



## تحلیل استاتیکی استوانه‌های از جنس مواد هدفمند ارتوتروپیک با طول کوتاه به روش بدون المان

رسول مرادی دستجردی<sup>۱</sup>، مهرداد فروتن<sup>۲\*</sup>، سمیه عبداللهی بکتاش<sup>۳</sup>

\* نویسنده مسئول: foroutan@razi.ac.ir

### واژه‌های کلیدی

مواد هدفمند ارتوتروپیک، روش بدون المان، تحلیل استاتیکی، مقارن محوری.

### چکیده

در این مقاله تحلیل استاتیکی استوانه‌هایی از جنس مواد هدفمند ارتوتروپیک با طول کوتاه به روش بدون المان بررسی شده است. در این روش، توابع شکل حداقل مربعات متحرک برای تقریب میدان جابه‌جایی در فرم ضعیف معادله تعادل استفاده شده و برای اعمال شرایط مرزی اساسی توابع تبدیل به کار رفته است. در این شبیه‌سازی از یک مدل مقارن محوری استفاده شده است که خواص مکانیکی آن در راستای شعاع، متناسب با تغییرات کسر حجمی مواد تشکیل دهنده، تغییر می‌کند. در این مقاله اثرات طول و ضخامت استوانه، توان کسر حجمی توزیع مواد، نوع چیدمان مواد و همچنین اعمال شرایط مرزی اساسی بر توزیع تنش و میدان جابه‌جایی این استوانه‌ها بررسی شده است. به منظور اعتبارسنجی، نتایج به دست آمده با نتایج حاصل از روش اجزا محدود و همچنین نتایج سایر محققان، مقایسه و مطابقت بسیار خوبی مشاهده شد. همچنین مشخص شد که روش بدون المان نتایج دقیق‌تر و هموارتری نسبت به روش اجزا محدود دارد. میدان تنش استوانه‌های هدفمند ارتوتروپیک نیز با نتایج استوانه‌های ارتوتروپیک همگن چند لایه تأیید شده با انتخاب توان کسر حجمی مناسب نیز، می‌توان طراحی مناسب و بهینه‌ای روی این استوانه‌ها داشت.

۱- کارشناس ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد خمینی شهر، باشگاه پژوهشگران جوان، خمینی شهر، ایران.

۲- دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی - مهندسی، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران.

۳- کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی - مهندسی، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران.

## ۱- مقدمه

مواد هدفمند<sup>۱</sup> (FGM) از ترکیب دو ماده مختلف ساخته می‌شوند که معمولاً یکی فلز و دیگری سرامیک است، به گونه‌ای که خواص ترکیب حاصل به‌طور یکنواخت تغییر کرده و باعث ایجاد میکروساختار غیریکنواخت و یک ماکروساختار با تغییرات پیوسته می‌شود. اخیراً تحقیقات وسیعی در زمینه تحلیل استاتیکی استوانه‌های هدفمند ایزوتروپیک به روش‌های مختلف انجام شده است از جمله مقاله‌های هوروگان و چان [۱]. آنها حل استاتیکی دقیقی برای استوانه‌ها و دیسک‌های توخالی FGM ایزوتروپیک خطی ارائه کردند. توتونکو و اوزتورک [۲] نیز به تحلیل استاتیکی استوانه‌های FGM ایزوتروپیک پرداختند. آنها با استفاده از تئوری بی‌نهایت کوچک الاستیسیته حل دقیقی برای تحلیل تنش در لوله‌ها و کره‌های FGM تحت فشار داخلی ارائه کردند. جباری و همکارانش [۳] یک حل برای میدان تنش مکانیکی و حرارتی استوانه‌های توخالی FGM ارائه دادند. توتونکو [۴] در کار دیگری یک روش حل با استفاده از سری‌های توانی برای میدان تنش و جابه‌جایی استوانه‌های توخالی FGM معرفی کرد. لی و پنگ [۵] نیز یک روش جدید برای تحلیل تنش استوانه‌های ایزوتروپیک FGM با تغییرات دلخواه خواص مکانیکی معرفی کردند. آنها ابتدا مسئله را به یک معادله انتگرالی فردهولم تبدیل و سپس آن را با بسط چندجمله‌ای‌های لژاندر حل کردند. توتونکو و تمل [۶] با استفاده از روش توابع متمم، میدان تنش و جابه‌جایی را در استوانه‌های توخالی FGM در حالت متقارن محوری معرفی کردند. نای و باترا [۷] با استفاده از سری‌های فوریه و فروبینیوس استوانه‌ای را با سطح داخلی غیر دایروی و سطح خارجی دایروی تحلیل کردند. آنها استوانه را ارتوتروپیک و خواص مکانیکی را به‌صورت توانی در راستای شعاعی متغیر در نظر گرفتند. یه و شنگ [۸] نیز اثر لبه‌های آزاد را در تحلیل استوانه‌های ارتوتروپیک چند لایه تحت بار عرضی متقارن محوری به روش معادله

فضا-حالت ارائه کردند. سبحانی عراق و یاس [۹] تحلیل استاتیکی و ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌های ارتوتروپیک را که به‌طور هدفمند و پیوسته تقویت شده‌اند به روش تئوری الاستیسیته سه بعدی ارائه کردند.

روش بدون المان در حل برخی از مسائل نیز به کار گرفته شده است. به عنوان مثال اسلادک و همکارانش [۱۰] با استفاده از روش MLPG<sup>۲</sup> به تحلیل استاتیکی در مسائل دو بعدی و جامدات الاستیک/ویسکوالاستیک خطی و غیر ایزوتروپیک با تغییرات پیوسته خواص مکانیکی پرداختند. آنها از تابع شکل MLS<sup>۳</sup> برای تقریب کمیت‌های فیزیکی در معادله‌های انتگرالی مرزی محلی (LBIEs<sup>۴</sup>) استفاده کردند. چینگ و یین [۱۱] استوانه FGM ایزوتروپیک تحت فشار داخلی را به روش MLPG و با استفاده از بردار پایه MLS تحلیل کردند. اسلادک و همکارانش [۱۲] یک روش بدون المان بر مبنای معادلات انتگرالی مرزی محلی و تقریبهای MLS برای تحلیل انتقال حرارت گذرا در محیطهای FGM ارائه کردند. ژیلهولی و همکارانش [۱۳] نیز از روش MLPG برای آنالیز دو بعدی تغییر شکلهای دینامیکی و استاتیکی FGMها استفاده کردند. آنها تحلیل خود را برای دیسک دوار FGM ارتوتروپیک و استوانه FGM توخالی تحت فشار انجام دادند. اسلادک و همکارانش [۱۴] فرمولاسیون<sup>۵</sup> LIE را برای مسائل FGM متقارن محوری به دست آوردند و برای استوانه تحت فشار داخلی به روش بدون المان توزیع تنش را محاسبه کردند. ژائو و لیو [۱۵] پاسخ کماتش پل‌های پوسته استوانه‌ای FGM را تحت بار فشاری محوری و حرارتی ارائه کردند. فرمول‌بندی آنها بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پوسته‌ها و روش بدون المان  $kp$ -Ritz بود. اما در نزدیکترین کارها، تحلیل‌های استاتیکی، ارتعاشات آزاد و اجباری، دینامیکی و انتشار موج تنش در استوانه‌های FGM ایزوتروپیک به روش بدون المانی مشابه روش به کار گرفته شده در این مقاله، انجام شده است [۱۶-۱۹].

