تحلیل کمانش الاستیک پوسته‌های مرکب با سطح مقطع بیضی تحت بار فشاری محوری

منصور درویزه[1] ابوالفضل درویزه [2] رضا انصاری [3،*] الهام کاظمی [4]

* نویسنده مسئول: r_ansari@guilan.ac.ir

چکیده

در این مقاله به بررسی کمانش الاستیک پوسته‌های مرکب با سطح مقطع بیضی با چیدمان صفر و نود درجه که تحت بار محوری فشاری هستند، پرداخته می‌شود. روش حل بر مبنای اجزا محدود، براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول اتخاذ شده است. یک المان هشت گره‌ای برای به دست آوردن رفتار الاستیکی پوسته بیضوی در نظر گرفته شده است. کرنشها بر اساس جابه‌جایی‌ها در مختصات محلی پوسته به دقت محاسبه شده و کار انجام شده توسط بار اعمالی به سازه، در نظر گرفته شده است. معادلات تعادل با استفاده از حداقل کردن انرژی پتانسیل به دست آمده‌اند و با استفاده از روش صفر کردن دترمینان ماتریس سیستم، حل شده‌اند. اثر تغییر پارامتر سطح مقطع بیضی (نسبت شعاع بزرگ به شعاع کوچک بیضی) بر روی بار کمانش بحرانی پوسته استوانه بیضوی بررسی شده است. نتایج مؤید این مطلب است که تغییر در پارامتر سطح مقطع بیضی می‌تواند به طور محسوسی بار کمانش بحرانی را تغییر دهد.

واژه‌های کلیدی: پوسته‌های مرکب، بار کمانش بحرانی، المان محدود، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، سطح مقطع بیضی شکل.

1- استاد، دانشکده مکانیک، دانشگاه گیلان.

2- استاد، دانشگاه آزاد اسلامی واحد بندر انزلی.

3- استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه گیلان.

4- کارشناس ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه گیلان.

1- مقدمه

از آنجایی که با استفاده از مواد کامپوزیتی می‌توان به سازه‌هایی با استحکام و سفتی بالا و وزن سبکتر دست یافت، سازه‌هایی که با استفاده از مواد کامپوزیتی ساخته می‌شوند (به خصوص سازه‌های استوانه‌ای) در سال‌های اخیر مورد توجه صنایع مهندسی قرار گرفته‌اند. همچنین پوسته با سطح مقطع دایره کاربرد وسیعی در صنایع مهندسی از قبیل صنایع دریایی، هوافضا و هسته‌ای پیدا کرده است اما در کاربردهای خاصی در این صنایع، نیاز به پوسته با سطح مقطع غیر مدور می‌باشد.

پایداری مقاطع توخالی دایروی (مانند استوانه‌ها و لوله‌ها)، هم به صورت تحلیلی و هم به صورت تجربی از اوایل قرن بیستم مورد مطالعه قرار گرفت. رفتار کمانشی پوسته استوانه‌ای تحت بار فشاری محوری، تقریباً اولین بار توسط لرنز [1] در سال 1908 مورد بررسی قرار گرفت. نتایج به دست آمده از حل‌های تئوری اولیه (که براساس تئوری تغییر شکل کوچک بود) مطابقت خوبی با آزمایش‌های تجربی نداشت، در عمل پدیده کمانش زودتر از مقدار پیش بینی شده رخ می‌داد. برای برطرف کردن مسئله فوق، روش تحلیلی جهت تخمین تغییر شکل‌های بزرگ، توسط دانل [2] ارائه شد. اولین حل دقیق تحلیلی غیر خطی به وسیله وان کارمن و تسین انجام شد [3]. چندین سال بعد تحقیقاتی توسط دانل و وان صورت گرفت [4] که از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. این تحقیقات نشان داد، نقص (عیوب) اولیه در پوسته عامل ایجاد این ناهماهنگی و ناسازگاری بین نتایج به دست آمده از حل تحلیلی و نتایج تجربی می‌باشد. علاوه بر آن، تحقیقاتی که توسط کویتر [5] (ایجاد یک تئوری کلی پایداری ساختاری و تأثیر عیوبی از قبیل حساسیت در رفتار پایداری پوسته) انجام شده بود، توسط ایشان مورد تأیید قرار گرفت. پس از آن مطالعات فراوانی در خصوص بررسی رفتار مقاطع تو خالی دایروی تحت بار فشاری محوری برای مقاطع با طول کوتاه (به‌خصوص برای استوانه‌ها) انجام شد.

در ارتباط با پوسته‌های استوانه‌ای با مقاطع غیر دایروی توخالی کارهای بسیار کمتری انجام شده است. از آنجا که شعاع در امتداد تار خنثی سطح مقطع تغییر می‌کند این مسئله باعث پیچیده تر شدن تحلیل پایداری این پوسته‌ها می‌گردد. اولین مطالعه نظری توسط مارگوار [6] در خصوص بررسی پوسته‌های غیر دایروی انجام شد. سپس رفتار کمانشی و پیش کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای بیضوی تحت بار فشاری، توسط کمپنر و همکارانش [7 و 8 و 9 و 10] مورد تحقیق و بررسی قرار گرفت. نتایج به دست آمده از این مطالعات نشان می‌دهد که مقاطع بیضوی با مقادیر بالای a/b (a شعاع بزرگ و b شعاع کوچک بیضی است) حساسیت کمتری به عیوب دارند و حتی بار نهایی ممکن است بزرگتر از بار کمانشی باشد. این جمله در تقابل مستقیم با حساسیت به عیوب در پوسته‌های استوانه‌ای دایروی است که توسط دانل و وان بیان شده بود. به دلیل این ناهماهنگی رفتار کمانش و پیش کمانش پوسته‌های استوانه‌ای بیضوی توسط هاتچینسن [11] مورد بررسی قرار گرفت که نتایج حاصل از این مطالعات نشان می‌دهد این مقاطع (مقاطع غیر دایروی) به عیوب حساس‌اند (مانند پوسته‌های دایروی) اما شکست در این پوسته‌ها ممکن است در بارهای بزرگتر از بار کمانشی روی دهد. چندین سال بعد نتایج مشابهی توسط تنیسن و همکارانش [12] به دست آمد (پوسته‌های استوانه‌ای بیضوی که نسبت شعاع بزرگ به شعاع کوچک آنها در شرط روبرو برقرار شود $a/b \geq 2$، بار نهایی آنها بیشتر از بار کمانشی است). بنابراین رفتار کمانشی پوسته‌های غیر دایروی از این جهت مورد توجه قرار گرفت. لازم به ذکر است نویسنده‌های مذکور تنها استوانه‌ها با طول کوتاه را مورد بررسی قرار داده‌اند. رفتار پایداری پوسته‌های با طول متوسط تا بلند برای مقاطع غیر دایروی هنوز یک مسئله حل نشده بود. بعد از تحقیقات صورت گرفته توسط هاتچینسن و کمپنر، مطالعات مربوط به پوسته‌های استوانه‌ای غیر دایروی غیر خطی، توسط سان [13]، شینمن و فیرر [14]، سوزوکی و همکارانش [15]، سلداتس [16] و میر و هیر [17]، انجام شد.

