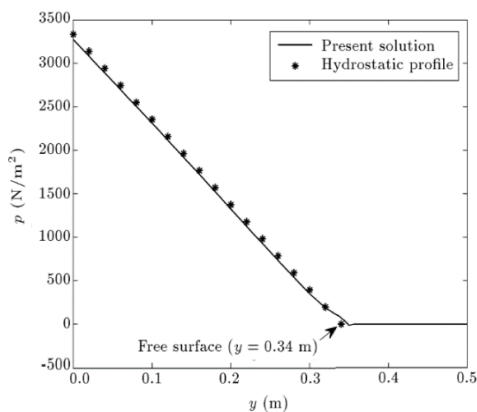
شکل ۵- نیمرخ افشانه‌ی عبوری از روی سرریز در زمان ۰/۳۶ ثانیه (الف) روش SPH و (ب) روش VOF



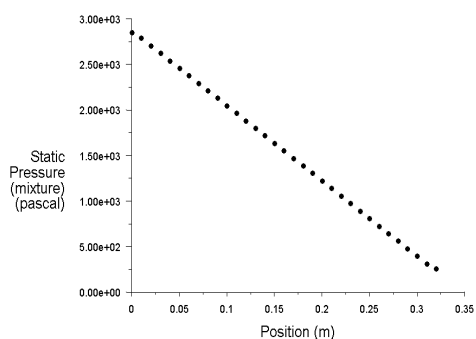
شکل ۶- نیمرخ افشانه‌ی عبوری از روی سرریز در زمان ۰/۴۴ ثانیه (الف) روش SPH و (ب) روش VOF



شکل ۷- نیمرخ افشانه‌ی عبوری از روی سرریز در زمان ۰/۶۴ ثانیه (الف) روش SPH و (ب) روش VOF



(الف)

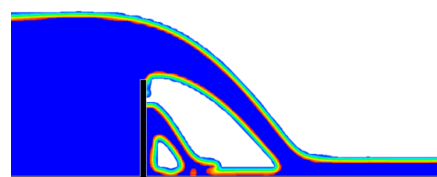
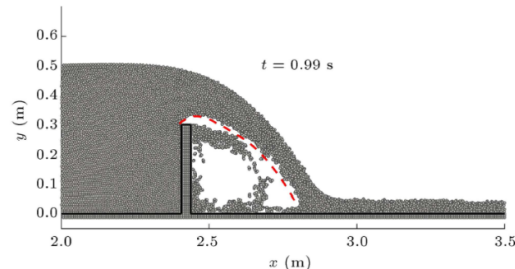


(ب)

شکل ۱۰- مقادیر فشار در ابتدای مخزن و در زمان ۱۰ ثانیه بعد از شروع حل الف) روش SPH و ب) روش VOF

سازی شد. اولین لایه، که دقیقاً بر روی سطح مشترک مرز سیال و جامد تعبیه شده است، به منظور تولید نیروی دافعه استفاده می شود. چنین ترکیبی از ذرات مرزی، علاوه بر اینکه به جریانی پیوسته از سیال در نزدیکی دیواره ها می انجامد، به جلوگیری از خروج غیر فیزیکی ذرات از مرز جامد نیز کمک می نماید. از یک روش رانج- کوتای صریح چند مرحله ای برای حل مشتقات زمانی معادلات سود برده شد.

میزان کارایی روش پیشنهادی، در قالب شبیه سازی جریان سطح آزاد عبوری از روی سرریز لبه تیز، و مقایسه با نتایج حاصل از روش عددی حجم محدود با تکیه بر روش VOF بررسی گردیده است. این مقایسه ها به منظور بررسی نیمرخ جریان عبوری از روی سرریز در زمانهای مختلف، و همچنین زمان رسیدن به حالت ماندگار انجام گرفته است. همچنین، نحوه ی توزیع فشار در مخزن پس از گذشت



شکل ۹- نیمرخ افشانه ی عبوری از روی سرریز در زمان ۱۰/۰ ثانیه الف) روش SPH و ب) روش VOF

