



تحلیل خمش و کمانش صفحه متخلخل دایروی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

علیرضا یادگاری نائینی^۱، اعظم قاسمی^{۲*}

* نویسنده مسئول: a_ghassemi@pmc.iaun.ac.ir

واژه‌های کلیدی

ماده متخلخل، ورق دایره‌ای، خمش، کمانش الاستیک، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

چکیده

مواد متخلخل دارای وزن سبک، انعطاف‌پذیر و مقاوم در برابر ترک‌های موئی می‌باشند، به همین دلیل امروزه با توسعه تکنولوژی موادی با ساختار متخلخل جهت کاربرد در صنایع مختلف تولید شده است. این ساختار در تیرها، صفحات و پوسته‌ها به طور وسیعی استفاده می‌شود. هدف اصلی این مقاله بررسی میزان تاثیر متخلخل روی خمش و بار بحرانی کمانش ورق در شرایط تقارن محوری به صورت تحلیلی است. بدین منظور یک ورق دایره‌ای با تکیه‌گاه ساده در لبه، تحت فشار یکنواخت شعاعی و توزیع یکنواخت فشار عمودی بررسی می‌شود. خواص مکانیکی ورق متخلخل به صورت ایزوتروپیک در صفحه و متغیر در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است. میدان جابه‌جایی مطابق تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بسط داده می‌شود. سپس با استفاده از اصل کار مجازی و اعمال روش حساب تغییرات، معادلات دیفرانسیل پایداری و معادلات خمش ورق به دست می‌آیند، در ادامه به کمک این معادلات و استفاده از روش گالرکین، خمش و کمانش ورق مورد نظر محاسبه می‌شود. بار کمانش برای انواع ضریب تخلخل محاسبه شده است که مشاهده می‌شود با افزایش ضریب تخلخل، بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. همچنین توزیع تنش و خیز در تحلیل خمشی ورق بدست آمده است. جهت صحت سنجی نتایج خمش و کمانش ورق مورد نظر، نتایج باورق همگن در تئوری کلاسیک مقایسه شده است.

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مکانیک، واحد نجف‌آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، اصفهان، ایران

۲- استادیار گروه مکانیک، واحد نجف‌آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، اصفهان، ایران

۱- مقدمه

مواد متخلخل، همان طور که از اسم آن‌ها پیداست، مواد جامدی هستند که در ساختار خود دارای حفراتی می‌باشند. این مواد دارای ساختار دو فازی هستند که یک فاز آن جامد (بدنه) و فاز دیگر مایع یا گاز می‌باشد که در طبیعت به وفور یافت می‌شوند. بسیاری از مواد طبیعی، مثل سنگ‌ها، خاک‌ها، بافت‌های زیستی (مانند استخوان یا چوب) و همینطور مواد ساخت بشر، مثل سیمان‌ها و سرامیک‌ها در زمره مواد متخلخل جای می‌گیرند. امروزه مواد متخلخل در زمینه‌های بسیار زیادی از علوم مهندسی کاربرد دارند، مانند: فیلتراسیون، مکانیک (آکوستیک، ژئومکانیک، مکانیک خاک، مکانیک سنگ)، مهندسی (مهندسی نفت، زیست پالایی، مهندسی عمران)، علوم زمین‌شناختی (هیدروژئولوژی، ژئولوژی نفت، ژئوفیزیک)، بیولوژی و بیوفیزیک، علم مواد و غیره.