اخیراً رفتار کمانش و پیش کمانش استوانه‌های بیضوی تحت فشار، در زمینه مواد کامپوزیتی (سامباندام و همکارانش [18]) و مواد ایزوتروپیک (گاردنر [19]، چان و گاردنر [20]، زو و ویلکینسون [21]) توجه محققان را به خود جلب نموده است.

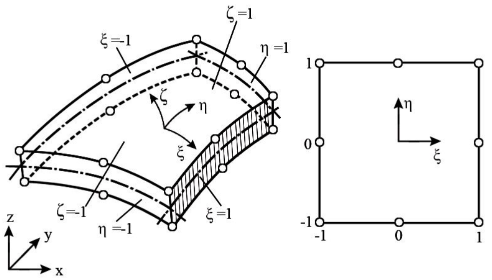
کار بر روی استوانه بیضوی با استفاده از روش‌های مختلفی انجام شده است از جمله روش ریتز [8] و [22]، روش انرژی تفاضل محدود [23] و [24]، روش گلرکین به همراه نظریه تفاضل محدود [9] و [25-28] و روش تجربی. همچنین در این کارها مشاهده می‌شود که تئوری مورد استفاده بر مبنای تئوری کلاسیک پوسته می‌باشند.

در کار حاضر به بررسی کمانش پوسته با سطح مقطع بیضی بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداخته می‌شود. کرنشها بر اساس جابه‌جایی‌ها در مختصات مطلق پوسته به دقت محاسبه شده و کار انجام شده توسط بار اعمالی به سازه، در نظر گرفته شده است. معادلات تعادل با استفاده از حداقل نمودن انرژی پتانسیل به دست آمده و با استفاده از روش صفرکردن دترمینان ماتریس سیستم حل شده است. اثر تغییر پارامتر سطح مقطع بیضی (نسبت شعاع بزرگ به شعاع کوچک بیضی)، بر روی بار کمانش بحرانی پوسته استوانه‌ای بیضوی بررسی شده است. همچنین تغییر نسبت شعاع متوسط به ضخامت پوسته مورد مطالعه قرار گرفته است.

2- فرضیات حاکم بر مسئله

المانی به عنوان نمونه به صورت شکل (1) در نظر گرفته شده است. سطوح خارجی این المان منحنی شکل است اما مقاطعی که در امتداد ضخامت می‌باشند را می توان به وسیله خطوط مستقیمی ایجاد نمود[29]. ξ,η به عنوان مؤلفه‌های مختصات منحنی در صفحه میانی المان فرض شده و ζ به عنوان یک مؤلفه خطی در جهت ضخامت در نظر گرفته شده است، به شکل (1) توجه شود. به طوری‌که ξ,η,ζ بین 1- و 1 تغییر می‌کنند. رابطه زیر بین مختصات کارتزین و مختصات منحنی تعریف می‌شود [29]:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum N_i(\xi,\eta)\left(\frac{1+\zeta}{2}\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{top} + \frac{1-\zeta}{2}\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{bottom} \right) \quad (1)$$



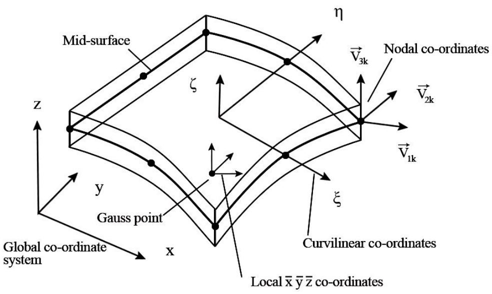
شکل (1) یک المان هشت گره‌ای.

در مقاله حاضر برای هر گره پنج درجه آزادی در نظر گرفته شده است و نوع المان مورد استفاده، المان چهار وجهی هشت گره‌ای [1] است.

رابطه (1) به صورت زیر بازنویسی می‌شود [29]:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum N_i(\xi,\eta)\left(\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}_{mid} + \frac{1}{2}\zeta\, h_i^e \begin{Bmatrix} v_{3k}^x \\ v_{3k}^y \\ v_{3k}^z \end{Bmatrix} \right) \quad (2)$$

که در این رابطه، v_{3k} بردار یکه در جهت ضخامت المان، h_i^e ضخامت هر المان و N تابع شکل است، پیوست (1) را ببینید. در شکل (2)، هندسه و انواع سیستمهای مختصات مورد استفاده در کار حاضر نمایش داده شده است.



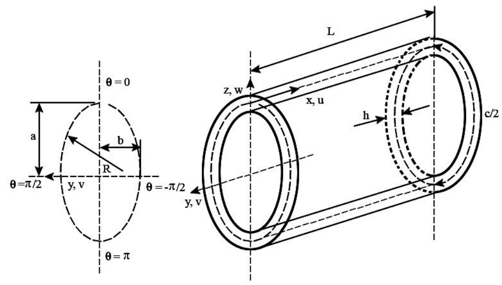
شکل (2) انواع سیستمهای مختصات المان پوسته.

میدان جابه‌جایی برای هر المان در مختصات مطلق توسط رابطه زیر تعریف می‌شود[29و30].

1- Serendipity Quadrilateral Eight-noded Element

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{global} = \sum_{i=1}^{8} N_i\,(\xi(\xi, \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}_{mid} + \frac{1}{2} N_i\,(\xi(\xi,\eta)\,\zeta \begin{Bmatrix} v_{1k}^{x} & -\,v_{2k}^{x} \\ v_{1k}^{y} & -v_{2k}^{y} \\ v_{1k}^{z} & -v_{2k}^{z} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

که در رابطه(3)، V_{1k} و V_{2k} بردارهای یکه مماس بر صفحه المان در هر گره هستند و α دوران حول محور V_{1k} و β دوران حول محور V_{2k} است. همچنین، پوسته استوانه‌ای بیضوی در نظر گرفته شده در کار حاضر به صورت شکل(3) است:



شکل(3) پوسته استوانه‌ای بیضوی.