در ستون آب دارد. زمان رسیدن به توزیع فشار آب ایستائی برای هر دو روش آب پویایی ذرات هموار و روش حجم محدود حدوداً ۱۰ ثانیه تخمین زده می شود. در شکل (۱۰) نتایج حاصل از روش های مختلف در محاسبه فشار ایستا نشان داده شده اند. شکل (۱۰-الف) مقایسه ای بین نتایج SPH و توزیع فشار آب ایستائی را نشان می دهد و در شکل (۱۰-ب)، مقادیر فشار در ستون سیال و در نقطه ی ابتدای مخزن با کاربرد روش حجم محدود با تکیه بر روش VOF قابل مشاهده است. روش SPH همخوانی مناسبی را با توزیع فشار آب ایستائی در زمان ۱۰ ثانیه بعد از شروع محاسبات نشان می دهد، در صورتی که روش حجم محدود با همان نرخ تغییرات توزیع فشار خطی، ولی با اختلاف اندکی نسبت به آن، مقادیر فشار را در ستون سیال در نقطه ی ابتدای مخزن عرضه می نماید. روش SPH به کار گرفته شده در این تحقیق توانسته است به خوبی مقدار فشار برابر با صفر را در سطح آزاد سیال روی مخزن شبیه سازی کند، که نشان از توانایی مناسب الگوریتم تشکیل مرزهای جامد به کار گرفته شده در این تحقیق می باشد.

نتیجه گیری

در پژوهش، شبیه سازی جریان سطح آزاد با کاربرد روش آب پویایی ذرات هموار (SPH) با استفاده از یک الگوریتم ترکیبی برای تشکیل مرز جامد مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور، نواحی جامد به صورت چند لایه از ذرات جعلی به منظور جبران کسری چگالی در نزدیکی دیواره و همچنین بهبود دقت حل در این نواحی شبیه

- 11) Souto-Iglesias, A., Perez-Rojas, L. and Zamora Rodriguez, R. 2004. Simulation of anti-roll tanks and sloshing type problems with smoothed particle hydrodynamics. *Ocean Engineering*, 31: 1169-1192.
- 12) Souto-Iglesias, A., Delorme, L., Perez-Rojas, L. and Abril-Perez, S. 2006. Liquid moment amplitude assessment in sloshing type problems with smooth particle hydrodynamics. *Ocean Engineering*, 33: 1462-1484.
- 13) Randles, P.W., and Libersky, L.D. 1996. Smoothed particle hydrodynamics: Some recent improvements and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139: 375-408.
- 14) Colagrossi, A. and Landrini, M. 2003. Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 191: 448-475.
- 15) Crespo, A.J.C., Gomez-Gesteira, M. and Dalrymple, R.A. 2007. 3D SPH simulation of large waves mitigation with a dike. *Journal of Hydraulic Research*, 45: 631-642.
- 16) Goomez-Gesteira, M., Rogers, B.D., Dalrymple, R.A. and Crespo, A.J. 2010. State-of-the-art of classical SPH for free-surface flows. *Journal of Hydraulic Research*, 48: 6-27.
- 17) Liu, G.R., and Liu, M.B., 2003. *Smoothed Particle Hydrodynamics: A Mesh free Particle Method*, World Scientific, Singapore.
- 18) Rogers, B.D. and Dalrymple, R.A. 2008. SPH Modeling of tsunami waves. In *Advanced Numerical Models for Tsunami Waves and Runup*, World Scientific, Singapore.
- 19) Shao, J.R., Li, H.Q., Liu, G.R. and Liu, M.B. 2012. An improved SPH method for modeling liquid sloshing dynamics. *Computers and Structures*, 100: 18-26.
- 20) Lo, E.Y.M. and Shao, S.D. 2002. Simulation of near-shore solitary wave mechanics by an incompressible SPH method. *Applied Ocean Research*, 24: 275-286.
- 21) Shao, S.D. and Lo, E.Y.M. 2003. Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface. *Advances in Water Resources*, 26: 787-800.
- 22) Mingham, C. G., and D. M. Causon 1998. High-resolution finite-volume method for shallow water flows. *Journal of Hydraulic Engineering* 124: 605-614.
- 23) Qu, J., A. S. Ramamurthy, R. Tadayon, and Z. Chen. 2009. Numerical simulation of sharp-crested weir flows. *Canadian Journal of Civil Engineering* 36: 1530-1534.
- 24) Bhajantri, M. R., T. I. Eldho, and P. B. Deolalikar. 2006. Hydrodynamic modelling of flow over a spillway using a two-dimensional finite volume-based numerical model. *Sadhana* 31: 743-754.