یکی از پدیده‌های بسیار مهم که موجب شکست ورق‌ها می‌شود خمش و کمانش ورق است. لذا دانشمندان همواره در پی ساختن موادی هستند که در مقابل این پدیده‌ها، مقاومت خوبی داشته باشند. از طرفی تخلخل یک عیب مکانیکی است که عدم در نظر گرفتن آن در محاسبه بار کمانش و خمش ورق، باعث ایجاد خطا می‌گردد. ساختار مواد متخلخل مانند تیرها، ورق‌ها و صفحه‌ها به صورت گسترده در مسائل طراحی ساختمانی مورد استفاده قرار گرفته‌اند، همچنین در اغلب سازه‌های صنعتی، صفحات دایروی تحت فشار دیده می‌شوند. در طول چند سال اخیر مسائل خیز و کمانش صفحات متخلخل با ویژگی‌های متفاوت توسط نویسندگان زیادی توسعه یافت. بنهارت شرح کاملی را از تولید فرآیندهای فلز متخلخل و ساختار مواد متخلخل ارائه داد. برنامه‌های ساختاری و عملکردی در بخش‌های مختلف صنعتی مورد بحث قرار گرفتند [۱]. استاسویچ و همکاران، کمانش تیرهای متخلخل با خواص متغیر را توسط تئوری کلاسیک مورد بررسی قرار دادند. در این کار اثر تخلخل روی بار کمانش تیر بررسی شد [۲]. این

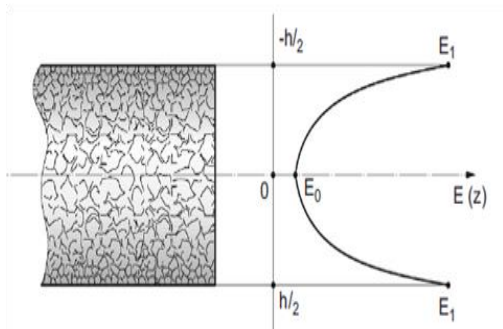
تحقیق باعث شد تا اثر تخلخل روی استحکام و کمانش تیر در شرایط مختلف مورد بررسی قرار گیرد. مگنوکوی و همکاران، خمش و کمانش ورق مستطیلی ساخته شده از مواد متخلخل را به وسیله تئوری کلاسیک بررسی کردند و نتایجی برای توزیع متقارن غیر خطی تخلخل روی ورق به دست آوردند [۳ و ۴]. جاسن و همکاران حل تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی را روی بار بحرانی کمانش ورق دایره‌ای ساخته شده از فلز متخلخل ایزوتروپیک همراه با دو لایه غیر متخلخل را توسط تئوری کلاسیک مورد مطالعه قرار دادند [۵].

تئوری کلاسیک به علت صرف نظر کردن از تغییر شکل‌های برشی دقت پایینی دارد، همین طور بار کمانش ورق‌های ضخیم در تئوری کلاسیک به صورت دقیق محاسبه نمی‌شود. اثر تغییر شکل‌های برشی را می‌توان با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول لحاظ نمود. ما و یانگ تحقیقی را در مورد خمش غیر خطی و پس از کمانش صفحه دایره‌ای با موضوع بارهای مکانیکی و حرارتی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی انجام دادند [۶]. مگنوکوی و همکاران خمش ورق مستطیلی ساخته شده از مواد متخلخل را توسط تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی انجام دادند [۷]. بلیسا و همکاران یک رویکرد غیرخطی با توجه به ثبات دینامیکی از فلز متخلخل ایزوتروپیک پوسته استوانه‌ای را تحت بار ترکیبی ارائه کردند. آن‌ها با ترکیبی از فشار خارجی و بار محوری محاسبات خود را انجام دادند و معادلات تحلیلی را توسط روش گالریکین حل کردند [۸]. دبوسکی و همکاران، ثبات دینامیکی ورق مستطیلی فلز متخلخل ایزوتروپیک را توسط تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی بررسی کردند [۹].