R شعاع اصلی سطح مقطع بیضی است که به صورت زیر به دست می آید[31]:

$$R = \frac{b^2}{\overline{R}_{\circ}}(1+\mu_{\circ}\cos 2\theta)^{-3/2} \qquad (4)$$

که در این رابطه a شعاع بزرگ بیضی، b شعاع کوچک آن، $\overline{R}_{\circ} = [(a^2+b^2)/2]^{1/2}$ و $\mu_{\circ} = (a^2-b^2)/(a^2+b^2)$ و θ زاویه بین مماس بر هر گره و محور y در نظر گرفته می‌شود.

3- مدل‌سازی اجزا محدود مسئله

در ادامه مدل‌سازی اجزا محدود مسئله مورد بحث قرار می گیرد.

روابط کرنش- جابه‌جایی

کرنش‌ها در مختصات محلی هر المان به صورت زیر تعریف می شوند[30 و 32 و 33]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{bm} \\ \varepsilon_{s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\overline{xx}} \\ \varepsilon_{\overline{yy}} \\ \varepsilon_{\overline{zz}} \\ \gamma_{\overline{xy}} \\ \gamma_{\overline{xz}} \\ \gamma_{\overline{yz}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{u}_{,\overline{x}} \\ \overline{v}_{,\overline{y}} + \overline{w}/R \\ \overline{w}_{,\overline{z}} \\ \overline{u}_{,\overline{y}} + \overline{v}_{,\overline{x}} \\ \overline{u}_{,\overline{z}} + \overline{w}_{,\overline{z}} \\ \overline{v}_{,\overline{z}} + \overline{w}_{,\overline{y}} - \overline{v}/R \end{Bmatrix} \qquad (5)$$

که در رابطه(5)، $\{\varepsilon_{bm}\}$ مؤلفه‌های خمشی و غشایی کرنش راتشکیل می‌دهند و $\{\varepsilon_{s}\}$ بیانگر مؤلفه‌های برشی عرضی کرنش می‌باشند. جهت بیان کمیت‌ها در مختصات محلی هر المان، از علامت (-) بر روی آن‌ها استفاده شده است.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \circ\circ\circ\circ\; N_2 \circ\circ\circ\circ\; \ldots\; N_8 \circ\circ\circ\circ \\ \circ\, N_1 \circ\circ\circ\circ\, N_2 \circ\circ\circ\; \ldots\; \circ\, N_8 \circ\circ\circ \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \circ\circ\circ\circ\, N_1 \circ\circ\circ\circ\, N_2\; \ldots\; \circ\circ\circ\circ\, N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_8 \\ v_8 \\ w_8 \\ \alpha_8 \\ \beta_8 \end{Bmatrix} \qquad (6)$$

در رابطه(6) u, v, w, α, β پنج درجه آزادی در نظر گرفته شده برای هر گره هستند.

چون u,v,w در مختصات مطلق هستند و کرنش‌ها در مختصات محلی هر المان تعریف شده‌اند، بنابراین لازم است جابه‌جایی‌ها در مختصات محلی هر المان بیان شوند. برای به دست آوردن جابه‌جایی‌ها در مختصات محلی از تبدیل مختصات طبق مراحل زیر استفاده می‌شود:

مرحله اول

ابتدا مشتقات u,v,w نسبت به مختصات منحنی(ξ,η,ζ) محاسبه می‌شوند (پیوست (ب-1)) و سپس با استفاده از ژاکوبین، به مختصات مطلق برده می‌شود (پیوست (ب-2)).

$$\begin{bmatrix} u_{,x} & v_{,x} & w_{,x} \\ u_{,y} & v_{,y} & w_{,y} \\ u_{,z} & v_{,z} & w_{,z} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} u_{,\xi} & v_{,\xi} & w_{,\xi} \\ u_{,\eta} & v_{,\eta} & w_{,\eta} \\ u_{,\zeta} & v_{,\zeta} & w_{,\zeta} \end{bmatrix} \qquad (7)$$

که در رابطه (7)، J به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J=\begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} & z_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (8)$$

مرحله دوم

حال مشتقات میدان‌های جابه‌جایی در مختصات مطلق که در مرحله اول (رابطه (7)) محاسبه شده (پیوست (ب-2))، با استفاده از تبدیل مختصات زیر، به مختصات محلی برده می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{,\bar{x}} & \bar{v}_{,\bar{x}} & \bar{w}_{,\bar{x}} \\ \bar{u}_{,\bar{y}} & \bar{v}_{,\bar{y}} & \bar{w}_{,\bar{y}} \\ \bar{u}_{,\bar{z}} & \bar{v}_{,\bar{z}} & \bar{w}_{,\bar{z}} \end{bmatrix}=\theta^T \begin{bmatrix} u_{,x} & v_{,x} & w_{,x} \\ u_{,y} & v_{,y} & w_{,y} \\ u_{,z} & v_{,z} & w_{,z} \end{bmatrix}\theta \quad (9)$$

که در رابطه (9)، θ، ماتریس کسینوسهای هادی است که مختصات مطلق را به مختصات محلی تبدیل می‌کند.

همچنین داریم:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix}=\theta^T \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (10)$$

با استفاده از روابط (6) تا (10)، رابطه(5) به صورت زیر بازنویسی می‌شود. $[B]$ در این رابطه ماتریسی است که مؤلفه‌های آن شامل توابع شکل و مشتقات آن در ماتریس کرنش رابطه(5) است.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{bm} \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \varepsilon_{\overline{xx}} \\ \varepsilon_{\overline{yy}} \\ \varepsilon_{\overline{zz}} \\ \gamma_{\overline{xy}} \\ \gamma_{\overline{xz}} \\ \gamma_{\overline{yz}} \end{Bmatrix}=[B]\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_8 \\ v_8 \\ w_8 \\ \alpha_8 \\ \beta_8 \end{Bmatrix}=[B][\delta] \quad (11)$$

انرژی پتانسیل کلی

انرژی پتانسیل کلی در مختصات محلی برای المان پوسته به صورت زیر تعریف می‌شود[34]:

$$U_T(\delta)=U(\delta)-W(\delta) \quad (12)$$

که در این رابطه $U(\delta)$، شامل انرژی کرنش الاستیک می‌باشد و $W(\delta)$ کاری است که به وسیله بار فشاری اعمالی به پوسته، انجام می‌شود.

