

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال یازدهم، شماره پنجاه و ششم، مهر و آبان ۱۴۰۴

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

ساختار جواب‌های دقیق معادله دیفرانسیل غیرخطی جفت‌شده سینوس-گوردون با مشتقات کسری توافقی همراه با تحلیل گرافیکی

احمد شریف^{۱*}، مهدیه قوجق^۲

^(۲۱) گروه ریاضی، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۸/۰۵

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۳/۰۴/۱۱

چکیده

معادله جفت‌شده سینوس-گوردون یک معادله دیفرانسیل غیرخطی است که نه تنها در بسیاری از پدیده‌های فیزیک ریاضی و نظریه مدرن فیزیک ماده چگال کاربرد بسیار بالایی دارد بلکه در زمینه‌های دیگر علوم مانند واکنش‌های شیمیایی و فیزیک با انرژی بالا نیز نقش بس‌زایی دارد. آنچه در این پژوهش مد نظر ماست یافتن مدلهایی از جواب‌های معادله کسری توافقی با مشتقات توافقی جفت‌شده سینوس-گوردون به صورت سالیتون‌های منفرد تیره و نوری همراه با تجزیه و تحلیل گرافیکی با استفاده از روش سینوس گوردون می‌باشد. این جواب‌ها از این جهت که با استفاده از نرم‌افزار میپل محاسبه شده و همراه با تحلیل‌های گرافیکی می‌باشد از دقت بالایی برخوردار می‌باشد. آنچه که از اهمیت بالایی برخوردار است سهولت استفاده از این روش و دقت بالای جواب‌ها می‌باشد که می‌تواند برای بسیاری از معادلات کاربردی در حوزه فیزیک ریاضی مورد استفاده قرار گیرد.

واژه‌های کلیدی: معادله جفت‌شده سینوس-گوردون، سالیتون، روش سینوس گوردون، جواب‌های دقیق

۱. مقدمه

بسیاری از پدیده‌های فیزیکی با مدل‌های مشتقات معمولی قابل بیان نیستند و مشاهدات و نتایج به دست آمده در این مدل‌ها به مدل‌بندی با مشتقات کسری توافقی نزدیک‌ترند. مضاف بر این مفهوم مشتق معمولی که با سرعت در فیزیک مکانیک تفسیر می‌شود نیز در مشتقات کسری توافقی جنبه دیگری به خود می‌گیرد. این جنبه با افزایش یا کاهش شتاب متحرک قابل بیان است. در سال‌های اخیر، بسیاری از روش‌های جدید برای یافتن جواب‌های دقیق از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی ارائه شده‌اند که یکی از بهترین این روش‌ها، روش سینوس-گردون^۲ است [1-3]. روش سینوس-گردون یک روش حل کارآمد و موثر برای محاسبه جواب‌های موج دقیق و یکی از مستقیم‌ترین و موثرترین روش‌های جبری برای یافتن جواب‌های دقیق معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی است [4-7]. تفاوت این روش با سایر روش‌های قدیمی، اجتناب از محاسبات پیچیده و خسته‌کننده و نتیجه‌گیری دقیق‌تر و صریح‌تر برای تعیین جواب‌های موج منزوی با دقت بالا است. در سال‌های اخیر، این روش مفید و سودمند برای تعیین جواب‌های دقیق (جواب‌های سالیونی، متناوب و گویا) از معادله شرودینگر^۳، معادله ایکه‌اوس^۴ و انواع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی دیگر که کاربرد فراوانی در زمینه‌های مختلف علوم و مهندسی دارند، با موفقیت به کار رفته است [8-15]. در این تحقیق برآنیم تا معادله جفت‌شده با مشتقات کسری توافقی سینوس-گردون بصورت

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial t^{2\alpha}} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\delta^2 \sin(u - \omega), \\ \frac{\partial^{2\alpha} \omega}{\partial t^{2\alpha}} - \gamma^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= \sin(u - \omega), \end{aligned} \quad \gamma, \delta > 0, \alpha \in (0, 1]. \quad (1)$$

را مورد مطالعه قرار دهیم. مشتقات کسری توافقی از مباحث بروز و مورد علاقه بسیاری از محققان حوزه ریاضی و سایر علوم همچون فیزیک و مهندسی می‌باشد. هدف از این مقاله، گسترش روش سینوس-گردون برای تعیین جواب‌های دقیق معادله جفت‌شده با مشتقات کسری توافقی سینوس-گردون است. این مقاله شامل چند بخش‌بندی است، در بخش دوم مفاهیم و قضایای اساسی مشتقات کسری توافقی را بیان می‌کنیم. بخش سوم شامل بیان روش و در قسمت چهارم کاربرد روش سینوس-گردون را برای معادله مدنظر همراه با تحلیل گرافیکی را بیان می‌کنیم و در قسمت آخر نتیجه بحث مطرح شده است.