در این مقاله میدان جابه‌جایی مطابق تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول در نظر گرفته شده است. سپس روابط تنش-کرنش ورق متخلخل دایره‌ای بسط داده می‌شود. با استفاده از اصل کار مجازی و اعمال روش حساب تغییرات، معادلات دیفرانسیل پایدار و معادلات خمش ورق به دست می‌آیند. حل استاتیکی ورق دایره‌ای متخلخل در حالت

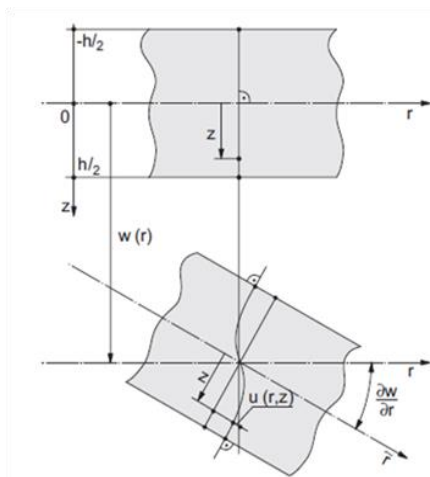
$j=0,1$ می‌باشد. ξ مختصات بی بعد تعریف می‌شود به صورت $\xi = z/h$ می‌باشد.

چوبی و لاکس در مقاله‌ای خواص مکانیکی را برای مواد متخلخل ارائه کردند [۱۰]. با توجه به نتایج بررسی شده در این مقاله، رابطه پارامتر بدون بعد چگالی و پارامتر بدون بعد متخلخل به صورت $e_m = 1 - \sqrt{1 - e_0}$ می‌باشد.



شکل (۱) طرحی از ورق متخلخل

مدل فیزیکی از تغییر شکل یک مقطع ورق (با تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی) در شکل (۲) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در ابتدا مقطع به صورت مسطح بوده که پس از تغییر شکل منحنی می‌شود.



شکل (۲) طرحی از تغییر شکل مقطعی از ورق در تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی

میدان جابه‌جایی با توجه به تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی در هر مقطع فرضی از ورق به صورت زیر می‌باشد:

تقارن محوری به وسیله معادلات خمش ورق محاسبه می‌شود. سپس با استفاده از معادلات دیفرانسیل پایداری، بار بحرانی کمانش با روش گالرکین محاسبه و تاثیر ضریب متخلخل روی بار بحرانی کمانش بررسی می‌شود. نتایج نشان می‌دهد با افزایش متخلخل ورق، بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد.

۲- جابه‌جایی ورق متخلخل

مسئله مورد نظر به دو قسمت تقسیم شده است. در قسمت اول ورق تحت توزیع یکنواخت فشار عمودی و در قسمت دوم ورق تحت فشار یکنواخت شعاعی می‌باشد. شرایط مرزی ورق متخلخل دایره‌ای به صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است. خواص مکانیکی در راستای ضخامت ورق متغیر می‌باشد، به صورتی که مدول یانگ در وسط ورق کمترین مقدار و در بالا و پایین ورق حداکثر مقدار خود را دارا می‌باشد. ورق متخلخل تعمیم‌یافته ورق ساندویچی می‌باشد (شکل ۱). سطوح بالا و پایین ورق از مواد غیر متخلخل تشکیل شده اما درجه متخلخل در عرض ورق متفاوت است به طوری که بیشینه متخلخل مواد در وسط ورق می‌باشد. ورق مورد نظر در دستگاه مختصات استوانه‌ای توصیف شده است. مدول الاستیک و چگالی به طور مداوم تغییر می‌کنند و به صورت زیر می‌باشند:

$$E(z) = E_1 [1 - e_0 \cos(\pi\xi)]$$

$$G(z) = G_1 [1 - e_0 \cos(\pi\xi)] \tag{1}$$

$$\rho(z) = \rho_1 [1 - e_m \cos(\pi\xi)]$$

که

$$e_0 = 1 - \frac{E_0}{E_1}$$

$$e_m = 1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}$$

E_0 ، E_1 مدول یانگ، G_0 و G_1 مدول برشی و ρ_0 و ρ_1 چگالی در $z = 0$ و $z = \pm h/2$ است. همین‌طور رابطه بین مدول الاستیک برای $G_j = E_j/[2(1 + \nu)]$

$$U_\varepsilon = \frac{\pi h}{1-\nu^2} \int_0^R \int_{-1/2}^{1/2} \{rE(z)[(\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_r^2) + 2\nu(\varepsilon_r \varepsilon_\theta)]\} d\xi dr + \pi h \int_0^R \int_{-1/2}^{1/2} G(z) \gamma_{rz}^2 d\xi dr \quad (7)$$