در رابطه(12)، $U(\delta)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U(\delta)=\frac{1}{2}\int_V \{\varepsilon\}^T\{\sigma\}\,dV \quad (13)$$

$$U(\delta)=\frac{1}{2}\int_V \{\varepsilon\}^T[Q]\{\varepsilon\}\,dV \quad (14)$$

$$U(\delta)=\frac{1}{2}\int_V \{\delta\}^T\{B\}^T[Q]\{B\}\{\delta\}\,dV \quad (15)$$

$$U(\delta)=\frac{1}{2}(\{\delta\}^T[K^e]_{local}\{\delta\}) \quad (16)$$

در رابطه(14)، $[Q]$ ماتریس ضرایب سفتی هر المان است و به صورت زیر تعریف می‌شود. در مؤلفه‌های Q_{55}, Q_{66} ضریب تصحیح برشی اعمال شده است:

$$[Q]=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} & 0 & 0 \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{65} & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (17)$$

که در رابطه (16)، $[K^e]_{local}$ ماتریس سفتی ساختاری است که برای هر المان در مختصات محلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[K^e]_{local}=\int_V ([B]^T[Q][B])\,dV \quad (18)$$

$W(\delta)$ در رابطه(12) به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$W(\delta)=\frac{1}{2}\int_V \begin{Bmatrix} \omega_{\bar{y}} \\ \omega_{\bar{x}} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma^{\circ}_{xx} & \sigma^{\circ}_{xy} \\ \sigma^{\circ}_{xy} & \sigma^{\circ}_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_{\bar{y}} \\ \omega_{\bar{x}} \end{Bmatrix} dV \quad (19)$$

$\omega_{\bar{x}}, \omega_{\bar{y}}$ مؤلفه‌های چرخشی متوسطاند که به صورت زیر تعریف می‌شوند [35و36]:

$$\begin{Bmatrix} \omega_{\bar{y}} \\ \omega_{\bar{x}} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\left(-\bar{u}_{,\bar{z}}+\bar{w}_{,\bar{x}}\right) \\ \frac{1}{2}\left(-\bar{v}_{,\bar{z}}+\left(\bar{w}_{,\bar{y}}-\frac{\bar{v}}{R}\right)\right) \end{Bmatrix} \quad (20)$$

B_G در رابطه(21) ماتریسی است که مؤلفه‌های آن شامل توابع شکل و مشتقات آن در رابطه (20) است.

$$\begin{Bmatrix}\omega_{\bar{y}}\\ \omega_{\bar{x}}\end{Bmatrix}=[B_G]\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ w_1\\ \alpha_1\\ \beta_1\\ .\\ .\\ .\\ u_8\\ v_8\\ w_8\\ \alpha_8\\ \beta_8\end{Bmatrix}=[B_G]\{\delta\} \qquad (21)$$

با توجه به روابط (19)، (20) و (21) خواهیم داشت:

$$W(\delta)=\frac{1}{2}\int_V\{\delta\}^T[B_G]^T\begin{bmatrix}\sigma^\circ_{xx} & \sigma^\circ_{xy}\\ \sigma^\circ_{xy} & \sigma^\circ_{yy}\end{bmatrix}[B_G]\{\delta\}dV \qquad (22)$$

$$W(\delta)=\frac{1}{2}(\{\delta\}^T[K^e_G]_{local}\{\delta\}) \qquad (23)$$

در رابطه بالا $[K^e_G]_{local}$ (ماتریس سفتی هندسی) برای هر المان در مختصات محلی به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$[K^e_G]_{local}=\int_V([B_G]^T\begin{bmatrix}\sigma^\circ_{xx} & \sigma^\circ_{xy}\\ \sigma^\circ_{xy} & \sigma^\circ_{yy}\end{bmatrix}[B_G])\ dV \qquad (24)$$

از طرفی با توجه به اینکه تنها بار محوری به سازه اعمال می‌شود، بنابراین:

$$\sigma^\circ_{xx}=-\frac{P}{Ch}\quad,\ \sigma^\circ_{yy}=\circ\quad,\quad \sigma^\circ_{xy}=\circ \qquad (25)$$

که در این رابطه C محیط سطح میانی پوسته و h ضخامت کلی پوسته است.

با توجه به روابط (13) تا (24)، رابطه (12) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$U_T(\delta)=\frac{1}{2}\{\delta^e\}^T[K^e]_{local}\{\delta^e\}+\frac{1}{2}\{\delta^e\}^T[K^e_G]_{local}\{\delta^e\} \qquad (26)$$

بعد از حداقل کردن انرژی پتانسیل کلی (طبق رابطه 26)، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$[K^e]_{local}\{\delta\}^e-[K^e_G]_{local}\{\delta\}^e=\circ \qquad (27)$$

از طرفی با استفاده از روابط (28) و (29) رابطه (27) در مختصات مطلق به صورت رابطه (30) نوشته می‌شود.

$$[K^e]_{global}=[\theta^e][K^e]_{local}[\theta^e]^T$$
$$[K^e_G]_{global}=[\theta^e][K^e_G]_{local}[\theta^e]^T \qquad (28)$$

از طرفی:

$$[K]=\sum_{e=1}^{m}\left[K^e\right]_{global}$$
$$\left[K_G\right]=\sum_{e=1}^{m}\left[K^e_G\right]_{global} \qquad (29)$$

بنابراین:

$$[K]\{\delta\}-\left[K_G\right]\{\delta\}=\circ \qquad (30)$$

از روابط (25) و (30) نتیجه می‌شود:

$$[K]\{\delta\}-P^*[K^*_G]\ \{\delta\}=\circ \qquad (31)$$

که در رابطه بالا $[K^*_G]$ ماتریس سفتی هندسی به ازای تنش محوری واحد و $p^*=\frac{P}{Ch}$ است. همچنین داریم:

$$([K^*_G]^{-1}[K]-P^*I)\{\delta\}=\circ \qquad (32)$$

$$\left|[K^*_G]^{-1}[K]-P^*I\right|=\circ \qquad (33)$$

که رابطه (33) معادل است با:

$$\left|B^{-1}A-\lambda I\right|=\circ \qquad (34)$$

مقادیر ویژه رابطه (33) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$P^*=eig([K^*_G]^{-1}[K]) \qquad (35)$$

بنابراین بارکمانش به صورت رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$P=P^*\times(Ch)$$

4- نتایج و بحث

نتایجی که در جداول (1) و (2) ارائه شده مربوط به استوانه دایروی برای یک ماده ارتوتروپیک با خصوصیات زیر است [37]:

$$E_1/E_2=10\ ,\ G_{13}=G_{12}=0/6E_2\ ,\ G_{23}=0/5E_2$$
$$\nu_{12}=0/25$$

ضریب برش 5/6 در نظر گرفته شده و ضخامت کلی پوسته برابر 25/4 میلی متر می‌باشد. مقادیر بار کمانش بحرانی برای دو هندسه مختلف و برای دو نوع شرایط مرزی متفاوت مطابق پیوست (ج) به دست آمده و در جداول (1) و (2) با مرجع [37]

مقایسه شده است. روش مورد استفاده در مرجع [37] حل دقیق است. در مرجع مذکور یک روش تحلیلی برای مسائل کمانش و ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای زمانی که نسبت طول مشخصه سازه به ضخامت آن نزدیک 20 و یا بزرگتر از آن باشد، بیان شده است.