۲. مفاهیم و قضایای اساسی مشتقات کسری توافقی

در این بخش تاریخچه مشتقات کسری توافقی به همراه بعضی از قضایا و مفاهیم بنیادی را بیان و اثبات قسمت-هایی از قضایای اساسی مشتقات کسری توافقی را که قبلاً اثبات نشده را مطرح می‌کنیم. مشتقات کسری توافقی یکی از قدیمی‌ترین مباحث ریاضی می‌باشد که می‌تواند به عنوان بسط طبیعی مشتقات روتین در نظر گرفته شود.

^۲ Sine-Gordon method^۳ Nonlinear Schrödinger equation^۴ Eckhaus equation

در سال ۱۶۹۵ هوسپیتال این سوال را مطرح کرد که $\frac{d^n f}{dx^n}$ در صورتی که $n = \frac{1}{2}$ چه معنی می‌دهد را مطرح کرد. از آن زمان بود که محققان سعی کردند تعریفی از یک مشتق کسری توافقی ارائه دهند. بیشتر آن‌ها از یک فرم انتگرال برای مشتق کسری توافقی استفاده می‌کردند. دو مورد از این تعاریف که بیشتر مورد استقبال قرار گرفت به صورت زیر هستند.

- تعریف ریمن لیوویل: برای $\alpha \in [n-1, n)$ مشتق مرتبه α از f به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D_a^\alpha(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx.$$

- تعریف کاپوتو: برای $\alpha \in [n-1, n)$ مشتق مرتبه α از f به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D_a^\alpha(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx.$$

تعریف ۱-۲: فرض می‌کنیم $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ باشد. در این صورت مشتق کسری توافقی سازگار f از مرتبه α بصورت زیر

$$D_t^\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon},$$

برای هر $t > 0$ و $\alpha \in (0, 1)$ تعریف می‌شود.

$$D_t^\alpha \left(\frac{g}{g} \right) = \frac{g D_t^\alpha(f) - f D_t^\alpha(g)}{g^2}, \quad \text{for } a, b \in \mathbb{R}$$

$$D_t^\alpha(fg) = f D_t^\alpha(g) + g D_t^\alpha(f),$$

$$D_t^\alpha(af + bg) = a D_t^\alpha(f) + b D_t^\alpha(g),$$

$$D_t^\alpha(t^\mu) = \mu t^{\mu-\alpha}, \quad \text{for } \mu \in \mathbb{R}$$

۳. ساختار روش سینوس-گوردون

در ابتدا معادله سینوس-گوردون معادله را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\psi_{xt} = \alpha \sin(\psi); \quad (2)$$

که در α آن یک ثابت غیر صفر می‌باشد. در ادامه تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم

$$\psi_{x,t} = U \xi, \quad \xi = \eta x + vt \quad (3)$$

که در آن v بیانگر سرعت موج می‌باشد. با جایگذاری (۳) در (۲) داریم

$$U'' = \frac{\alpha}{v\mu^2} \sin(u(\xi)) \quad (۴)$$

با ساده کردن (۵) خواهیم داشت:

$$\left[\left(\frac{U}{2} \right)' \right]^2 = \frac{\alpha}{v\mu^2} \sin^2 \left(\frac{U(\xi)}{2} \right) + C, \quad (۵)$$

در معادله (۵) C ثابت انتگرال‌گیری می‌باشد. فرض می‌کنیم $\xi = \frac{U(\xi)}{2}$ و $C = 0$ همچنین $f^2 = \frac{\alpha}{v\mu^2}$

در نتیجه معادله (۵) تبدیل به معادله زیر می‌شود

$$w' \xi^2 = f^2 \sin^2 w \xi, \quad (۶)$$

با ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$w' \xi = f \sin w \xi,$$

با در نظر گرفتن $f = 1$ خواهیم داشت:

$$w' \xi = \sin w \xi, \quad (۷)$$

جواب‌های معادله (۷) را به صورت زیر داریم:

$$\sin(w(\xi)) = \operatorname{sech}(\xi) \quad \text{یا} \quad \cos(w(\xi)) = \tanh(\xi), \quad (۸)$$

$$\sin(w(\xi)) = \operatorname{icsh}(\xi) \quad \text{یا} \quad \cos(w(\xi)) = \coth(\xi),$$

برای ساختن جواب معادله دفرانسیل با مشتقات جزئی به فرم زیر

$$N(\psi, \psi_t, \psi_x, \psi_{tt}, \dots) = 0, \quad (۹)$$

از تبدیل زیر استفاده می‌کنیم

$$U w = \sum_{j=1}^n \cos^{j-1} w \times [B_j \sin w + A_j \cos w] + A_0 \quad (۱۰)$$

با استفاده از معادله (۱۰) جواب‌های معادله (۹) را به صورت زیر داریم

$$U_1 \xi = \sum_{j=1}^n \tanh^{j-1} \xi \times [B_j \operatorname{sech} \xi + A_j \tanh \xi] + A_0 \quad (۱۱)$$

$$U_2 \xi = \sum_{j=1}^n \coth^{j-1} \xi \times \left[B_j \operatorname{csch} \xi + A_j \coth \xi \right] + A_0 \quad (12)$$

مقدار n با بالانس همگن از رابطه (۹) بدست می‌آید. سپس با جاگذاری معادله (۱۰) در معادله معمولی بدست آمده از (۹) به عبارات جبری بر اساس $\xi \sin^i$ و $\xi \cos^i$ می‌رسیم که با حل این معادلات جبری به ضرایب مد نظر برای جواب‌های معادله (۱) خواهیم رسید.