با جایگذاری رابطه (۶) و (۷) در معادله (۵) و اعمال روش حساب تغییرات رابطه‌ایی به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\int_0^R (A\delta w + B\delta\psi_1 + C\delta\psi_2 dr) = 0 \quad (8)$$

جهت محاسبه ضرایب A, B, C معادله فوق از انتگرال جز به جز استفاده شده که برای نمونه یکی از ترم‌ها در رابطه زیر نشان داده شده است:

$$(9)$$

$$\begin{aligned} & \pi h \int_0^R \int_{-1/2}^{1/2} r \sigma_r \varepsilon_r d\xi dr \rightarrow \\ & \frac{\pi h}{1-\nu^2} \int_0^R \int_{-1/2}^{1/2} r E(z) \varepsilon_r^2 d\xi dr \rightarrow \\ & \frac{\pi h^3 \varepsilon_1}{1-\nu^2} \int_0^R \int_{-1/2}^{1/2} r \xi^2 \left(\frac{d^2 w}{dr^2}\right)^2 dr \rightarrow \\ & 2\pi D \int_0^R \left(r \frac{d^4 w}{dr^4} + 2 \frac{d^3 w}{dr^3}\right) \delta w dr \end{aligned}$$

لذا داریم:

$$A: D \left[c_0 \Re\left(\frac{dw}{dr}\right) - c_1 \Re(\psi_1) - c_2 \Re(\psi_2) \right] = p - N_r \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}\right)$$

$$B: \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \left(c_3 \frac{dw}{dr} - c_3 \psi_1 - c_4 \psi_2 \right) \right] \right\} + \frac{1-\nu}{h^2} (c_5 \psi_1 + c_6 \psi_2) = 0 \quad (10)$$

$$C: \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \left(c_2 \frac{dw}{dr} - c_4 \psi_1 - c_7 \psi_2 \right) \right] \right\} + \left(\frac{1-\nu}{h^2}\right) (c_8 \psi_1 + c_9 \psi_2) = 0$$

که

$$\Re(f) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rf) \right] \right\}$$

$$D = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$c_0 = 1 - 6 \frac{\pi^2 - 8}{\pi^3} \theta_0, c_1 = \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{8}{\pi} - \theta_0 \right),$$

$$c_2 = \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{3}{4} - \frac{128}{75\pi} \theta_0 \right), c_3 = \frac{2}{\pi^2} \left(3 - \frac{4}{\pi} \theta_0 \right),$$

$$u(r, z) = -h \left\{ \xi \frac{dw}{dr} - \frac{1}{\pi} [\psi_1(r) \sin(\pi\xi) + \psi_2(r) \sin(2\pi\xi) \cos^2(\pi\xi)] \right\} \quad (2)$$

$$W(r, z) = w(r, 0) = w(r)$$

همچنین کرنش‌ها به صورت روابط زیر محاسبه می‌گردند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = -h \left\{ \xi \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{d\psi_1}{dr} \sin(\pi\xi) + \frac{d\psi_2}{dr} \sin(2\pi\xi) \cos^2(\pi\xi) \right] \right\} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = \frac{u_r}{r} = -h \left\{ \frac{1}{r} \xi \frac{dw}{dr} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{r} \psi_1 \sin(\pi\xi) + \frac{1}{r} \psi_2 \sin(2\pi\xi) \cos^2(\pi\xi) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{dw}{dr} = \psi_1 \cos(\pi\xi) + \psi_2 [\cos(2\pi\xi) + \cos(4\pi\xi)]$$

برای محاسبه تنش‌ها طبق قانون هوک داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\tau_{rz} = G(z) \gamma_{rz}$$

شایان ذکر است مدول الاستیسیته متغیر بوده و به محور Z بستگی دارد.