2- Meshless Local Petrov-Galerkin

3- Moving Least Square

4- Local Boundary Integral Equations

5- Local Integral Equations

1- Functionally Graded Material

## ۲- معادلات حاکم

روش بدون المان به کار گرفته شده بر فرم ضعیف معادله تعادل، رابطه (۱)، مبتنی است:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta(\boldsymbol{\varepsilon}) dv - \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} ds = 0 \quad (1)$$

در رابطه فوق  $\Omega$  حوزه حل مسئله و  $\Gamma$  قسمتی از این حوزه است که نیروی سطحی بر آن اثر می کند. همچنین پارامترهای  $\boldsymbol{\sigma}$ ،  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ،  $\mathbf{F}$  و  $\mathbf{u}$  به ترتیب بردارهای تنش، کرنش، نیروی خارجی و بردار جابه جایی هستند. بردارهای تنش و کرنش در مسائل مقارن محوری به شکل زیر است:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{rz}]^T \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_z, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{rz}]^T$$

در این مسائل بردار تنش با بردار کرنش به شکل زیر در ارتباط است:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

برای مسائل ارتوتروپیک در حالت تقارن محوری، ماتریس  $\mathbf{D}$  طبق رابطه زیر بیان می شود:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$c_{11} = \frac{1 - \nu_{23} \nu_{32}}{E_y E_z \Delta}, \quad c_{22} = \frac{1 - \nu_{31} \nu_{13}}{E_1 E_z \Delta}$$

$$c_{33} = \frac{1 - \nu_{21} \nu_{12}}{E_1 E_y \Delta}, \quad c_{55} = G_{12}$$

$$c_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31} \nu_{23}}{E_y E_z \Delta}, \quad c_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12} \nu_{31}}{E_1 E_z \Delta} \quad (5)$$

$$c_{13} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21} \nu_{32}}{E_y E_z \Delta}$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{32} \nu_{23} - \nu_{21} \nu_{12} - \nu_{13} \nu_{31} - 2\nu_{32} \nu_{21} \nu_{13}}{E_1 E_y E_z}$$

## ۳- فرمول بندی روش بدون المان

برای تقریب میدان جابه جایی از توابع کل MLS (حداقل مربعات متحرک) استفاده شده است که بر اساس این تقریب متغیر میدان،  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ ، در نقطه  $\mathbf{X}(r, z)$  به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \sum \Phi_i \hat{\mathbf{u}}_i \quad (6)$$

در این مقاله، در کاری جدید تحلیل استاتیکی استوانه های FGM ارتوتروپیک تحت فشار داخلی بررسی شده است. علاوه بر اینکه این استوانه ها کوتاه (دارای شرایط مرزی اساسی) است از یک روش بدون المان نیز استفاده شده است. به این منظور یک مدل مقارن محوری در نظر گرفته شده که خواص مکانیکی ماده در راستای شعاع متناسب با تغییرات کسر حجمی مواد، متغیر می باشد. یکی از مزایای روش های بدون المان در مقابل روش های اجزا محدود، به کار گرفتن توابع شکل هموار است. از آنجایی که میدان تنش با مشتق گرفتن از میدان جابه جایی به دست می آید بنابراین در روش های بدون المان علاوه بر میدان جابه جایی، میدان تنش پیوسته و همواری ارائه می شود. با توجه به این ویژگی منحصر به فرد در روش های بدون المان به محاسبات اضافی بعد از حل، نیاز نیست. نتایج حاصل از روش های بدون المان می تواند در طراحی دقیق استوانه های FGM بسیار مفید باشد. در این مقاله یک روش بدون المان ابتکاری به کار گرفته شده است. این روش تا حد زیادی به روش بدون المان گالرکین (EFG) شباهت دارد، با این تفاوت که برای اعمال شرایط مرزی اساسی، از تابع تبدیل استفاده شده است. در روش EFG به واسطه اینکه شرایط مرزی توسط ضرایب لاگرانژ اعمال می شود، ابعاد دستگاه معادلات و متعاقب آن حجم محاسبات افزایش چشمگیری پیدا خواهد کرد. اما استفاده از تابع تبدیل در این مقاله، موجب ثابت ماندن ابعاد دستگاه معادلات شده و متعاقب آن حجم محاسبات نسبت به روش EFG کاهش می یابد. لذا در کار حاضر علاوه بر اینکه یک روش بدون المان جدید و بسیار دقیق برای تحلیل استوانه های ارتوتروپیک FGM به کار گرفته شده است، این مسئله برای استوانه های کوتاه دارای تکیه گاه (اعمال شرایط مرزی اساسی) نیز انجام شده است. همچنین برنامه ای برای روش اجزا محدود توسعه داده شده و نتایج دو روش در شرایط شبکه گرهی یکسان (با المان های مستطیلی دوخطی) با یکدیگر و با کارهای قبلی مقایسه شده است. اثرات طول و ضخامت استوانه، توان کسر حجمی توزیع مواد، نوع چیدمان مواد و همچنین اعمال شرایط مرزی اساسی بر توزیع تنش و میدان جابه جایی این استوانه ها بررسی شده است.

رابطه (۱۶) به‌ازای هر بردار  $\delta(\hat{u})$  دلخواه برقرار است. بنابراین را می‌توان به آن‌را به‌صورت زیر نوشت و سپس دستگاه معادلات را دسته‌بندی نمود:

$$\mathbf{k}\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{f} \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{U}} = [(\hat{u}_r)_1, (\hat{u}_z)_1, \dots, (\hat{u}_r)_N, (\hat{u}_z)_N]^T$$

که  $N$  تعداد کل گره‌ها می‌باشد و:

$$\mathbf{k} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv, \quad \mathbf{f} = \int_{\Gamma} \Phi^T \mathbf{F} ds \quad (18)$$

برای انتگرال‌گیری عددی در رابطه فوق، حوزه حل مسئله توسط سلول‌های پس‌زمینه دو بعدی، که داخل هر کدام نقاط گوس قرار دارد، شبکه‌بندی می‌شود. سپس ماتریس سختی کل،  $\mathbf{k}$ ، به‌واسطه انتگرال‌گیری بر روی تمام نقاط گوس داخل حوزه حل مسئله،  $\Omega$ ، به‌صورت عددی به‌دست می‌آید. بردار نیرو،  $\mathbf{f}$ ، نیز به‌صورت مشابه به‌واسطه انتگرال‌گیری بر روی تمام نقاط گوس روی مرز  $\Gamma$  شکل می‌گیرد.

همانگونه که مشاهده شد، رابطه (۱۷) برحسب میدان جابه‌جایی تعمیم یافته ارائه شده است زیرا توابع شکل  $MLS$  فاقد خاصیت دلتای کرونیگر هستند. لذا رابطه (۱۷) باید برحسب میدان جابه‌جایی حقیقی ارائه شود تا شرایط مرزی اساسی در آن اعمال شود. در این‌گونه مسائل استفاده از تابع تبدیل یکی از مهمترین شیوه‌های اعمال شرایط مرزی اساسی است. در این روش با تصحیح مقادیر توابع شکل در گره‌ها، خاصیت دلتای کرونیگر برای تابع شکل ایجاد می‌شود [۲۱]. بنابراین با ایجاد خاصیت دلتای کرونیگر، شرایط مرزی اساسی مانند روش اجزا محدود اعمال می‌شود. در این روش بردارهای جابه‌جایی حقیقی و تعمیم یافته طبق رابطه زیر در ارتباط هستند:

$$\mathbf{U} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{U}} \quad (19)$$

$$\mathbf{U} = [(u_r)_1, (u_z)_1, \dots, (u_r)_N, (u_z)_N]^T \quad (20)$$

در رابطه فوق،  $\mathbf{T}$ ، ماتریس انتقال است و به این صورت تعریف می‌شود:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \Phi_1(x_1) & \circ & \Phi_2(x_1) & \circ & \dots & \circ & \Phi_N(x_1) & \circ \\ \circ & \Phi_1(x_1) & \circ & \Phi_2(x_1) & \circ & \dots & \circ & \Phi_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_1(x_N) & \circ & \Phi_2(x_N) & \circ & \dots & \circ & \Phi_N(x_N) & \circ \\ \circ & \Phi_1(x_N) & \circ & \Phi_2(x_N) & \circ & \dots & \circ & \Phi_N(x_N) \end{bmatrix} \quad (21)$$

در رابطه فوق  $\hat{u}_i$  بردار تغییر مکان مجازی (تعمیم یافته) گره‌ها می‌باشد که طبق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n]^T \quad (7)$$

$\Phi_i(\mathbf{X})$  تابع شکل  $MLS$  گره  $X_i$  در نقطه  $\mathbf{X}$  است و به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Phi_i(\mathbf{X}) = \underbrace{\mathbf{P}^T(\mathbf{X})[\mathbf{M}(\mathbf{X})]^{-1} \mathbf{w}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) \mathbf{P}(\mathbf{X}_i)}_{(1 \times 1)} \quad (8)$$