هدف اصلی از نتایج ارائه شده در این قسمت تائید صحت روابط به دست آمده و کد نویسی مربوط به آن است. همان‌طور که ازنتایج جداول(1) و(2) مشاهده می‌شود، روش ارائه شده در این مقاله در مقایسه با روش حل دقیق مرجع (37)، نتایج قابل قبولی را برای پوسته‌های استوانه‌ای دایروی ارائه می‌دهد. ماکزیمم خطا در جدول(1)، در چیدمان [90/0] در شرط مرزی S۳-S۳ مشاهده می‌شود که در حدود 26% است و ماکزیمم خطا در جدول(2)، در چیدمان [0/90/0/90] مشاهده می‌شود که در حدود 16% است.

مش بندی در نظر گرفته شده در این مقاله، 64 المان در جهت محیطی و 8 المان درجهت طولی پوسته است. P_{cr}، بار کمانش بحرانی و $\bar{P}_{cr}$، بار کمانش بحرانی بی بعد است.

جدول(1) مقادیر بار کمانش بحرانی بی بعد برای استوانه دایروی به ازای $L/R_\circ = 2$ و $R_\circ/h = 40$.

	شرط مرزی تکیه گاه ساده		$\bar{P}_{cr}$	
		$\bar{P}_{cr} = P_{cr}L^2/(100h^3E_2)$	مقاله حاضر	مرجع [37]
چیدمان لایه‌ها	[90/0]	S۱-S۱	1/5746	1/5451
		S۳-S۳	2/3287	1/8479
	[0/90/0]	S۱-S۱	2/2719	1/8234
		S۳-S۳	1/8825	2/0372

جدول(2) مقادیر بار کمانش بحرانی بی بعد برای استوانه دایروی به ازای $L/R_\circ = 1$ و $R_\circ/h = 80$.

	شرط مرزی تکیه گاه ساده	$\bar{P}_{cr}$	
	$\bar{P}_{cr} = P_{cr}L^2/(10h^3E_2)$	مقاله حاضر	مرجع [37]
چیدمان لایه‌ها	[0/90]	8/7362	9/3325
	[90/0]	8/3941	9/3966
	[0/90/0/90]	13/5289	11/6417
	[90/0/90/0]	12/3398	11/6085

نتایجی که در جدول‌های (3) و(4) و شکل‌های (4) تا(7) ارائه شده است برای شرط مرزی تکیه گاه ساده طبق پیوست (ج) و یک ماده اورتوتروپیک با خصوصیات زیر است[18]:

$E_1/E_2 = 40$, $G_{13} = G_{12} = 0/6E_2$, $G_{23} = 0/5E_2$,
$\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{13} = 0/25$

$R_\circ$ شعاع متوسط سطح میانی بیضی است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$R_\circ = C/2\pi$$

رابطه بی بعد استفاده شده $\bar{P}_{cr} = P_{cr}/(CA_{11})$ است که در آن C محیط سطح میانی بیضی، A_{11} [1]، ضریب سفتی کششی، h، ضخامت کلی پوسته و a و b به ترتیب شعاع بزرگ و کوچک بیضی می‌باشند.

در مرجع[18] اثر تغییر پارامتر سطح مقطع بیضی بر روی بار کمانش استوانه بیضوی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا با در نظر گرفتن تئوری زیگ زاگ و جابه‌جایی عرضی متغیر در امتداد ضخامت، مورد بررسی قرار گرفته است. در جداول(3) و(4)، اثر تغییر پارامتر سطح مقطع بیضی بر روی بار کمانش بحرانی استوانه بیضوی، براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای دو هندسه مختلف و با شرط مرزی تکیه گاه ساده بررسی شده و این نتایج با تئوری‌های مرتبه بالا و مرتبه اول ارائه شده در مرجع[18]، مقایسه شده است.

جدول(3) مقادیر بار کمانش بحرانی بی بعد استوانه بیضوی به ازای $L/R_\circ = 1$ و $R_\circ/h = 5$ برای چیدمان [0/90].

	$\bar{P}_{cr}$		
a/b	مقاله حاضر (تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول)	مرجع[18] (تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول[3])	مرجع[18] (تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا[2])
1/5	0/0223	0/0170	0/0160
1/75	0/0200	0/0158	0/0150
2	0/0177	0/0145	0/0140
2/25	0/0148	0/0140	0/0134
2/5	0/0137	0/0132	0/0130

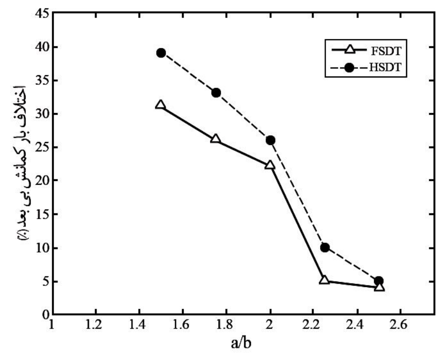
1- Extensional stiffness coefficient

2- HSDT

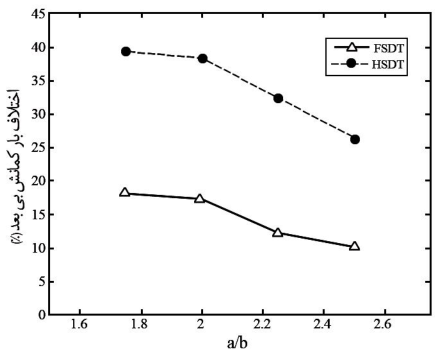
3- FSDT

جدول(4) مقادیر بار کمانش بحرانی بی بعد استوانه بیضوی به ازای $R_\circ/h=10$ و $L/R_\circ=1$ برای چیدمان $[0/90]_4$.

a/b	$\overline{P}_{cr}$ کار حاضر (تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول)	مرجع[18] (تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول)	مرجع[18] (تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا)
1/75	0/0153	0/0130	0/0110
2	0/0146	0/0125	0/0106
2/25	0/0132	0/0118	0/01
2/5	0/0124	0/0113	0/0098



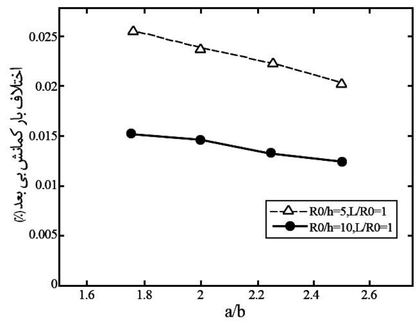
شکل(4) بررسی میزان اختلاف موجود بین مقادیر بار کمانش بحرانی بی‌بعد استوانه بیضوی در این مقاله، با دو تئوری ارائه شده در مرجع [18] به ازای $L/R_\circ=1$ و $R_\circ/h=5$ برای چیدمان [0/90].