۳- معادلات پایداری

مسئله مورد بررسی تا این مرحله با سه تابع مجهول $w(r)$, $\psi_1(r)$, $\psi_2(r)$ مواجه است، لذا برای حل این مشکل نیاز به سه معادله می‌باشد. معادلات مورد نظر را می‌توان با استفاده از اصل کار مجازی روی ورق به دست آورد.

$$\delta(U_\varepsilon - W) = 0 \quad (5)$$

که

$$\begin{aligned} U_\varepsilon &= \pi h \int_0^R \int_{-1/2}^{1/2} r (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \tau_{rz} \gamma_{rz}) d\xi dr \\ W &= 2\pi \int_0^R prw(r) dr + \pi N_r \int_0^R \left(\frac{dw}{dr}\right)^2 r dr \end{aligned} \quad (6)$$

با جایگذاری رابطه (۴) در معادله اول رابطه (۶) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\psi_2(r) = \frac{c_1 c_6 - c_2 c_5}{c_2 c_8 - c_6^2} \frac{h^2}{1 - \nu} \frac{p_0}{2 c_0 D} r$$

با جایگذاری دو معادله بالا (۱۵) در رابطه (۱۲) خمش محاسبه می‌شود:

$$W(r) = \left[\frac{3(1+\nu)}{c_0^2 \varepsilon_1 h} c_9 (R^2 - r^2) + \frac{1}{32 c_0 D} \left(\frac{r^4}{2} - \frac{3+\nu}{1+\nu} r^2 R^2 + \frac{15+\nu}{21+\nu} R^4 \right) \right] p_0 \quad (16)$$

که

$$c_9 = \frac{c_1^2 c_8 + c_2^2 c_5 - 2 c_1 c_2 c_6}{c_5 c_8 - c_6^2}$$

بیشینه مقدار تنش نرمال در وسط ورق ($r = 0$) رخ می‌دهد که می‌توان به فرم زیر نمایش داد:

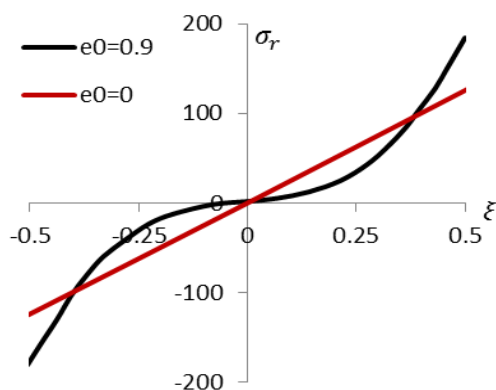
$$(17)$$

$$\sigma_r = \frac{1 - \varepsilon_0 \cos(\pi \xi)}{c_0} \left\{ \xi \left[6 \frac{1+\nu}{1-\nu} c_9 + \frac{3}{4} (3 + \nu) \left(\frac{R}{h} \right)^2 \right] + \frac{6}{\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{c_2 c_6 - c_1 c_8}{c_5 c_8 - c_6^2} + \frac{c_1 c_6 - c_2 c_5}{c_5 c_8 - c_6^2} \sin(2\pi \xi) \cos^2(\pi \xi) \right] \right\} p_0$$

در این قسمت دو حالت کمینه و بیشینه تخریل برای ورق بررسی شده است:

$$\frac{h}{r} = \frac{1}{10}, \nu = 0.3, p_0 = 1 \text{ MPA}, \varepsilon_0 = 0, 0.9$$

نمودار تنش بیشینه بر حسب عمق ورق دایره‌ای در شکل (۳) نشان داده شده است. همان طور که در شکل نشان داده شده است، توزیع تنش در راستای ضخامت در این تئوری به صورت غیر خطی است، در صورتی که این توزیع برای ورق همگن ($\varepsilon_0 = 0$) به صورت خطی می‌باشد.