زمانی نسبتاً طولانی از شروع حل مسئله، مورد بررسی قرار گرفت.

روش تشکیل مرز جامد پیشنهاد شده در این تحقیق الگویی پایدار و ساده بوده و در عین حال با حجم محاسبات کمی همراه است. علاوه بر این، به دلیل عدم نیاز به بردارهای عمود بر مرز جامد، برای شبیه سازی هندسه های پیچیده ی مرزی نیز قابل استفاده می باشد.

روش ترکیبی پیشنهاد شده در این تحقیق به منظور شبیه سازی مرزهای جامد SPH در موارد زیر پیشنهاد می گردد:

- مرزهای جامد متحرک با مسیر معین، شبیه آنچه از یک موج ساز درون آبراهه انتظار می رود.

- سطح مشترک جامد-سیال، که در آن مرزهای جامد متحرک از حرکت جسم صلب با درجات آزادی خطی و دورانی تبعیت می کند.

منابع

- 1) Vischer, D.L., and Hager, W.H. 1998. *Dam Hydraulics*, Wiley, UK.
- 2) Ferrari, A. 2010. SPH simulation of free surface flow over a sharp-crested weir. *Advances in Water Resources*, 33: 270-276.
- 3) Gingold, R.A., and Monaghan, J.J. 1977. Smoothed particle hydrodynamics-theory and application to nonspherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181: 375-389.
- 4) Lucy, L.B. 1977. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The Astronomical Journal*, 82: 1013-1024.
- 5) Libersky, L.D., Petschek, A.G., Carney, T.C., Hipp, J.R. and Allahadi, F.A. 1993. High strain Lagrangian hydrodynamics: A three-dimensional SPH code for dynamic material response. *Journal of Computational Physics*, 109: 67-75.
- 6) Monaghan, J.J. 1994. Simulating free surface flows with SPH. *Journal of Computational Physics*, 110: 399-406.
- 7) Gomez-Gesteira, M. and Dalrymple, R.A. 2004. Using a three-dimensional smoothed particle hydrodynamics method for wave impact on a tall structure. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 130: 63-69.
- 8) Liu, M.B., and Liu, G.R. 2010. Smoothed particle hydrodynamics (SPH): An overview and recent developments. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17: 25-76.
- 9) Monaghan, J.J. 2005. Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on Progress in Physics*, 68: 1703-1759.
- 10) Monaghan, J.J. 2012. Smoothed particle hydrodynamics and its diverse applications. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 44: 323-346.

- 25) Dumbser, Michael. 2011. A simple two-phase method for the simulation of complex free surface flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200: 1204-1219.
- 26) Versteeg, H. K. and Malalasekera, W. 1995. *An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method*. Longman house, Burnt Mill Harlow Essex CM20 2JE, England.
- 27) Blazek, J. 2001. *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*. Alstom Power Ltd., Baden-Daettwil, Switzerland.
- 28) Ferrari, A., Dumbser, M., Toro, E.F. and Armanini, A. 2009. A new 3D parallel SPH scheme for free surface flows. *Computers and Fluids*, 38: 1203-1217.
- 29) Toro, E.F. 2009. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, 3th Edn. Springer, Germany.
- 30) Hu, X.Y. and Adams, N.A. 2006. A multi-phase SPH method for macroscopic and mesoscopic flows. *Journal of Computational Physics*, 213: 844-861.
- 31) Adami, S., Hu, X.Y. and Adams, N.A. 2012. A generalized wall boundary condition for smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 231: 7057-7075.
- 32) Delorme, L., Colagrossi, A., Souto-Iglesias, A., Zamora-Rodriguez, R. and Botia-Vera, E. 2009. A set of canonical problems in sloshing, Part I: Pressure field in forced roll-comparison between experimental results and SPH. *Ocean Engineering*, 36: 168-178.
- 33) Fluent team, *Manual and user guide of fluent software*, 2005. Fluent Inc. Center Resource Park 10 Cavendish Court Lebanon, NH 03766.