۴. کاربرد روش برای معادله سینوس-گوردون
در ابتدا معادله (۱) را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial t^{2\alpha}} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\delta^2 \sin(u - \omega), \\ \frac{\partial^{2\alpha} \omega}{\partial t^{2\alpha}} - \gamma^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= \sin(u - \omega), \quad \gamma, \delta > 0, \end{aligned} \quad (13)$$

جهت سهولت در محاسبات ابتدا تبدیل زیر را در نظر می‌گیریم

$$\omega(x, t) = u(x, t) - \varphi(x, t) \quad (14)$$

با اعمال (۱۴) در (۱۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial t^{2\alpha}} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\delta^2 \sin(\varphi(x, t)), \\ \frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial t^{2\alpha}} - \frac{\partial^{2\alpha} \varphi}{\partial t^{2\alpha}} - \gamma^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) &= \sin(\varphi(x, t)). \end{aligned} \quad (15)$$

از رابطه (۳) داریم

$$\xi = \mu \left(x - c \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \quad (16)$$

با جاگذاری (۱۶) در (۱۵) داریم

$$\begin{aligned} \mu^2 c^2 u_{\xi\xi} - \mu^2 u_{\xi\xi} &= -\delta^2 \sin(\varphi), \\ \mu^2 c^2 u_{\xi\xi} - \mu^2 c^2 \varphi_{\xi\xi} - \gamma^2 (\mu^2 u_{\xi\xi} - \mu^2 \varphi_{\xi\xi}) &= \sin(\varphi). \end{aligned} \quad (17)$$

فرض می‌کنیم $\varphi = 2 \operatorname{Arctan} v(\xi)$

$$\sin \varphi = \sin \left(2 \arctan v(\xi) \right) = \frac{2v(\xi)}{1+v^2(\xi)} \quad (18)$$

با جاگذاری معادله (۱۸) در (۱۷) به معادله جفت شده زیر می‌رسیم

$$\mu^2 (c^2 - 1) (1 + v^2(\xi)) u'' + 2\delta^2 v(\xi) = 0, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & 2\mu^2 (c^2 - \gamma^2) v^2(\xi) (u''(\xi) - v''(\xi)) + \mu^2 (c^2 - \gamma^2) v^2(\xi) (u''(\xi) - 2v''(\xi)) + \\ & \mu^2 (c^2 - \gamma^2) v^4(\xi) u''(\xi) - 2v^3(\xi) + v(\xi) (4\mu^2 (c^2 - \gamma^2) v'^2(\xi) - 2) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

از معادله (۱۹) خواهیم داشت

$$u'' = - \frac{2\delta^2 v(\xi)}{\mu^2 (c^2 - 1) (1 + v^2(\xi))}, \quad (21)$$

بنابراین خواهیم داشت

$$u = - \frac{\delta^2}{\mu^2 (c^2 - 1)} (v \ln(1 + v^2) - v + \arctan(v)) \quad (22)$$

و از معادله (۱۸) داریم

$$\varphi = \sin^{-1} \left(\frac{2v(\xi)}{1 + v^2(\xi)} \right) \quad (23)$$

با جاگذاری (۲۳) در (۲۰) به معادله زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} & \mu^2 (c^2 - 1) (c^2 - \gamma^2) (v^2(\xi) + 1) v''(\xi) - 2\mu^2 (c^2 - 1) (c^2 - \gamma^2) v(\xi) v'^2(\xi) + \\ & (v^3(\xi) + v(\xi)) (\delta^2 (c^2 - \gamma^2) + c^2 - 1) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

با در نظر گرفتن بالانس همگن بر اساس معادله (۱۰) $n = 1$ حاصل می‌شود بنابراین خواهیم داشت:

$$v \xi = B_1 \sin \xi + A_1 \cos \xi + A_0 \quad (25)$$

با جاگذاری (۲۵) در (۲۴) و مرتب کردن عبارات جبری بدست آمده و همچنین مساوی صفر قرار دادن ضرایب توان‌های مختلف $\sin w$ و $\cos w$ به حالات مختلف جواب برای ضرایب مد نظر به صورت زیر می‌رسیم:

دسته اول:

$$c = \frac{\sqrt{\delta^2 + 1} \sqrt{\delta^2 \gamma^2 + 1}}{\delta^2 + 1}, A_0 = \frac{i\sqrt{42}}{6}, A_1 = \frac{i\sqrt{30}}{10}, B_1 = \frac{i\sqrt{10}}{10}.$$