شکل (۳) تنش‌های بیشینه

۵- کمناش ورق

$$c_4 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{32}{5\pi} - \frac{3}{2} \varepsilon_0 \right), \quad c_5 = 3 - \frac{8}{\pi} \varepsilon_0,$$

$$c_6 = \frac{1}{10} \left(\frac{32}{\pi} - 15 \varepsilon_0 \right), \quad c_7 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{15}{8} - \frac{512}{105\pi} \varepsilon_0 \right),$$

$$c_8 = 2 \left(3 - \frac{832}{105} \varepsilon_0 \right).$$

شرایط مرزی برای $r = 0, r = R$ به صورت زیر می‌باشد:

$$W(R) = 0, \quad M_r(R) = 0$$

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0, \quad \left(\frac{dw}{dr} \right)_{r=0} = 0 \quad (11)$$

که

$$M_r = -D \left[c_0 \frac{d}{dr} \mathcal{L}(w) - c_1 \mathcal{L}(\psi_1) - c_2 \mathcal{L}(\psi_2) \right]$$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{df}{dr} + \frac{\nu}{r} f.$$

۴- حل استاتیکی متقارن ورق

در این قسمت از مقاله به محاسبه خمش ورق پرداخته می‌شود. لذا $N_r = 0, p = p_0$ فرض می‌شود. بنابراین اولین معادله از مجموعه معادلات رابطه (۱۰) به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} \left[r \left(c_0 \frac{dw}{dr} - c_1 \psi_1(r) - c_2 \psi_2(r) \right) \right] \right] \right\} = \frac{q}{D} \quad (12)$$

که نیروی برشی:

$$Q(r) = h \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tau_{rz} d\xi = G_1 h \left[\left(\frac{2}{\pi} - \frac{\varepsilon_0}{2} \right) \psi_1(r) - \frac{8\varepsilon_0}{15\pi} \psi_2(r) \right] \quad (13)$$

$$Q(r) = \frac{1}{r} \int p r dr$$

بر اساس معادله (۱۲) و با فرض این که توابع $\psi_1(r), \psi_2(r)$ خطی هستند معادلات رابطه (۱۰) به دو معادله کاهش پیدا می‌کند:

$$c_5 \psi_1 + c_6 \psi_2 = - \frac{c_1 h^2}{2D c_0 (1-\nu)} p_0 r \quad (14)$$

$$c_6 \psi_1 + c_8 \psi_2 = - \frac{c_2 h^2}{2D c_0 (1-\nu)} p_0 r$$

بنابراین توابع $\psi_1(r), \psi_2(r)$ به دست می‌آیند:

$$\psi_1(r) = \frac{c_2 c_6 - c_1 c_8}{c_5 c_8 - c_6^2} \frac{h^2}{1-\nu} \frac{p_0}{2 c_0 D} r \quad (15)$$

$$E_1 = 2.05 \times 10^5 \text{ MPA},$$

$$\nu = 0.3, \quad \frac{R}{h} = 100 - 400$$

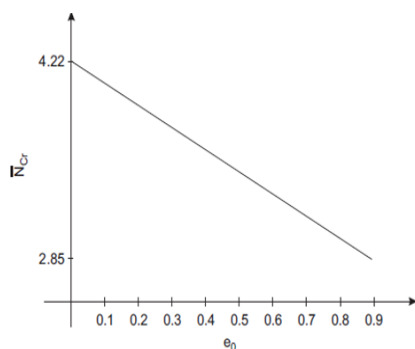
بار بحرانی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\tilde{N}_{cr} = -1.527 \varepsilon_0 + 4.22 \quad (22)$$

که:

$$\tilde{N}_{cr} = N_{cr} \left(\frac{R^2}{D} \right)$$

شکل (۴) تاثیر تخلخل روی بار بحرانی را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود با افزایش تخلخل بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد.