در رابطه فوق  $w$ ، تابع وزن می‌باشد که در این مقاله از تابع وزن اسپیلاین مرتبه سوم استفاده شده است. همچنین  $\mathbf{P}(\mathbf{X})$  بردار پایه و  $\mathbf{M}(\mathbf{X})$  ماتریس ممان می‌باشند که طبق روابط زیر تعریف می‌شوند [۲۰]:

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}) = [1 \ r \ z]^T \quad (9)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{X}) = \left[ \sum_{i=1}^n w(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) \mathbf{P}(\mathbf{X}_i) \mathbf{P}^T(\mathbf{X}_i) \right] \quad (10)$$

توابع شکل  $MLS$  بردار جابه‌جایی،  $\mathbf{u}$  را برای مسائل متقارن محوری به‌صورت رابطه زیر تقریب می‌زند:

$$\mathbf{u} = [u_r, u_z]^T = \Phi \hat{\mathbf{u}} \quad (11)$$

که در رابطه فوق:

$$\hat{\mathbf{u}} = [(\hat{u}_r)_1, (\hat{u}_z)_1, \dots, (\hat{u}_r)_n, (\hat{u}_z)_n]^T \quad (12)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \circ & \Phi_2 & \circ & \dots & \circ & \Phi_n & \circ \\ \circ & \Phi_1 & \circ & \Phi_2 & \dots & \circ & \Phi_n & \circ \end{bmatrix} \quad (13)$$

بردار کرنش به‌وسیله جمله‌های مقادیر مجازی گره‌ها، به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \quad (14)$$

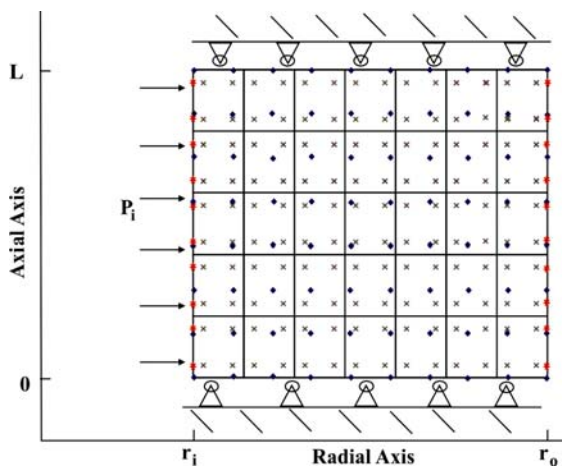
به‌طوری‌که ماتریس  $\mathbf{B}$  به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} & \circ & \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} & \circ & \dots & \circ & \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} & \circ \\ \frac{\Phi_1}{r} & \circ & \frac{\Phi_2}{r} & \circ & \dots & \circ & \frac{\Phi_n}{r} & \circ \\ \circ & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \circ & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \dots & \circ & \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} & \circ \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (15)$$

که در ماتریس فوق  $n$  تعداد گره‌های مؤثر است که در هر گره به‌صورت مجزا محاسبه می‌شود. با جایگذاری روابط (۳)، (۱۱) و (۱۴) در رابطه (۱) این رابطه به‌دست می‌آید:

$$\delta(\hat{\mathbf{u}})^T \left( \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \right) \hat{\mathbf{u}} - \delta(\hat{\mathbf{u}})^T \int_{\Gamma} \Phi^T \mathbf{F} ds = 0 \quad (16)$$

۵۶×۴۶ در نظر گرفته شد. در دو روش بدون المان و اجزا محدود، شبکه‌های گرهی یکسان در نظر گرفته شده است. در روش بدون المان برای استوانه‌های بلند (حالت کرنش صفحه‌ای) سلول‌هایی به تعداد ۵۵×۲۵ و برای استوانه‌های کوتاه به تعداد ۵۵×۴۵ منظور شد. برای انتگرال‌گیری روی سلول‌ها نیز نقاط گوس ۲×۲ چیده شده است. همچنین در مرز داخلی استوانه به دلیل اعمال فشار داخلی، سلول‌های یک بعدی با ۲ نقطه گوس در نظر گرفته شده است. شکل (۱) نمونه‌ای از شبکه گرهی ۸×۱۰ را با نقاط توپر، توزیع نقاط گوس با علامت × و نقاط گوس یک بعدی با علامت \* را برای استوانه‌ای با سلول‌هایی به تعداد ۷×۵ نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که دو سر این استوانه در دو جهت محوری و شعاعی مقید و تحت فشار داخلی  $P_i$  قرار دارد.



شکل (۱) طرح شماتیک از ناحیه حل مسئله، توزیع گره و نقاط گوس.

### ۱-۵- اعتبار سنجی نتایج

ابتدا استوانه‌ای FGM ایزوتروپیک که مدول الاستیسیته آن از شعاع داخلی تا شعاع خارجی طبق رابطه (۲۳) تغییر می‌کند در نظر گرفته شده است. این استوانه بلند (حالت کرنش صفحه‌ای) و تحت فشار داخلی،  $P_i$  قرار دارد. در این استوانه نسبت مدول الاستیسیته سطح خارجی به مدول الاستیسیته سطح داخلی،  $E_o/E_i = 10$ ، ضریب پواسون ثابت و  $\nu = 0.3$  است. همچنین در این استوانه نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی  $r_i/r_o = 0.5, 0.8$  است. تغییرات

با استفاده از رابطه (۱۹) رابطه (۱۷) به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\hat{\mathbf{k}}\mathbf{U} = \hat{\mathbf{f}} \quad (22)$$

$$\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{T}^{-T} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{T}^{-1}, \quad \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^{-T} \cdot \mathbf{f}$$

با توجه به اینکه رابطه فوق برحسب میدان جابه‌جایی حقیقی ارائه شده لذا در این معادله، شرایط مرزی اساسی با منطقی مشابه منطبق روش اجزا محدود اعمال می‌شود.

### ۴- خواص مکانیکی در استوانه‌های FGM

استوانه‌ای با شعاع داخلی  $r_i$  شعاع خارجی  $r_o$  و طول  $L$  را در نظر بگیرید. خواص مکانیکی این استوانه در راستای شعاعی به طور پیوسته تغییر می‌کند. نوع این تغییرات تأثیر بسیار زیادی بر رفتار استاتیکی استوانه دارد که در ادامه بررسی می‌شود. تاکنون چندین مدل برای این تغییرات ارائه شده که پرکاربردترین آنها، مدل کسر حجمی است. در این مدل، خواص مکانیکی در راستای شعاع، طبق رابطه زیر تغییر می‌کند:

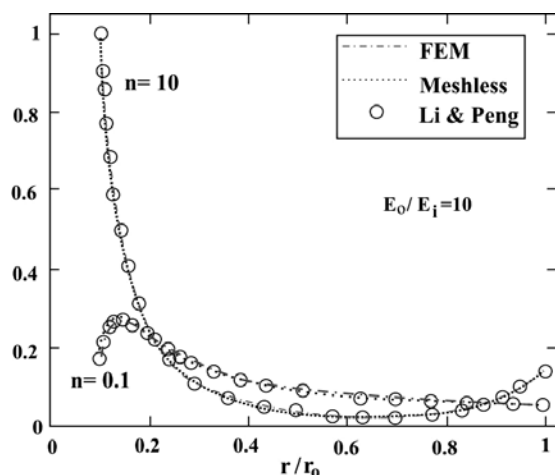
$$V_f(r) = \left( \frac{r^n - r_i^n}{r_o^n - r_i^n} \right) \quad (23-الف)$$

$$p = p_i + V_f(r)(p_o - p_i) \quad (23-ب)$$

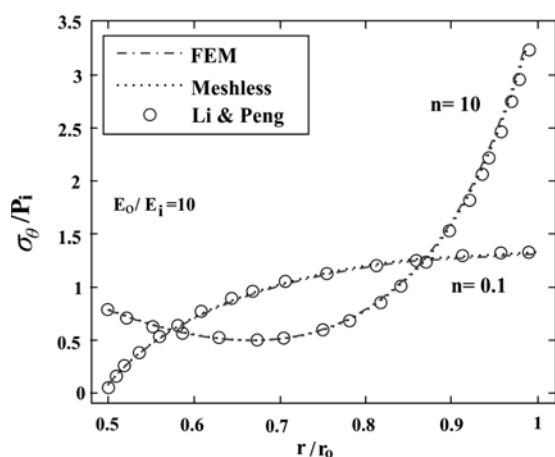
در روابط فوق  $V_f$  بیانگر کسر حجمی ماده (جنس لایه خارجی)،  $n$  توان کسر حجمی،  $p$  بیانگر خواص مکانیکی ماده و اندیس‌های  $i$  و  $o$  بیانگر لایه داخلی و لایه خارجی جسم هستند.