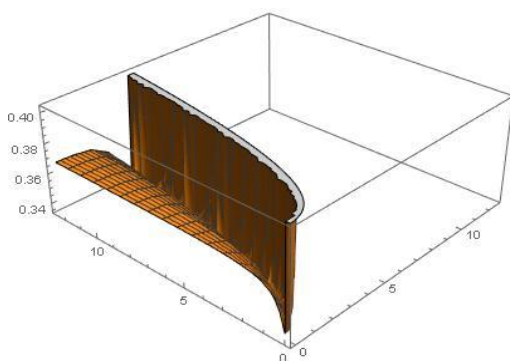
پیرو رابطه (۱۱) خواهیم داشت

$$v_1 \xi = \frac{i\sqrt{10}}{10} \operatorname{sech} \xi + \frac{i\sqrt{30}}{10} \tanh \xi + \frac{i\sqrt{42}}{6} \quad (26)$$

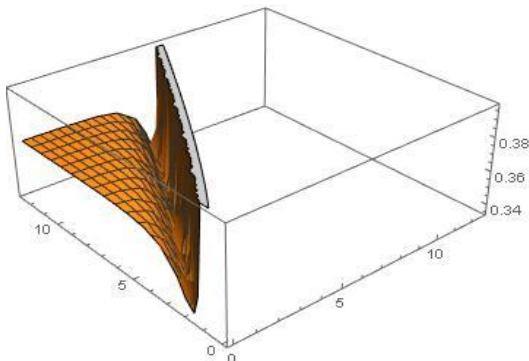
حال بر اساس معادلات (۲۲) و (۲۳) و روابط $\tan^{-1} ix = i \tanh^{-1}(x)$, $\sin^{-1} ix = i \sinh^{-1} x$ داریم:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) = & -\frac{i\delta^2}{\mu^2(c^2 - 1)} \left[\left(\frac{\sqrt{10}}{10} \operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2 + 1)(\delta^2 \gamma^2 + 1)} t^\alpha}{\delta^2 + 1} \right) \right) + \frac{\sqrt{30}}{10} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2 + 1)(\delta^2 \gamma^2 + 1)} t^\alpha}{\delta^2 + 1} \right) \right) + \frac{\sqrt{42}}{6} \right) \times \right. \\ & \left. \ln \left(1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2 + 1)(\delta^2 \gamma^2 + 1)} t^\alpha}{\delta^2 + 1} \right) \right) + \frac{\sqrt{30}}{10} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2 + 1)(\delta^2 \gamma^2 + 1)} t^\alpha}{\delta^2 + 1} \right) \right) + \frac{\sqrt{42}}{6} \right)^2 \right) - \right. \\ & \left. \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2 + 1)(\delta^2 \gamma^2 + 1)} t^\alpha}{\delta^2 + 1} \right) \right) + \frac{\sqrt{30}}{10} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2 + 1)(\delta^2 \gamma^2 + 1)} t^\alpha}{\delta^2 + 1} \right) \right) + \frac{\sqrt{42}}{6} \right) + \right. \\ & \left. \tanh^{-1} \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2 + 1)(\delta^2 \gamma^2 + 1)} t^\alpha}{\delta^2 + 1} \right) \right) + \frac{\sqrt{30}}{10} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2 + 1)(\delta^2 \gamma^2 + 1)} t^\alpha}{\delta^2 + 1} \right) \right) + \frac{\sqrt{42}}{6} \right) \right] \end{aligned}$$

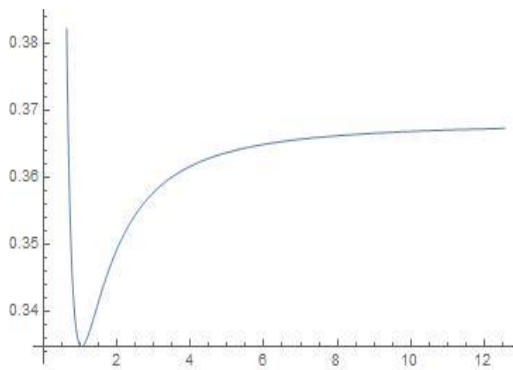
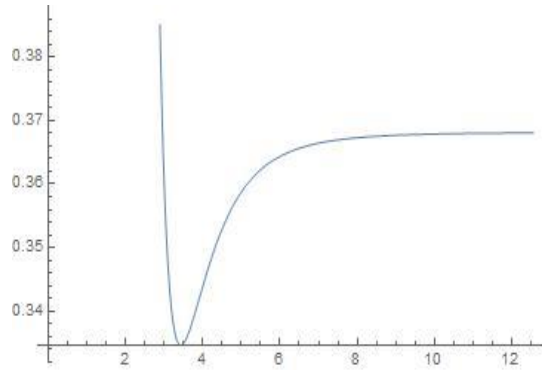
در تصاویر زیر رفتار گرافیکی جواب $u_1(x, t)$ به ازای مقادیر $\mu=1, \delta=1, c=0, \gamma=1$ و تغییرات $\alpha=0.3$ و $\alpha=0.9$ نماد مشتق کسری توافقی بیان شده است.