شکل (۴) رابطه بین بار بحرانی کمانش (بی بعد) با ضریب تخلخل ورق

۶- نتیجه گیری

در تحقیق حاضر استفاده از مواد متخلخل مورد مطالعه قرار گرفته است. ورق متخلخل تعمیم یافته یک ورق ساندویچی می‌باشد. از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای تحلیل خمش و بار بحرانی کمانش ورق دایره‌ای متخلخل در حالت تقارن محوری استفاده شده است. توزیع تنش در راستای ضخامت در این تئوری به صورت غیر خطی است، در صورتی که این توزیع برای ورق همگن به صورت خطی می‌باشد. بار بحرانی کمانش به روش گالرکین محاسبه شده و تاثیر ضریب تخلخل روی آن بررسی گردیده است. نتایج نشان می‌دهد بار بحرانی خطی با افزایش تخلخل ورق کاهش پیدا می‌کند. تحلیل خمش و کمانش ورق مورد نظر به وسیله تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، با مقالات انجام شده توسط تئوری کلاسیک سازگاری قابل قبولی را نشان می‌دهد.

مسئله دوم مقاله کمانش ورق مورد نظر می‌باشد. در این حالت N_r را ثابت و $p = 0$ در نظر گرفته می‌شود. معادلات دیفرانسیل رابطه (۱۰) تقریباً با استفاده از روش گالرکین حل می‌شوند. سه تابع زیر شرایط مرزی مسئله را ارضا می‌کنند:

$$w(r) = w_a \left[1 - 3 \frac{2+\nu}{4+\nu} \left(\frac{r}{R} \right)^2 + 2 \frac{1+\nu}{4+\nu} \left(\frac{r}{R} \right)^3 \right]$$

$$\psi_1(r) = -6\psi_{a1} \left[\frac{2+\nu}{4+\nu} \left(\frac{r}{R} \right) - \frac{1+\nu}{4+\nu} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (18)$$

$$\psi_2(r) = -6\psi_{a2} \left[\frac{2+\nu}{4+\nu} \left(\frac{r}{R} \right) - \frac{1+\nu}{4+\nu} \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

با جایگذاری سه تابع فوق (۱۸) در رابطه (۱۰) و استفاده از روش گالرکین سه معادله زیر استخراج می‌شود:

$$(c_0 - c_{10} \frac{R^2}{15D} N_r) w_a - c_1 R \psi_{a1} - c_2 R \psi_{a2} = 0$$

$$c_1 w_a - c_{12} R \psi_{a1} - c_{13} R \psi_{a2} = 0 \quad (19)$$

$$c_2 w_a - c_{13} R \psi_{a1} - c_{14} R \psi_{a2} = 0$$

که:

$$c_{10} = \frac{\nu^2 + 8\nu + 22}{(\nu + 1)(\nu + 5)},$$

$$c_{11} = \frac{(1-\nu^2)R^2}{15h^2} \frac{\nu^2 + 7\nu + 16}{(\nu + 1)(\nu + 4)}$$

از رابطه های دوم و سوم معادله (۱۹)، توابع ψ_{a1} و ψ_{a2} بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\psi_{a1} = m \frac{w_a}{R}, \quad \psi_{a2} = n \frac{w_a}{R} \quad (20)$$

که:

$$m = \frac{c_1 c_{14} - c_2 c_{13}}{c_{14} c_{12} - c_{13}^2}, \quad n = \frac{c_2 c_{12} - c_1 c_{13}}{c_{14} c_{12} - c_{13}^2}$$

با جایگذاری این روابط در معادله اول رابطه (۱۹) بار بحرانی کمانش محاسبه می‌شود:

$$N_r = \frac{15D}{c_{10} R^2} (c_0 - c_1 m - c_2 n) \quad (21)$$

بار بحرانی کمانش برای ورق های همگن ($\varepsilon_0 = 0$) توسط ولمیر توصیف شده است [۱۱]. بار بحرانی بدون بعد \tilde{N}_{cr} برای ضرایب مختلف تخلخل ورق با توجه به خصوصیات زیر (جدول (۱) در پیوست) ارائه شده است.

۷- فهرست علائم

مراجع

[1] Benhart J. Manufacture, characterisation and application of cellular metals and metals foam, *Progress in Materials Science*, vol. 46, 2005, pp. 559-632.