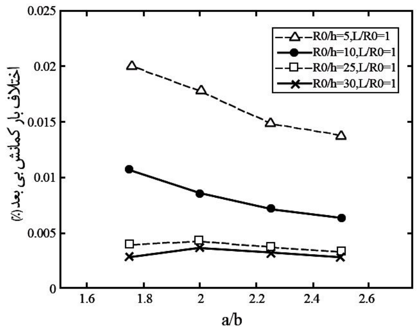
شکل(5) بررسی میزان اختلاف موجود بین مقادیر بار کمانش بحرانی بی‌بعد استوانه بیضوی در این مقاله، با دو تئوری ارائه شده در مرجع [18] به ازای $L/R_\circ=1$ و $R_\circ/h=10$ رای چیدمان $[0/90]_4$.

در شکل‌های (4) و(5) میزان اختلاف موجود بین نتایج تئوری مرتبه اول این مقاله با نتایج تئوری‌های مرتبه اول و مرتبه بالا مرجع [18]، برای دو هندسه و دو چیدمان مختلف بررسی شده است. همان طور که در جداول(3) و(4) و شکل‌های (4) و(5) مشاهده می‌شود تأثیر تئوری مرتبه بالا در کمانش پوسته‌ای که شامل 2 لایه است در مقایسه با پوسته‌ای که چیدمان 8 لایه‌ای دارد کمتر است. همچنین در شکل‌های (4) و(5) مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر سطح مقطع بیضی، اختلاف نتایج به دست آمده در این مقاله با مرجع [18] کمتر می‌شود.

نتایج حاصل در جدول‌های (3) و(4) و شکل‌های (6) و(7) مؤید این مطلب است که افزایش مقدار پارامتر سطح مقطع بیضی باعث کاهش در بار کمانش بحرانی می‌شود و این پارامتر یکی از پارامترهای حائز اهمیت درطراحی این پوسته‌ها است.



شکل(6) مقایسه مقادیر بار کمانش بحرانی بی‌بعد استوانه بیضوی به ازای دو هندسه مختلف برای چیدمان $[0/90]_4$.



شکل(7) مقایسه مقادیر بار کمانش بحرانی بی‌بعد استوانه بیضوی به ازای چهار هندسه مختلف برای چیدمان [0/90].

در شکل‌های (6) و(7) تغییرات بار کمانش بحرانی به ازای تغییر در پارامتر سطح مقطع بیضی با توجه به نسبت‌های

مختلف $R_\circ/h$ برای دو چیدمان مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. مشاهده می‌شود مانند استوانه دایروی، افزایش نسبت $R_\circ/h$ باعث کاهش بار کمانش بحرانی استوانه بیضوی می‌شود و بالعکس. لازم به ذکر است که این تغییرات متأثر از تغییر در پارامتر سطح مقطع بیضی‌اند. همچنین مشاهده می‌شود در شکل(6) و دو نمودار بالای شکل(7) که دو پوسته جدار ضخیم در نظر گرفته شده است، روند افزایشی پارامتر سطح مقطع بیضی با روند کاهشی بار کمانش بحرانی همراه است اما دردو نمودار پایینی شکل(7) که دو پوسته جدار نازک مورد مطالعه قرار گرفته است زمانی‌که که این پارامتر کمتر از 2 است تغییری در این روند دیده می‌شود.

5- نتیجه‌گیری

دریک هندسه معین و در یک چیدمان و شرط مرزی یکسان خواهیم داشت:

1- تغییرات در پارامتر سطح مقطع بیضی می‌تواند به طور قابل ملاحظه‌ای باعث تغییر در بار کمانش بحرانی شود.

2- می‌دانیم در یک ضخامت ثابت (h)، مقدار بار کمانش بحرانی در استوانه دایروی به نسبت‌های $R_\circ/h$ و $L/R_\circ$ بستگی دارد اما در استوانه بیضوی علاوه بر این نسبت‌ها، پارامتر سطح مقطع بیضی نیز حائز اهمیت است و نقش مهمی را در مقدار بار کمانش بحرانی استوانه بیضوی ایفا می‌کند. همانند استوانه دایروی، افزایش نسبت $R_\circ/h$ باعث کاهش بار کمانش بحرانی استوانه بیضوی می‌گردد و بالعکس. لازم به ذکر است که این تغییرات متأثر از تغییر در پارامتر سطح مقطع بیضی‌اند.

3- تئوری مرتبه اول در مقایسه با تئوری مرتبه بالا تخمین قابل قبولی در بررسی کمانش بحرانی پوسته ارائه می‌دهد.

فهرست علائم

ضخامت کلی پوسته	h
شعاع بزرگ بیضی	a
شعاع کوچک بیضی	b
کرنش	ε
تنش	σ
5 درجه آزادی هر گره	u, v, w, α, β
شعاع متوسط سطح میانی بیضی	$R_\circ$
طول مشخصه پوسته	L
محیط سطح میانی بیضی	C
ضریب سفتی کششی	A_{11}
بردار درجات آزادی کل گره‌های یک المان	δ
بارکمانش بحرانی	P_{cr}
بار کمانش بحرانی بی بعد	$\bar{P}_{cr}$
مدول الاستیسیته	E
مدول برشی	G
ضریب پواسون	ν
معرف المان	بالا نویس e

پیوست (الف)

توابع شکل به صورت زیر برای المان در نظر گرفته شده تعریف می‌شوند:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$$
$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$
$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)$$
$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)$$
$$N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$
$$N_6 = (1-\eta^2)(1+\xi)$$
$$N_7 = (1-\xi^2)(1+\eta)$$
$$N_8 = (1-\eta^2)(1-\xi)$$