تصویر ۲: گرافیک سه بعدی u_1 به ازای $\alpha = 0.3$

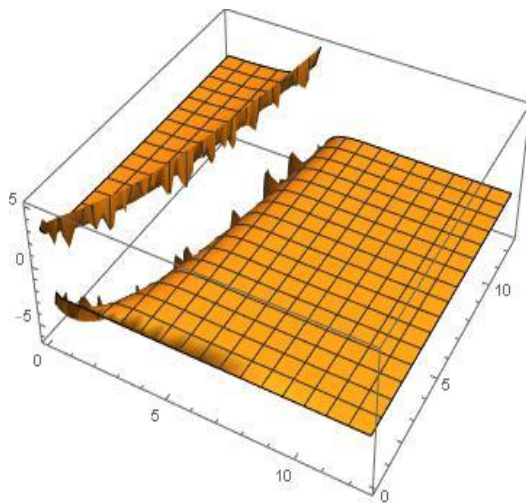
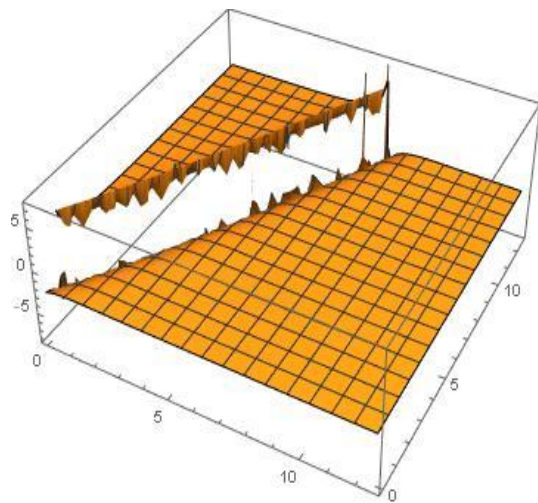


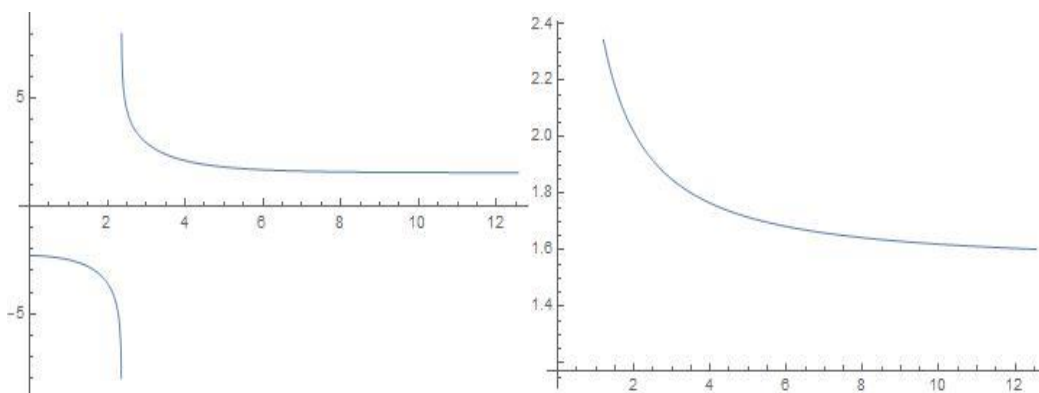
تصویر ۱: گرافیک سه بعدی u_1 به ازای $\alpha = 0.9$

تصویر 4: گرافیک دو بعدی u_1 به ازای $\alpha = 0.3$ تصویر 3: گرافیک دو بعدی u_1 به ازای $\alpha = 0.9$

9

$$\varphi_1(x,t) = \sin^{-1} \left(\frac{2 \left(\frac{i\sqrt{10}}{10} \operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}} \right) \right) + \frac{i\sqrt{30}}{10} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}} \right) \right) + \frac{i\sqrt{42}}{6} \right)}{1 + \left(\frac{i\sqrt{10}}{10} \operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}} \right) \right) + \frac{i\sqrt{30}}{10} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}} \right) \right) + \frac{i\sqrt{42}}{6} \right)^2} \right)$$

تصویر 6: گرافیک سه بعدی φ_1 به ازای $\alpha = 0.3$ تصویر 5: گرافیک سه بعدی φ_1 به ازای $\alpha = 0.9$



تصویر ۸: گرافیک دو بعدی ϕ_1 به ازای $\alpha = 0.3$

تصویر ۷: گرافیک دو بعدی ϕ_1 به ازای $\alpha = 0.9$

بنابراین بر اساس (۱۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \omega_1(x, t) = & -\frac{i\delta^2}{\mu^2(c^2-1)} \left[\left(\frac{\sqrt{10}}{10} \operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)} t^\alpha}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{30}}{10} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)} t^\alpha}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{42}}{6} \right) x \right. \\ & \ln \left(1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)} t^\alpha}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{30}}{10} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)} t^\alpha}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{42}}{6} \right)^2 \right) - \\ & \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)} t^\alpha}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{30}}{10} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)} t^\alpha}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{42}}{6} \right) + \\ & \left. \tanh^{-1} \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)} t^\alpha}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{30}}{10} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)} t^\alpha}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{42}}{6} \right) \right] - \\ & i \sinh^{-1} \left(\frac{2 \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)} t^\alpha}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{30}}{10} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)} t^\alpha}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{42}}{6} \right)}{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)} t^\alpha}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{30}}{10} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)} t^\alpha}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{42}}{6} \right)^2} \right) \end{aligned}$$