### ۵- مثال‌های حل شده و نتایج آن

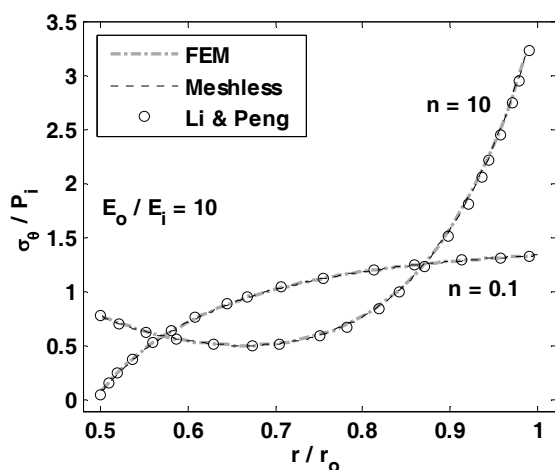
در این مرحله ابتدا دقت روش بدون المان به کار گرفته با مقایسه نتایج حاصل برای استوانه‌های FGM ایزوتروپیک از این روش با نتایج حاصله از FEM و کارهای قبلی منتشر شده و نیز نتایج حاصل از استوانه‌های FGM ارتوتروپیک با استوانه‌های ارتوتروپیک چند لایه بررسی شده است. در نهایت میدان تنش و جابه‌جایی برای استوانه‌های FGM ارتوتروپیک با طول بلند (حالت کرنش صفحه‌ای) و طول کوتاه (اعمال شرایط مرزی اساسی) ارائه می‌شود. در تحلیل‌های مذکور برای استوانه‌های بلند (حالت کرنش صفحه‌ای) یک شبکه گرهی به تعداد ۵۶×۲۶ و برای استوانه‌های کوتاه به تعداد



شکل (۲-الف) تنش محیطی نرمالیزه در راستای شعاع استوانه FGM ایزوتروپیک برای  $r_i/r_o = 0.1$ .



شکل (۲-ب) تنش محیطی نرمالیزه در راستای شعاع استوانه FGM ایزوتروپیک برای  $r_i/r_o = 0.5$ .



تنش محیطی ( $\sigma_{\theta}/P_i$ ) در راستای شعاع استوانه و به ازای توان کسر حجمی  $n=10, 0.1$  در شکل‌های (۲-الف) و (۲-ب) آمده است. در این شکل مشاهده می‌شود که نوع تغییرات مدول الاستیسیته تأثیر به‌سزایی بر توزیع تنش دارد. ضمن اینکه از مقایسه نتایج حاصله از دو روش بدون المان و اجزا محدود و نتایج ارائه شده توسط لی و پنگ [۵]، مشخص می‌شود که روش بدون المان به کار گرفته شده از دقت کافی و بسیار بالایی در تحلیل این نوع مسائل برخوردار است. علاوه بر این از مقایسه شکل‌های (۲-الف) و (۲-ب) اثر توان کسر حجمی و ضخامت استوانه بر توزیع تنش محیطی قابل استنباط است.

در مرحله دوم اعتبار سنجی، توزیع تنش استوانه FGM ارتوتروپیک و استوانه همگن چند لایه ارتوتروپیک مقایسه شده است. توان کسر حجمی استوانه FGM،  $n=1$  و ترکیبی از دو ماده ارتوتروپیک گرافیت-اپوکسی در لایه داخلی و شیشه-اپوکسی در لایه خارجی است. خواص مکانیکی این دو ماده در جدول (۱) گزارش شده است. استوانه‌های دو و سه لایه همگن نیز تغییرات استوانه FGM را تقریب می‌زند. این استوانه‌ها بلند (شرایط کرنش صفحه‌ای) تحت فشار داخلی،  $P_i$ ، و با نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی،  $r_i/r_o = 0.5$ ، در نظر گرفته شده است. توزیع تنش‌های محیطی و شعاعی حاصله از روش بدون المان و اجزا محدود برای این استوانه‌ها به ترتیب در شکل‌های (۳-الف) و (۳-ب) آمده است. همانطور که مشاهده می‌شود افزایش تعداد لایه‌ها در استوانه‌های چند لایه از دو به سه باعث نزدیکتر شدن میدان تنش به میدان تنش استوانه FGM می‌شود و همچنین مشاهده می‌شود که دو روش بدون المان و اجزا محدود جواب‌های بسیار مشابهی دارند. از طرفی همانطور که مشاهده می‌شود برای استوانه‌های چند لایه تغییرات تنش محیطی در بین لایه‌ها ناپیوسته ولی برای تنش شعاعی پیوسته (شرط جدا نشدن لایه‌ها) است.

## ۲-۵- استوانه‌های FGM ارتوتروپیک در حالت

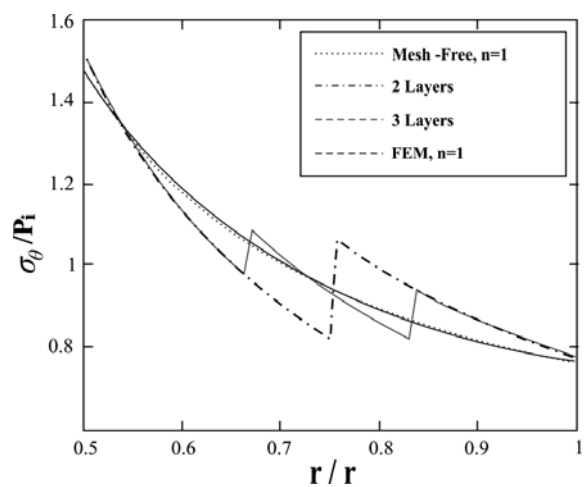
### کرنش صفحه‌ای

در این مرحله، به منظور بررسی اثرات توان کسر حجمی، ضخامت استوانه و نوع چیدمان مواد، سه مدل استوانه FGM ارتوتروپیک بلند (شرایط کرنش صفحه‌ای) که ترکیبی از دو ماده گرافیت-اپوکسی و شیشه-اپوکسی در نظر گرفته شده است. این استوانه‌ها تحت فشار داخلی  $P_i = 10 \text{ MPa}$  قرار دارد و خواص مکانیکی آنها در راستای شعاع، طبق رابطه (۲۳) تغییر می‌کند.

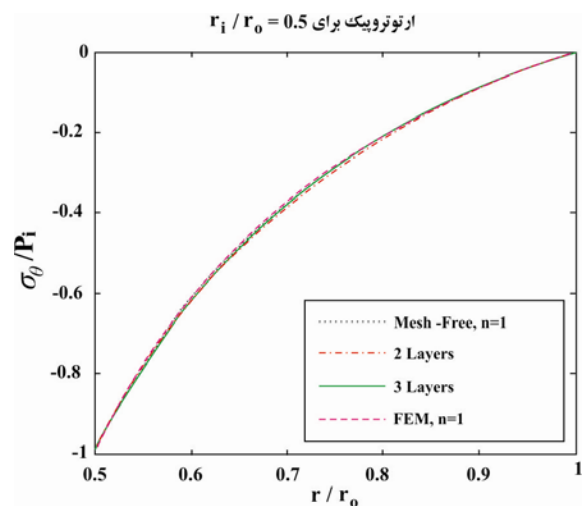
مدل اول استوانه‌هایی با ابعاد  $r_i = 0.5, r_o = 1 (m)$  است که گرافیت-اپوکسی در سطح داخلی و شیشه-اپوکسی در سطح خارجی استوانه قرار دارد. توزیع تنش محیطی و شعاعی نرمالیزه و همچنین توزیع جابه‌جایی شعاعی برای استوانه‌های همگن از جنس شیشه-اپوکسی و گرافیک-اپوکسی و همچنین استوانه‌های FGM با توان کسر حجمی  $n = -10, 10$  به ترتیب در شکل‌های (۴-الف) تا (۴-ج) ارائه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود مقدار توان کسر حجمی تأثیر بزرگتری بر توزیع تنش محیطی و میدان جابه‌جایی شعاعی نسبت به توزیع تنش شعاعی دارد. چنان‌که مشاهده می‌شود مقدار تنش شعاعی از مقدار فشار داخلی در سطح داخلی تا صفر در سطح خارجی به صورت یکنواخت تغییر می‌کند (شکل ۴-الف). از طرفی قابل مشاهده است که میدان تنش برای دو ماده همگن یکسان است ولی برای مواد FGM با توان کسر حجمی متفاوت میدان تنش متفاوتی دیده می‌شود. لذا مقدار توان کسر حجمی بر مقدار و مکان ماکزیمم و مینیمم تنش تأثیر گذار است که با انتخاب بهترین مقدار توان، مناسب‌ترین توزیع تنش را هم می‌توان به دست آورد. از طرفی مشاهده می‌شود که میدان جابه‌جایی برای استوانه‌های FGM مابین استوانه‌های همگن به دست می‌آید و افزایش مقدار توان کسر حجمی میدان جابه‌جایی نزدیک‌تر به پاسخ گرافیت-اپوکسی می‌دهد، شکل (۴-ج)، که می‌تواند به دلیل افزایش مقدار این ماده در استوانه باشد. در نمودار توزیع تنش محیطی مشاهده می‌شود که به ازای مقدار توان کسر حجمی،  $n = 10$ ، بیشترین تغییرات از نمودار مربوط به استوانه همگن در سطح خارجی و نزدیکی آن می‌باشد در حالی که این انحراف برای توان کسر