[2] Stasiewicz P., Magnucki K., Elastic buckling of a Pours beam, *Theoretical and Applied Mechanics*. vol. 140, 2008, pp. 287-298.

[3] Magnucki K, Malinowski M., Bending and buckling of a rectangular porous plat, *Steel and Composite Structures*, vol. 6, No. 4, 2010, pp. 319-328.

[4] Magnucki K., Malinowski M., buckling of a rectangular porous plate, *Steel and Composite Structures*, vol. 6, No. 4, 2010, pp. 405-418.

[5] Jasion P., Magnucki M., Global and local buckling of a sandwich circular and beam-rectangular plate with metal foam core, *Thin-Walled Structures*, vol. 61, 2012, pp. 154-161.

[6] Ma L.S., Wang T.J., Axisymmetric post-buckling of a functionally graded circular plate subjected to uniformly distribute radial compression, *Materials Science Forum*, vol. 423/425, 2013, pp.719-24.

[7] Magnucki B., Mathematical modelling of a rectangular sandwich plate with metal foam core, *Journal of theoretical and applied mechanics*, vol. 49, No. 2, 2013, pp. 439-455.

[8] Belica T., Malinowski M., Magnucki K., Dynamic stability of an isotopic metal foam cylindrical shell subjected to external pressure and axial compression, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 78, No. 4, 2014, pp. 041003-1-041003-8.

[9] Debowski D., Magnucki K., Malinowski M., Dynamic stability of a metal foam rectangular plate, *Steel and Composite Structures*, vol. 10, No. 2, 2012, pp. 151-168.

ϵ_0	ضریب تخلخل ورق
ν	ضریب پواسون
ϵ_m	پارامتر بی بعد چگالی
h	ضخامت ورق
$u(r, z)$	جابه‌جایی طولی حول محور r
$w(r)$	جابه‌جایی در راستای محور Z
$\psi_1(r), \psi_2(r)$	توابع بی بعد از جابه‌جایی
ϵ_r	کرنش شعاعی
ϵ_θ	کرنش محیطی
γ_{rz}	کرنش برشی
U_ϵ	انرژی کرنش الاستیک
W	کار نیروهای خارجی
R	شعاع ورق
P	فشار
N_r	نیروی فشاری

۸- پیوست

جدول (۱) بار بحرانی بی بعد

ϵ_0	R/H			
	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰
۰	۴/۲۱۹۵	۴/۲۲۰۰	۴/۲۲۰۰	۴/۲۲۰۱
۰/۱	۴/۰۶۶۹	۴/۰۶۷۳	۴/۰۶۷۴	۴/۰۶۷۴
۰/۲	۳/۹۱۴۲	۳/۹۱۴۶	۳/۹۱۴۷	۳/۹۱۴۷
۰/۳	۳/۷۶۱۵	۳/۷۶۱۹	۳/۷۶۲۰	۳/۷۶۲۰
۰/۴	۳/۶۰۸۸	۳/۶۰۹۲	۳/۶۰۹۳	۳/۶۰۹۳
۰/۵	۳/۴۵۶۱	۳/۴۵۶۵	۳/۴۵۶۶	۳/۴۵۶۷
۰/۶	۳/۳۰۳۴	۳/۳۰۳۹	۳/۳۰۴۰	۳/۳۰۴۰
۰/۷	۳/۱۵۰۶	۳/۱۵۱۲	۳/۱۵۱۳	۳/۱۵۱۳
۰/۸	۲/۹۹۷۸	۲/۹۹۸۵	۲/۹۹۸۶	۲/۹۹۸۶
۰/۹	۲/۸۴۴۸	۲/۸۴۵۷	۲/۸۴۵۹	۲/۸۴۵۹

- [10] Choi J.B., Lakes R.S., Analysis of elastic module of conventional foams and of re-entrant foam materials with a negative Poisson's ratio, *International Journal of mechanic science*, vol. 37, 2005, pp. 51-59.
- [11] Volmir A.S., stability of deformation system, 2007, Nauka: Moscow.