خانواده بعدی جواب‌ها بر اساس رابطه (۱۲) را بصورت زیر خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) = & -\frac{i\delta^2}{\mu^2(c^2-1)} \left[\left(\frac{\sqrt{10}}{10} \operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{30}}{10} \coth \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{42}}{6} \right) \times \right. \\
& \ln \left(1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{30}}{10} \coth \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{42}}{6} \right)^2 \right) - \\
& \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{30}}{10} \coth \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{42}}{6} \right) + \\
& \left. \tanh^{-1} \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{30}}{10} \coth \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{42}}{6} \right) \right]
\end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned}
\omega_2(x, t) = & -\frac{i\delta^2}{\mu^2(c^2-1)} \left[\left(\frac{\sqrt{10}}{10} \operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{30}}{10} \coth \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{42}}{6} \right) \times \right. \\
& \ln \left(1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{30}}{10} \coth \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{42}}{6} \right)^2 \right) - \\
& \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{30}}{10} \coth \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{42}}{6} \right) + \\
& \left. \tanh^{-1} \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{30}}{10} \coth \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{42}}{6} \right) \right] - \\
& i \sinh^{-1} \left(\frac{2 \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{30}}{10} \coth \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{42}}{6} \right)}{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{30}}{10} \coth \left(\mu \left(x - \frac{\sqrt{(\delta^2+1)(\delta^2\gamma^2+1)}{t^\alpha}}{\delta^2+1} \right) \right) + \frac{\sqrt{42}}{6} \right)^2} \right)
\end{aligned}$$

دسته دوم:

$$c = 1, A_0 = 0, A_1 = \frac{i\sqrt{3}}{3}, B_1 = i.$$

$$v_3(x, t) = i \operatorname{sech} \xi + \frac{i\sqrt{3}}{3} \tanh \xi \quad \text{از رابطه (۱۱) داریم:}$$

$$\begin{aligned} u_3(x, t) = & -\frac{i\delta^2}{\mu^2(c^2-1)} \left[\left(\operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right) \times \right. \\ & \ln \left(1 - \left(\operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right)^2 \right) - \\ & \left(\operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right) + \\ & \left. \tanh^{-1} \left(\operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right) \right] \end{aligned}$$

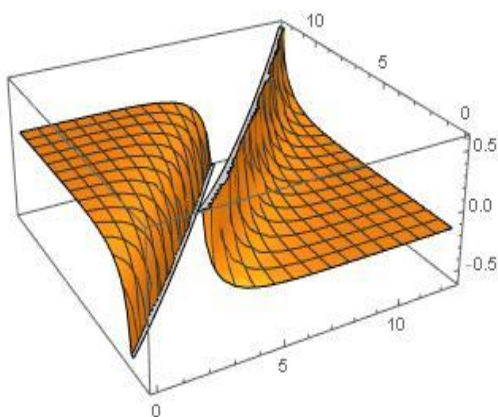
9

$$\varphi_3 = i \sinh^{-1} \left(\frac{2 \left(\operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right)}{1 - \left(\operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right)^2} \right)$$

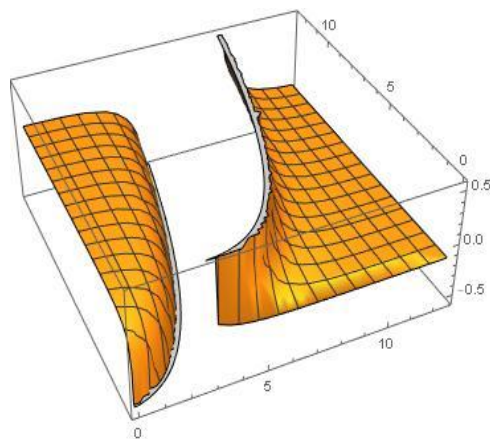
$$\begin{aligned} \omega_3(x, t) = & -\frac{i\delta^2}{\mu^2(c^2-1)} \left[\left(\operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right) \times \right. \\ & \ln \left(1 - \left(\operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right)^2 \right) - \\ & \left(\operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right) + \\ & i \tanh^{-1} \left(\operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right) \Big] - \\ & i \sinh^{-1} \left(\frac{2 \left(\operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right)}{1 - \left(\operatorname{sech} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \tanh \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right)^2} \right) \end{aligned}$$

از رابطه (12) داریم:

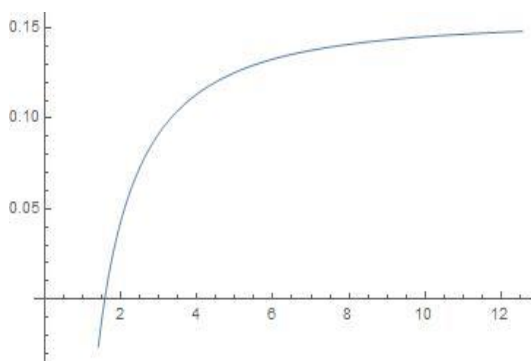
$$u_4(x, t) = -\frac{i\delta^2}{\mu^2(c^2-1)} \left[\left(\operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{coth} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right) \times \right. \\ \left. \ln \left(1 - \left(\operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{coth} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right)^2 \right) - \right. \\ \left. \left(\operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{coth} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right) + \right. \\ \left. \tanh^{-1} \left(\operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{coth} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right) \right]$$



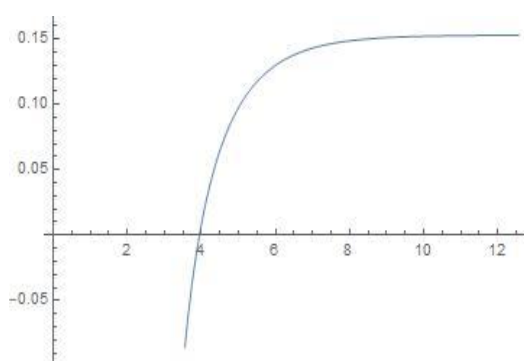
تصویر ۱۰: گرافیک سه بعدی u_4 به ازای $\alpha = 0.3$



تصویر ۹: گرافیک سه بعدی u_4 به ازای $\alpha = 0.9$



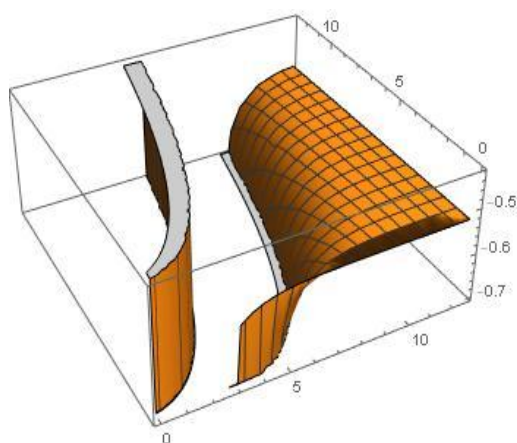
تصویر ۱۲: گرافیک دو بعدی u_4 به ازای $\alpha = 0.3$



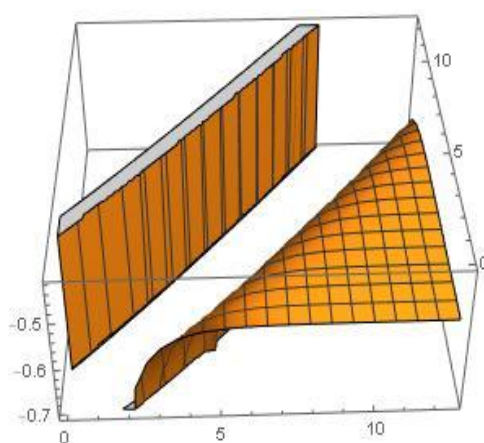
تصویر ۱۱: گرافیک دو بعدی u_4 به ازای $\alpha = 0.9$

$$\varphi_4 = i \sinh^{-1} \left(\frac{2 \left(\operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \coth \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right)}{1 - \left(\operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \coth \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right)^2} \right)$$

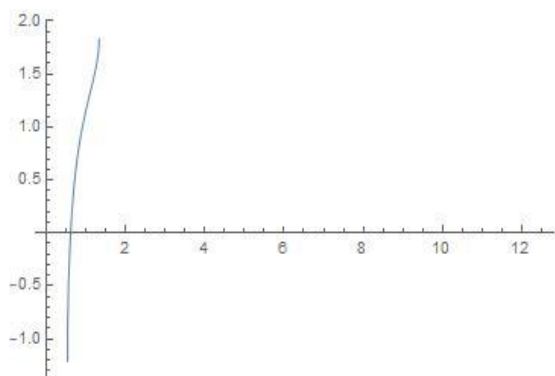
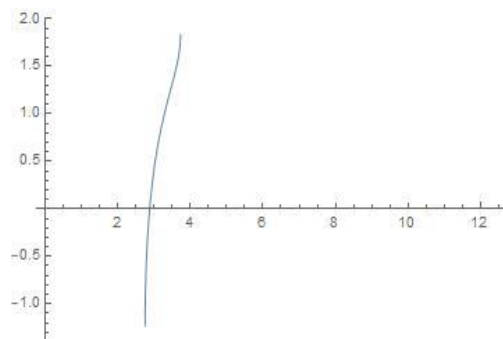
$$\begin{aligned} \omega_4(x, t) = & -\frac{i\delta^2}{\mu^2(c^2-1)} \left[\left(\operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \coth \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right) \times \right. \\ & \ln \left(1 - \left(\operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \coth \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right)^2 \right) - \\ & \left(\operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \coth \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right) + \\ & \left. \tanh^{-1} \left(\operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \coth \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right) \right] - \\ & i \sinh^{-1} \left(\frac{2 \left(\operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \coth \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right)}{1 - \left(\operatorname{csch} \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \coth \left(\mu \left(x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right) \right)^2} \right) \end{aligned}$$