جدول (۱) خواص مکانیکی مواد ارتوتروپیک مورد مطالعه.

خواص مکانیکی	گرافیت-اپوکسی	شیشه-اپوکسی
$E_1$ (GPa)	۱۵۵	۵۰
$E_2$ (GPa)	۱۲/۱	۱۵/۲
$E_3$ (GPa)	۱۲/۱	۱۵/۲
$\nu_{23}$	۰/۴۵۸	۰/۴۲۸
$\nu_{13}$	۰/۲۴۸	۰/۲۵۴
$\nu_{12}$	۰/۲۴۸	۰/۲۵۴
$G_{12}$ (GPa)	۴/۴	۴/۷

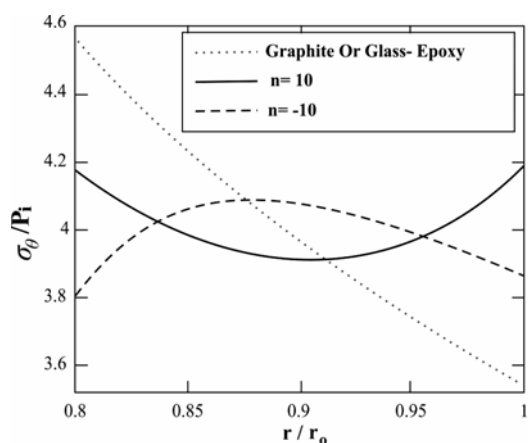


شکل (۳-الف) تنش محیطی نرمالیزه در راستای شعاع استوانه‌های FGM و چند لایه ارتوتروپیک برای  $r_i/r_o = 0.5$ .

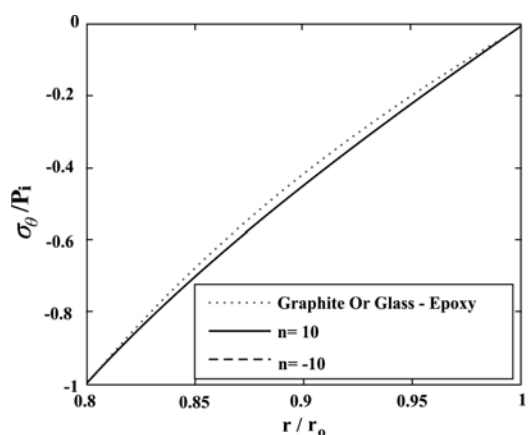


شکل (۳-ب) تنش شعاعی نرمالیزه در راستای شعاع استوانه‌های FGM و چند لایه ارتوتروپیک برای  $r_i/r_o = 0.5$ .

در استوانه مدل دوم با کاهش ضخامت نسبت به استوانه‌های مرحله قبل تأثیر ضخامت استوانه بر توزیع تنش و میدان جابه‌جایی به دست می‌آید. در این مرحله برای شعاع داخلی و خارجی استوانه به ترتیب،  $r_i = 0.78, r_o = 1(m)$ ، در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل از این تحلیل در شکل‌های (۵-الف) تا (۵-ج) ارائه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود باز هم تغییرات تنش شعاعی تقریباً یکسان و یکنواخت از فشار داخلی در سطح داخلی تا فشار خارجی (صفر) در سطح خارجی می‌باشد (شکل ۵-ب)، ولی در مقایسه با شکل (۴-ب) تغییرات سریعتر انجام می‌شود. تنش محیطی تغییرات شدیدتری نسبت به مرحله قبل و نسبت به استوانه‌های همگن دارد. مقدار تنش محیطی و همچنین مقادیر میدان جابه‌جایی نسبت به مرحله قبل خیلی بالاتر است. از طرفی با افزایش مقدار توان کسر حجمی، مقدار جابه‌جایی نیز افزایش می‌یابد.

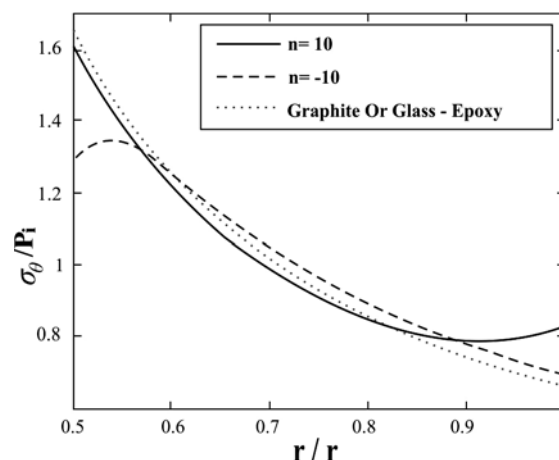


شکل (۵-الف) تنش محیطی نرمالیزه در راستای شعاع استوانه‌های FGM و همگن ارتوتروپیک بلند مدل دوم.

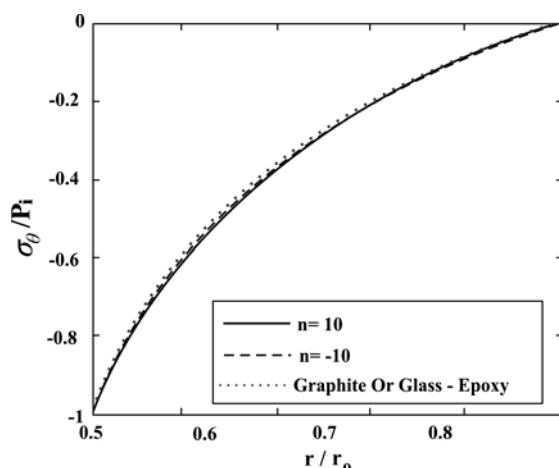


شکل (۵-ب) تنش شعاعی نرمالیزه در راستای شعاع استوانه‌های FGM و همگن ارتوتروپیک بلند مدل دوم.

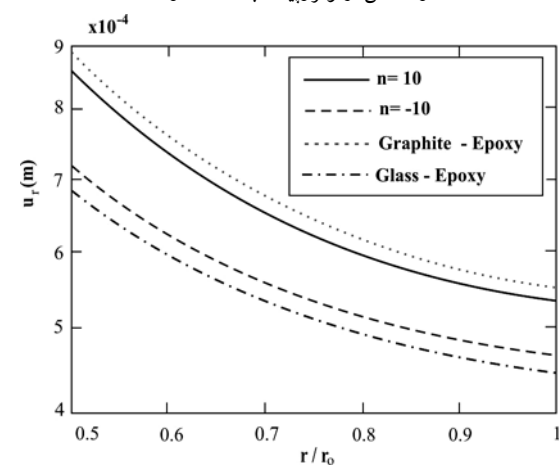
حجمی،  $n = -10$ ، در نزدیکی شعاع داخلی است. (شکل (۴-الف)). دلیل این پدیده می‌تواند وجود تغییرات شدید خواص مکانیکی و کسر حجمی FGM در این ناحیه باشد.