پیوست (ب)

$$u_{,\xi} = \sum_{i=1}^{8} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\left(u_i + \frac{1}{2}\zeta\, t_i (V_{1k}^x \alpha_i - V_{2k}^x \beta_i)\right)$$
$$v_{,\xi} = \sum_{i=1}^{8} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\left(v_i + \frac{1}{2}\zeta\, t_i (V_{1k}^y \alpha_i - V_{2k}^y \beta_i)\right)$$
$$w_{,\xi} = \sum_{i=1}^{8} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\left(w_i + \frac{1}{2}\zeta\, t_i (V_{1k}^z \alpha_i - V_{2k}^z \beta_i)\right)$$
$$u_{,\eta} = \sum_{i=1}^{8} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\left(u_i + \frac{1}{2}\zeta\, t_i (V_{1k}^x \alpha_i - V_{2k}^x \beta_i)\right)$$
$$v_{,\eta} = \sum_{i=1}^{8} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\left(v_i + \frac{1}{2}\zeta\, t_i (V_{1k}^y \alpha_i - V_{2k}^y \beta_i)\right)$$
$$w_{,\eta} = \sum_{i=1}^{8} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\left(w_i + \frac{1}{2}\zeta\, t_i (V_{1k}^z \alpha_i - V_{2k}^z \beta_i)\right)$$

$$u_{,\zeta}=\sum_{i=1}^{8}\frac{1}{2}N_i\ t_i(V_{1k}^{x}\alpha_i-V_{2k}^{x}\beta_i)$$
$$v_{,\zeta}=\sum_{i=1}^{8}\frac{1}{2}N_i\ t_i(V_{1k}^{y}\alpha_i-V_{2k}^{y}\beta_i)$$
$$w_{,\zeta}=\sum_{i=1}^{8}\frac{1}{2}N_i\ t_i(V_{1k}^{z}\alpha_i-V_{2k}^{z}\beta_i) \qquad \text{(ب-1)}$$

همچنین داریم:

$$u_{,x}=\sum_{i=1}^{8}\left(J^{-1}(1,1)\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+J^{-1}(1,2)\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right)\times \left(u_i+\frac{1}{2}\zeta\ t_i(V_{1k}^{x}\alpha_i-V_{2k}^{x}\beta_i)\right)+ J^{-1}(1,3)\left(\frac{1}{2}N_i\ t_i(V_{1k}^{x}\alpha_i-V_{2k}^{x}\beta_i)\right)$$

$$u_{,y}=\sum_{i=1}^{8}\left(J^{-1}(2,1)\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+J^{-1}(2,2)\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right)\times \left(u_i+\frac{1}{2}\zeta\ t_i(V_{1k}^{x}\alpha_i-V_{2k}^{x}\beta_i)\right)+ J^{-1}(2,3)\left(\frac{1}{2}N_i\ t_i(V_{1k}^{x}\alpha_i-V_{2k}^{x}\beta_i)\right)$$

$$u_{,z}=\sum_{i=1}^{8}\left(J^{-1}(3,1)\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+J^{-1}(3,2)\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right)\times \left(u_i+\frac{1}{2}\zeta\ t_i(V_{1k}^{x}\alpha_i-V_{2k}^{x}\beta_i)\right)+ J^{-1}(3,3)\left(\frac{1}{2}N_i\ t_i(V_{1k}^{x}\alpha_i-V_{2k}^{x}\beta_i)\right)$$

$$v_{,x}=\sum_{i=1}^{8}\left(J^{-1}(1,1)\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+J^{-1}(1,2)\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right)\times \left(v_i+\frac{1}{2}\zeta\ t_i\left(V_{1k}^{y}(i,2)\alpha_i-V_{2k}^{y}\beta_i\right)\right)+ J^{-1}(1,3)\left(\frac{1}{2}N_i\ t_i\left(V_{1k}^{y}\alpha_i-V_{2k}^{y}(i,2)\beta_i\right)\right)$$

$$v_{,y}=\sum_{i=1}^{8}\left(J^{-1}(2,1)\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+J^{-1}(2,2)\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right)\times \left(v_i+\frac{1}{2}\zeta\ t_i\left(V_{1k}^{y}\alpha_i-V_{2k}^{y}\beta_i\right)\right)+ J^{-1}(2,3)\left(\frac{1}{2}N_i\ t_i\left(V_{1k}^{y}\alpha_i-V_{2k}^{y}\beta_i\right)\right)$$

$$v_{,z}=\sum_{i=1}^{8}\left(J^{-1}(3,1)\frac{\partial N_i}{\partial \xi}+J^{-1}(3,2)\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\right)\times \left(v_i+\frac{1}{2}\zeta\ t_i\left(V_{1k}^{y}\alpha_i-V_{2k}^{y}\beta_i\right)\right)+ J^{-1}(3,3)\left(\frac{1}{2}N_i\ t_i\left(V_{1k}^{y}\alpha_i-V_{2k}^{y}\beta_i\right)\right) \qquad \text{(ب - 2)}$$

پیوست (ج)

شرایط مرزی استفاده شده برای تغییر شکل برشی مرتبه اول در $x=\circ,\ x=L$ به صورت زیر است.

شرط مرزی تکیه گاهی ساده استفاده شده در مرجع [18] و در مقاله حاضر:

$$v=w=\beta=\circ$$

و شرط مرزی‌های استفاده شده در مرجع [37]:

$$S1: w=M_x=\beta=N_x=N_{\theta x}=\circ$$
$$S3: w=M_x=\beta=N_x=v=\circ$$

مراجع

[۱] Lorenz R., , *Achsensymmetrische verzerrungen in dünnwandingen hohlzzylindern*, Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, ۵۲ (٤۳), ۱۹۰۸, pp.۱۷۰٦-۱۷۱۳.

[۲] Donnell L.H., A new theory for the buckling of thin *cylinders under axial compression and bending, Transactions of ASME*, ۵٦, ۱۹۳٤, pp. ۷۹۵-۸۰٦.

[۳] VonKarman T., Tsien H.S., The buckling of thin cylindrical shells under axial compression, *Journal of Aeronautical Science*, ۸(٦), ۳۰۳-۳۱۲.

[٤] Donnel L.H., Wan C.C., , *Effect of imperfections on the buckling of thin cylinders and columns under axial compression*, Journal of Applied Mechanics (ASME), ۱۷(۱), ۱۹۵۰,pp. ۷۳-۸۳.

[۵] Koiter W.T., *Over der Stabiliteit van het Elastische Evenwicht*, Ph.D. Thesis, Delft University, The Netherlands. (English: On the Stability of Elastic Equilibrium, ۱۹٤۵,NASA Report TT-F-۱۰۸۳۳, ۱۹٦۷.)

[٦] Marguerre K., *Stability of cylindrical shells of variable curvature*, NACA TM, ۱۹۵۱, ۱۳۰۲.

[۷] Kempner J., Chen Y.N., , *Large deflections of an axially compressed oval cylindrical shell*, In: Proceedings of the ۱۱th International Congress on Applied Mechanics. Springer-Verlag, Berlin, ۱۹٦٤, pp. ۲۹۹-۳۰٦.