تصویر ۱۴: گرافیک سه بعدی w_4 به ازای $\alpha = 0.3$



تصویر ۱۳: گرافیک سه بعدی w_4 به ازای $\alpha = 0.9$

تصویر 16: گرافیک دو بعدی w_4 به ازای $\alpha = 0.3$ تصویر 15: گرافیک دو بعدی w_4 به ازای $\alpha = 0.9$

تا اینجا دو دسته جواب را مورد بررسی قرار دادیم و می‌توان چند دسته جواب دیگر را نیز مطرح نمود که از نوشتن آنها صرف‌نظر می‌کنیم.

۵. بحث و نتیجه‌گیری:

در این مقاله، یک رویکرد جدید از روش سینوس-گوردون را برای بدست آوردن جواب‌های دقیق و تحلیلی (جواب-های سالیتمونی، متناوب و گویا) معادله سینوس-گوردون همراه با تحلیل گرافیکی جواب‌ها به ازای تغییرات نماد مشتق کسری توافقی ارائه داده‌ایم. عملکرد این روش قابل اعتماد و موثر است و بیشتر جواب‌های سالیتمونی را بدست می‌آورد و این روش مزیت بیشتری نسبت به دیگر روش‌های مستقیم جبری دارد از جمله اجتناب از محاسبات پیچیده و خسته‌کننده و نتیجه‌گیری دقیق‌تر و صریح‌تر برای تعیین جواب‌های موج منزوی با دقت بالا است.

منابع:

- [1] K.S. Miller, B. Ross, An Introduction to the Fractional and Fractional Differential Equations, John Wiley and Sons, New York (1993).
- [2] Y. Luchko, R. Gorenflo, The initial-value problem for some fractional differential equations with Caputo derivative, Preprint eries A08-98, Fachbereich Mathematik and Informatic, Freie Universitat, Berlin (1998).
- [3] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic press, New York (1999).
- [4] EL-Wakil, S.A., Madkour, M.A., Abdou, M.A., Application of exp-function method for nonlinear evolution equations with variable coe_cients, Phys. Lett., A 369 (2007), 62-69.
- [5] Kudryashov, N.A., Loguinova, N.B., Extended simplest equation method for nonlinear differential equations, Appl. Math. Comput., 205 (2008), 396-402.
- [6] Y.-M. Zhao, H. Liu, and Y.-J. Yang, "Exact solutions for the coupled Sine-Gordon equations by a new hyperbolic auxiliary function method," Applied Mathematical Sciences, vol. 5, no. 33-36, pp. 1621–1629, 2011.
- [7] Y.-M. Zhao, W. Li, and Y.-J. Yang, "New exact solutions of coupled sine-Gordon equations using symbolic computation," Mathematical Sciences Research Journal, vol. 14, no. 4, pp. 79– 86, 2010.
- [8] A Neirameh, New analytical solutions for the coupled nonlinear Maccari's system Alexandria Engineering Journal 55 (3), 2839-2847.
- [9] M Mehdiipoor, A Neirameh, New soliton solutions to the (3+ 1)-dimensional Jimbo–Miwa equation, Optik 126 (23), 4718-4722.
- [10] H Rezazadeh, A Neirameh, M Eslami, A Bekir, A Korkmaz, A sub-equation method for solving the cubic–quartic NLSE with the Kerr law nonlinearity, Modern Physics Letters B 33 (18), 1950197.
- [11] A Neirameh, Topological soliton solutions to the coupled Schrodinger–Boussinesq equation by the SEM, Optik 126 (23), 4179-4183.
- [12] A Kurt, H Rezazadeh, M Senol, A Neirameh, O Tasbozan, M Eslami, Two effective approaches for solving fractional generalized Hirota–Satsuma coupled KdV system arising in interaction of long waves, Journal of Ocean Engineering and Science 4 (1), 24-32.
- [13] Seadawy AR, Nasreen N, Dian-Chen LU. Optical soliton and elliptic functions solutions of Sasa-satsuma dynamical equation and its applications. Appl Math J Chinese Univ 2021;36:229–42.
- [14] Ahmet Bekir, Esin Aksoy, Guner Ozkan. Optical soliton solutions of the long-short-wave interaction system. J Nonlinear Opt Phys Mater 2013;22(02):1350015
- [15] Guner Ozkan, Aksoy Esin, Bekir Ahmet, Cevikel Adem C. Different methods for (3+1)-dimensional space–time fractional modified KdV–Zakharov–Kuznetsov equation. Comput Math Appl 2016;71(6):1259–69. <http://dx.doi.org/10.1016/j>.