شکل (۴-الف) تنش محیطی نرمالیزه در راستای شعاع استوانه‌های FGM و همگن ارتوتروپیک بلند مدل اول.

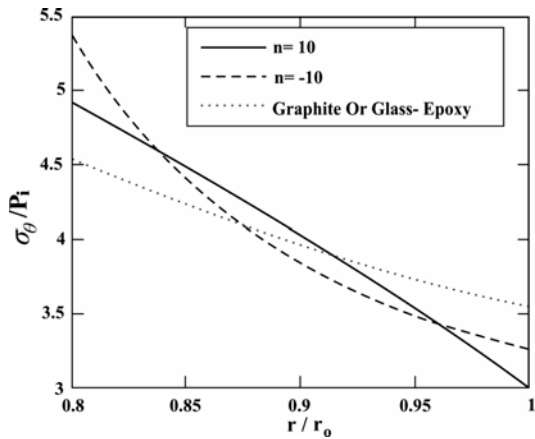


شکل (۴-ب) تنش شعاعی نرمالیزه در راستای شعاع استوانه‌های FGM و همگن ارتوتروپیک بلند مدل اول.

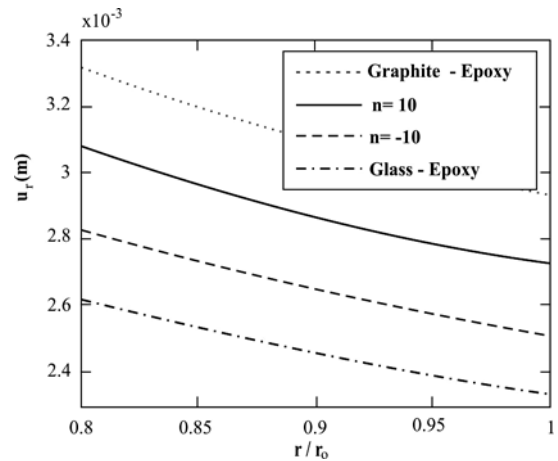


شکل (۴-ج) جابه‌جایی شعاعی در راستای شعاع استوانه‌های FGM و همگن ارتوتروپیک بلند مدل اول.

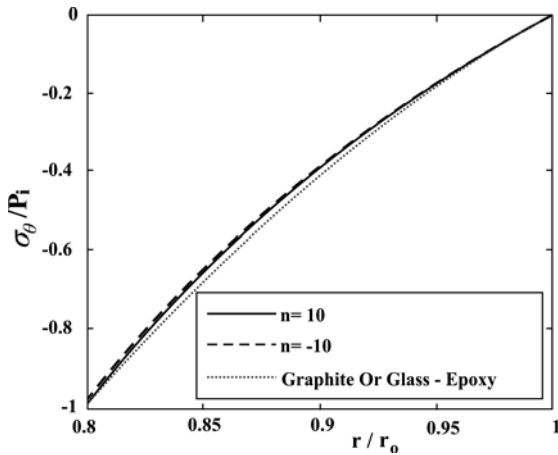




شکل (۵-ج) جابه‌جایی شعاعی در راستای شعاع استوانه‌های FGM و همگن ارتوتروپیک بلند مدل دوم.

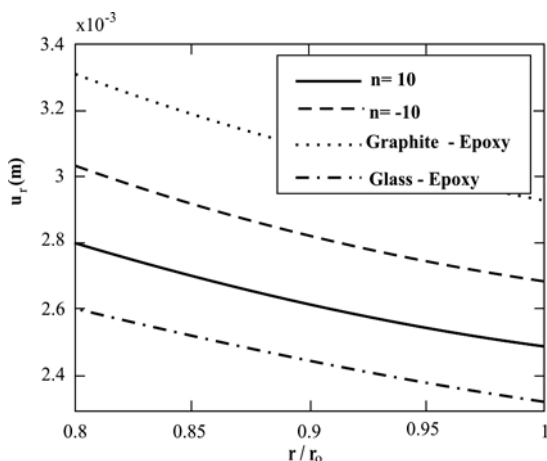


شکل (۵-ج) جابه‌جایی شعاعی در راستای شعاع استوانه‌های FGM و همگن ارتوتروپیک بلند مدل دوم.

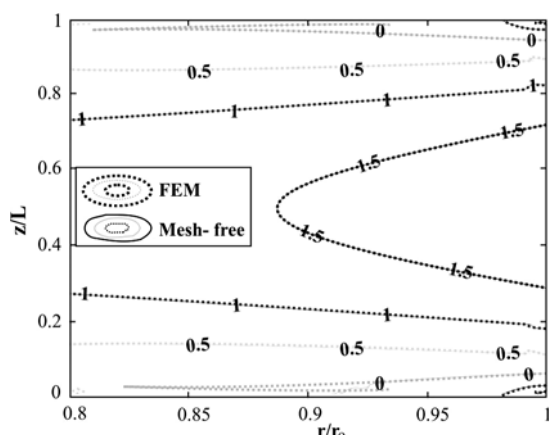


شکل (۶-ب) تنش شعاعی نرمالیزه در راستای شعاع استوانه‌های FGM و همگن ارتوتروپیک بلند مدل سوم.

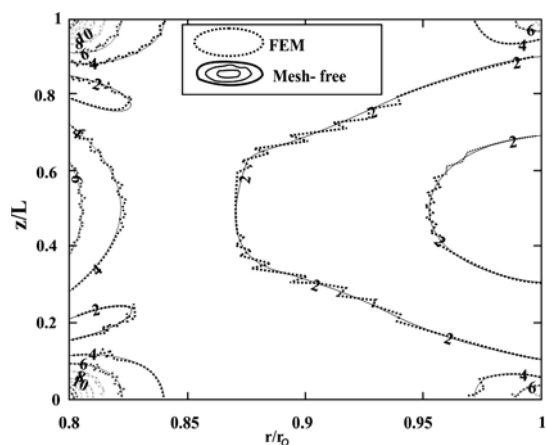
در استوانه مدل سوم، تأثیر نحوه چیدمان مواد بررسی شده است، به طوری که در لایه داخلی شیشه-اپوکسی و در لایه خارجی گرافیت-اپوکسی قرار گرفته است. در این استوانه شعاع داخلی و شعاع خارجی،  $r_i = 0.8, r_o = 1(m)$ ، در نظر گرفته شده است، لذا از مقایسه نتایج حاصل از این استوانه در شکل‌های (۵) و (۶) و استوانه مرحله قبل در شکل‌های (۵) تأثیر نحوه چیدمان بر توزیع تنش و میدان جابه‌جایی پدیدار می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود بازهم تغییرات تنش شعاعی تقریباً یکسان و یکنواخت از فشار داخلی در سطح داخلی تا فشار خارجی (صفر) در سطح خارجی است (شکل ۶-ب)، ولی در مقایسه با شکل (۵-ب) مشاهده می‌شود که روند معکوس شده است. بدین معنا که این بار همواره منحنی تغییرات تنش شعاعی برای استوانه همگن همواره بالاتر از دو منحنی دیگر قرار دارد. این نتیجه به دلیل معکوس شدن تغییرات کسر حجمی است. در شکل (۶-الف) مشاهده می‌شود که دامنه تغییرات تنش محیطی در استوانه‌های FGM برخلاف قبل نسبت به استوانه همگن بیشتر شده و تنشها نیز افزایش یافته است در حالی که همچنان بیشترین انحرافات از حالت همگن نیز نشانگر نحوه تغییرات کسر حجمی است. در شکل (۶-ج) مشاهده می‌شود که میدان جابه‌جایی استوانه FGM مابین استوانه‌های همگن قرار دارد و افزایش توان کسر حجمی موجب کاهش میدان جابه‌جایی شده است که نشانگر این است که هرچه حجم ماده با مدول بالاتر در استوانه بیشتر باشد، استوانه جابه‌جایی کمتری را از خود نشان می‌دهد.