[۸] Kempner J., Chen Y.N., *Buckling and postbuckling of an axially compressed oval cylindrical shell*, In: Symposium on the Theory of Shells to Honor Lloyd H. Donnell, McCuthan Publishers Co., ۱۹٦۷, pp. ۱٤۱-۱۸۳.

[۹] Feinstein G., Chen Y.N., Kempner J., *Buckling of clamped oval cylindrical shells under axial loads*, AIAA Journal, ۹ (۹), ۱۹۷۱, pp.۱۷۳۳-۱۷۳۸.

[۱۰] Feinstein G., Erickson B., Kempner J., *Stability of oval cylindrical shells*, Journal of

Experimental Mechanics, ١١(١١), ١٩٧١, pp. ٥١٤-٥٢٠.

[١١] Hutchinson J.W., Buckling and initial post-buckling behaviour of oval cylindrical shells under axial compression, *Journal of Applied Mechanics(Transactions of ASME)*, ٣٥(١), ١٩٦٨, pp. ٦٦-٧٢.

[١٢] Tennyson R.C., Booton M., Caswell R.D., Buckling of imperfect elliptical cylindrical shells under axial compression, *AIAA Journal*, ٩(٢), ١٩٧١, pp. ٢٥٠-٢٥٥.

[١٣] Sun G., Buckling and initial post-buckling behaviour of laminated oval cylindrical shells under axial compression, *Journal of Applied Mechanics(Transactions of ASME)*, ٥٨, ١٩٩١, pp. ٨٤٨-٨٥١.

[١٤] Sheinman I., Firer M., Buckling analysis of laminated cylindrical shells with arbitrary non-circular cross-section, *AIAA Journal*, ٣٢(٥), ١٩٩٤, pp. ٦٤٨-٦٥٤.

[١٥] Suzuki K., Shikanai G., Leissa A.W., Free vibrations of laminated composite thin non-circular cylindrical shell, *Journal of Applied Mechanics*, ٦١, ١٩٩٤, pp. ٨٦١-٨٧١.

[١٦] Soldatos K.P., Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section, *Applied Mechanics*, ٥٢, ١٩٩٩, pp. ٢٣٧-٢٧٤.

[١٧] Meyers C.A., Hyer M.W., Response of elliptical composite cylinders to axial compression loading, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, ٦(٢), ١٩٩٦, pp. ١٦٩-١٩٤.

[١٨] Sambandama C.T., Patel B.P., Gupta S.S., Munot C.S., Ganapathi M., Buckling characteristics of cross-ply elliptical cylinders under axial compression, *Composite Structures*, ٦٢(١), ٢٠٠٣, pp. ٧-١٧.

[١٩] Gardner L., Structural behaviour of oval hollow sections, *International Journal of Advanced Steel Construction*, ١(٢), ٢٠٠٥, pp. ٢٦-٥٠.

[٢٠] Chan T.M., Gardner L., Compressive resistance of hot-rolled elliptical hollow sections, *Engineering Structures*, ٣٠ (٢), ٢٠٠٨, pp. ٥٢٢-٥٣٢.

[٢١] Zhu Y., Wilkinson T., Finite element analysis of structural steel elliptical hollow sections in compression, Research Report No. R٨٧٤, Centre for Advanced Structural Engineering, The University of Sydney, ٢٠٠٧.

[٢٢] Kempner J., Some results on buckling and post-buckling of cylindrical shell, In: Collected Papers on Instability of Shell Structures. NASA TND, ١٥١٠, ١٩٦٢, pp. ١٧٣-١٨٦.

[٢٣] Almorth BO, Brogan FA, Marlowe MB., Collapse analysis of elliptic cones. *Am Inst Aeronaut Astronaut J*, ٩, ١٩٧١, pp. ٣٢-٣٧.

[٢٤] Bushnell D., Stress buckling and vibration of prismatic shells, *Am Inst Aeronaut Astronaut J*, ٩, ١٩٧١, pp. ٢٠٠٤-٢٠١٣.

[٢٥] Chen YN, Kempner J., Buckling of oval cylindrical shell under compression and asymmetric bending, *Am Inst Aeronaut Astronaut J*, ١٤, ١٩٧٦, pp. ١٢٣٥-١٢٤٠.

[٢٦] Koroleva EM ., Stability of cylindrical shells of oval cross-section in the bending stress-state, Prikl Mat Mekh, ٣٧, ١٩٧٤, pp. ٩٠١-٩٠٣.

[٢٧] Volpe V, Chen YN, Kempner J., Buckling of orthogonally stiffened finite oval cylindrical shells shells under axial compression, *Am Inst Aeronaut Astronaut J*, ١٨, ١٩٨٠, pp. ٥٧١-٨٠.

[٢٨] Semenyuk NP., Stability of non-circular cylindrical shells shells under axial compression, *Sov Appl Mech*, ٢٠, ١٩٨٤, pp. ٨١٣-٨١٨.

[٢٩] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L ., *The finite element method, Volume ١: Solid Mechanics*, Mc Graw-Hill , ١٩٦٧.

[٣٠] Bhaskar K., Varadan TK., A higher-order theory for bending analysis of laminated shells of revolutions, *Comput Struct* , ٤٠, ١٩٩١, pp. ٨١٥-٨١٩.

[٣١] Suzuki K., Shikanai G., Leissa A.W., Free vibrations of laminated composite thick noncircular cylindrical shell, *Int J Solids Struct*, ١٩٩٦, pp. ٤٠٧٩-٤١٠٠.

[٣٢] Kraus H., Thin elastic shells, New York, John Wiley, ١٩٧٦.

[۳۳] Qatu MS., Accurate equations for laminated composite deep thick shells, *Int J Solids Struct*, ۳٦, ۱۹۹۹, pp. ۲۹۱۷-۲۹٤۱.

[۳٤] Tiersten HS., Linear piezoelectric plate vibrations- elements of the linear theory of piezo electricity and the vibration of piezoelectric plates, New York, Plenum Press, ۱۹٦۹.

[۳٥] Soldatos KP., Non-linear analysis of transverse shear deformable laminated composite cylindrical shells part I: derivation of governing equations, *ASME J Pres Ves Tech*, ۱۱٤, ۱۹۹۲, pp. ۱۰٥-۱۰۹.

[۳٦] Soldatos KP., Non-linear analysis of transverse shear deformable laminated composite cylindrical shells part II: buckling of axially compressed cross-ply circular and oval cylinders, *ASME J Pres Ves Tech*, ۱۱٤, ۱۹۹۲, pp. ۱۱۰-۱۱٤.

[۳۷] Noseir A., Reddy J.N., Vibration and stability analysis of cross-ply laminated circular cylindrical shells, *Journal of sound and vibration*, ۱٥۷, ۱۹۹۲, pp. ۱۳۹-۱٥۹.