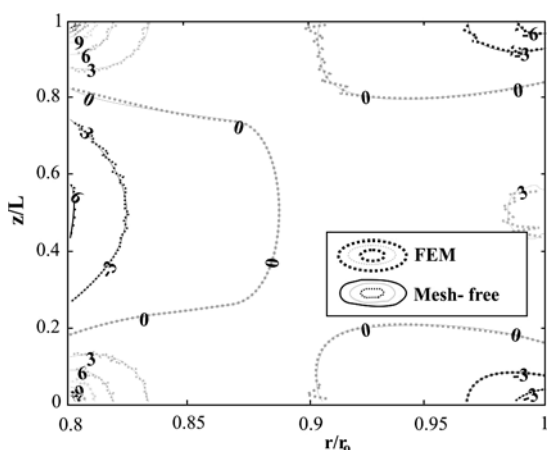
شکل (۶-ج) جابه‌جایی شعاعی در راستای شعاع استوانه‌های FGM و همگن ارتوتروپیک بلند مدل سوم.



شکل (۷-الف) توزیع تنش محیطی نرمالیزه  $(\sigma_{\theta}/P_i)$  استوانه FGM ارتوتروپیک کوتاه  $(n=10)$ .



شکل (۷-ب) توزیع تنش ون-میزز نرمالیزه  $(\sigma_{von}/P_i)$  استوانه FGM ارتوتروپیک کوتاه  $(n=10)$ .



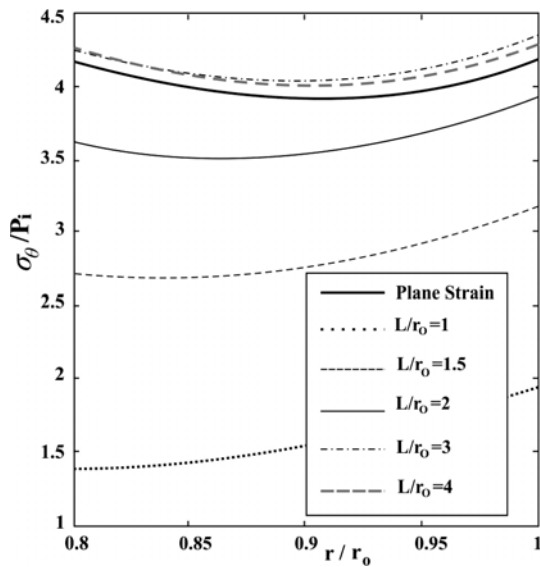
شکل (۷-ج) توزیع تنش محوری نرمالیزه  $(\sigma_z/P_i)$  استوانه FGM ارتوتروپیک کوتاه  $(n=10)$ .

### ۳-۵- استوانه‌های FGM ارتوتروپیک با طول کوتاه

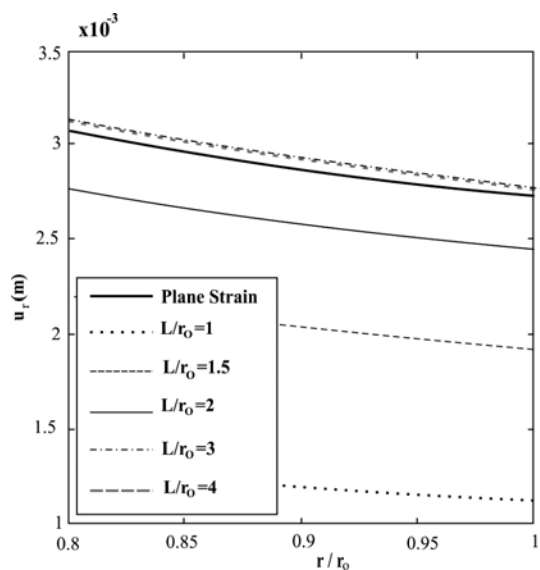
در این مرحله استوانه‌ای با طول  $L=1(m)$  و شعاع‌های داخلی و خارجی  $r_i=0.8, r_o=1(m)$  در نظر گرفته شده است. در این استوانه، گرافیت-اپوکسی در سطح داخلی و شیشه-اپوکسی در سطح خارجی قرار دارد و خواص مکانیکی در راستای شعاعی طبق رابطه (۲۳) با مقدار توان  $n=10$  تغییر می‌کند. این استوانه در حالی تحت فشار داخلی  $P_i=10MPa$  قرار دارد که دو سر آن در دو جهت محوری و شعاعی طبق شکل (۱) مقید شده است.

توزیع تنش‌های محیطی، ون میزز، محوری و برشی نرمالیزه در شکل‌های (۷-الف) تا (۷-د) و همچنین میدان‌های جابه‌جایی شعاعی و محوری در شکل‌های (۸-الف) و (۸-ب) ارائه شده است. از شکل‌های (۷) و (۸) مشاهده می‌شود که نتایج دو روش بدون المان و اجزا محدود مطابقت بسیار نزدیکی با یکدیگر دارند و همچنین نتایج روش بدون المان به علت استفاده از توابع شکل هموار، بسیار پیوسته‌تر و یکنواخت‌تر از نتایج روش اجزا محدود است. با توجه به تقارن تکیه‌گاه‌ها و بارگذاری‌ها نسبت به صفحه  $z/L=0.5$  توزیع تنش‌های محیطی، محوری و ون میزز و همچنین میدان جابه‌جایی شعاعی نسبت به این صفحه متقارن می‌باشد. شکل‌های (۷-الف) و (۷-ب) نشان می‌دهد که ماکزیمم تنش محیطی در سطح خارجی و ماکزیمم تنش ون میزز در سطح داخلی استوانه اتفاق می‌افتد. همچنین در شکل‌های (۷-ج) و (۷-د) هیچ تنش محوری و برشی به ترتیب در شعاع میانی و صفحه  $z/L=0.5$  استوانه دیده نمی‌شود. در شکل (۸) مشاهده می‌شود که ماکزیمم جابه‌جایی شعاعی در صفحه  $z/L=0.5$  اتفاق می‌افتد در حالی که در این صفحه جابه‌جایی محوری وجود ندارد. همچنین مشاهده می‌شود که مقادیر جابه‌جایی شعاعی بزرگتر از مقادیر جابه‌جایی محوری می‌باشد. از مقایسه شکل‌های (۵-الف) و (۷-الف) و همچنین شکل‌های (۵-ج) و (۸-الف) مشاهده می‌شود که کاهش طول استوانه و اعمال شرایط مرزی اساسی باعث کاهش نسبی مقادیر تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی می‌شود.

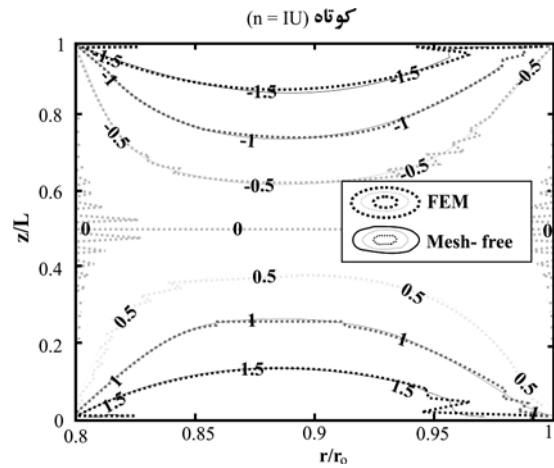
در نهایت به منظور بررسی اثر طول استوانه بر توزیع تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی استوانه قبلی به ازای مقادیر مختلف طول استوانه،  $L$ ، تحلیل شده است. توزیع تنش محیطی نرمالیزه و جابه‌جایی شعاعی در صفحه  $z/L = 0.5$  و در راستای شعاع به ترتیب در شکل‌های (۹-الف) و (۹-ب) ارائه شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار نسبت طول به شعاع خارجی،  $L/r_0$ ، مقادیر تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی افزایش یافته و به حالت کرنش صفحه‌ای نزدیک تر می‌شود.



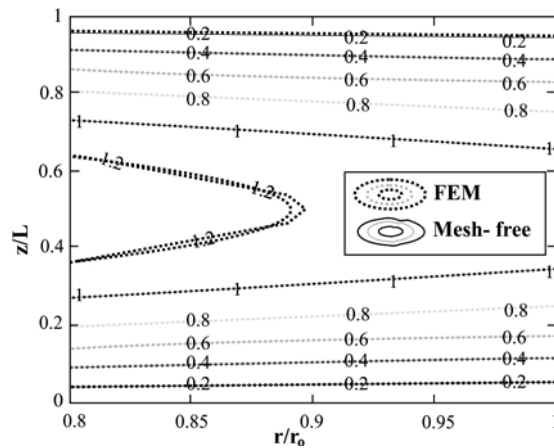
شکل (۹-الف) تنش محیطی نرمالیزه در راستای شعاع استوانه‌های FGM ارتوتروپیک به ازای مقادیر مختلف  $L/r_0$



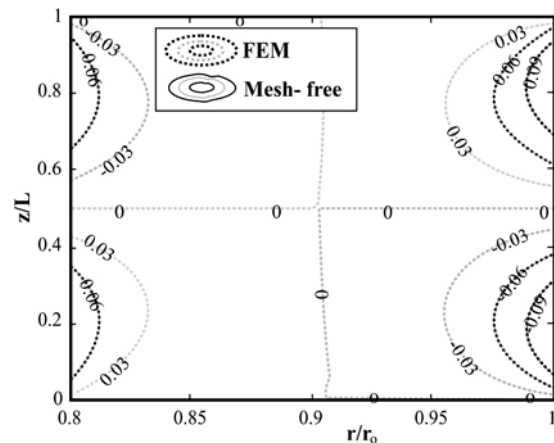
شکل (۹-ب) جابه‌جایی شعاعی در راستای شعاع استوانه‌های FGM ارتوتروپیک به ازای مقادیر مختلف  $L/r_0$



شکل (۷-د) توزیع تنش برشی نرمالیزه استوانه FGM ارتوتروپیک کوتاه ( $n=10$ ).



شکل (۸-الف) میدان جابه‌جایی شعاعی ( $u_r$  (mm)) استوانه FGM ارتوتروپیک کوتاه ( $n=10$ ).



شکل (۸-ب) میدان جابه‌جایی محوری ( $u_z$  (mm)) استوانه FGM ارتوتروپیک کوتاه ( $n=10$ ).

## ۶- نتیجه‌گیری

## مراجع

- [1] Horgan C.O., Chan A.M., The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials, *Journal of Elasticity*, 55(1), 1999, pp. 43–59.
- [2] Tutuncu N., Ozturk M., Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels, *Journal of Composite part B*, 32(8), 2001, pp. 683–686.
- [3] Jabbari M., Bahtui A., Eslami M.R., Axisymmetric mechanical and thermal stresses in thick long FGM cylinders, *Journal of Thermal Stresses*, 29(7), 2006, pp. 643–63.
- [4] Tutuncu N., Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties, *Engineering Structures*, 29(9), 2007, pp. 2032–35.
- [5] Li, X, Peng X., A Pressurized Functionally Graded Hollow Cylinder with Arbitrarily Varying Material Properties, *Journal of Elasticity*, 96, 2009, pp. 81–95.
- [6] Tutuncu N., Temel B., A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres, *Composite Structures*, 91(3), 2009, pp. 385–90.
- [7] Nie G.J., Batra R.C., Static deformations of functionally graded polar-orthotropic cylinders with elliptical inner and circular outer surfaces, *Composites Science and Technology*, 70, 2010, pp. 450–457.
- [8] Ye, J.Q., Sheng, H.Y., Free-edge effect in cross-ply laminated hollow cylinders subjected to axisymmetric transverse loads, *International Journal of Mechanical Sciences*, 45, 2003, pp. 1309–1326.
- [9] Sobhani Aragh B., Yas, M. H., Static and free vibration analyses of continuously graded fiber-reinforced cylindrical shells using generalized power-law distribution, *Acta Mechanica*, 215, 2010, pp. 155–173.

در این مقاله یک روش بدون المان برای تحلیل استاتیکی استوانه‌های FGM ارتوتروپیک تحت فشار داخلی به کار گرفته شد. (به این منظور یک مدل متقارن محوری که خواص مکانیکی ماده در راستای شعاع متناسب با تغییرات کسر حجمی مواد متغیر است، در نظر گرفته شد.) در روش بدون المان به کار گرفته شده از توابع شکل MLS به منظور تقریب میدان جابه‌جایی و از تابع تبدیل برای اعمال شرایط مرزی اساسی استفاده شد. در تحلیل‌های صورت گرفته، ابتدا نتایج حاصل برای استوانه‌های FGM ایزوتروپیک از دو روش بدون المان و اجزا محدود با هم و با کارهای قبلی منتشر شده، مقایسه و مطابقت بسیار خوبی دیده شد. همچنین میدان تنش استوانه‌های FGM ارتوتروپیک نیز با نتایج استوانه‌های ارتوتروپیک همگن چند لایه تأیید و نیز اثرات طول و ضخامت استوانه، توان کسر حجمی توزیع مواد، نوع چیدمان مواد و اعمال شرایط مرزی اساسی بر توزیع تنش و میدان جابه‌جایی این استوانه‌ها بررسی و نتایج زیر مشاهده شد:

- نتایج روش بدون المان به علت استفاده از توابع شکل هموار، بسیار پیوسته‌تر و یکنواخت‌تر از نتایج روش اجزا محدود است، در حالی که حجم محاسبات در این روش بیشتر از روش اجزا محدود می‌باشد.
- مقدار توان کسر حجمی و نوع چیدمان مواد نقش مؤثری بر میدان تنش و جابه‌جایی دارد. لذا با انتخاب مقدار مناسب برای توان می‌توان در استوانه‌های FGM ارتوتروپیک، طراحی بهینه داشت.
- جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌های FGM ارتوتروپیک، رفتاری نزدیک به استوانه‌های ایزوتروپیک ساخته از جنس غالب دارد.
- کاهش طول استوانه و اعمال شرایط مرزی اساسی موجب کاهش مقادیر تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی می‌شود.

- [19] Foroutan M., Moradi-Dastjerdi R., Dynamic analysis of functionally graded material cylinders under an impact load by a mesh-free method, *Acta Mechanica*, 219, 2011, pp. 281-290.
- [20] Lancaster P., Salkauskas K., Surface Generated by Moving Least Squares Methods. *Mathematics of Computation*, 37, 1981, pp. 141-158.
- [21] Li S., Liu W.K., Meshfree and particle methods and their applications., *Applied Mechanics Reviews*, 55, 2002, pp. 1-34.
- [10] Sladek J., Sladek, Zhang V., Stress analysis in anisotropic functionally graded materials by the MLPG method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29, 2005, pp. 597-609.
- [11] Ching H.K. Yen, S.C. Meshless local Petrov-Galerkin analysis for 2d functionally graded elastic solids under mechanical and thermal loads, *Journal Composite part B*, 36(3), 2005, pp. 223-40.
- [12] Sladek J., Sladek V., Zhang Ch., Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method, *Computational Materials Science*, 28(3-4), 2003, pp. 494-504.
- [13] Gilhooley D.F., Xiao, Batra J.R., McCarthy R.C., Two-dimensional stress analysis of functionally graded solids using the MLPG method with radial basis functions, *Computational Materials Science*, 41(4), 2008, pp. 467-81.
- [14] Sladek V., Sladek J., Zhang Ch., Local integral equation formulation for axially symmetric problems involving elastic FGM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32(12), 2008, pp. 1012-24.
- [15] Zhao X., Liew K.M., A mesh-free method for analysis of the thermal and mechanical buckling of functionally graded cylindrical shell panels, *Computational Mechanics*, 45, 2010, pp. 297-310.
- [16] Foroutan M., Moradi-Dastjerdi R., Sotoodeh-Bahreini R., Static analysis of FGM cylinders by a mesh-free method, *Steel and Composite Structures*, 12, 2012, pp. 1-11.
- [17] Mollarazi H.R., Foroutan M., Moradi-Dastjerdi R., Analysis of free vibration of functionally graded material (FGM) cylinders by a meshless method, *Journal of Composite Materials*, 46(5) 2011, pp. 507-515.
- [۱۸] مرادی دستجردی ر.، فروتن م.، پوراصغر ا.، تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری استوانه‌هایی از جنس مواد هدفمند به روش بدون المان، فصلنامه علمی پژوهشی مهندسی مکانیک جامدات، شماره ۵، ۱۳۸۸، صص ۶۹-۷۷.

