فصلنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک جامدات

www.jsme.ir

فصلنامه علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک جامدات

مدلسازی استاتیکی غیرخطی ورق هدفمند تابعی نسبتاً ضخیم با استفاده از روش آزادسازی دینامیکی

محمدجواد محمودی[1،*]،وحید محلوجی[2]

* نویسنده مسئول: mj_mahmoudi@sbu.ac.ir

چکیده

در این مقاله تحلیل استاتیکی غیرخطی ورق نسبتاً ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند تابعی با استفاده از روش آزادسازی دینامیکی صورت گرفته است. این امر به کمک تئوری مرتبه اول برشی میندلین به منظور ضخیم در نظر گرفتن ورق انجام شده است. جهت تحلیل رفتار غیرخطی هندسی معادلات گسسته شده استخراج شده است. شرایط بارگذاری و شرایط مرزی ورق به‌ترتیب به‌صورت بارگسترده عرضی یکنواخت و تکیه‌گاه ساده در چهار لبه ورق ضخیم در نظرگرفته شده است. جهت عمومیت بخشیدن به نتایج به‌دست‌آمده، این معادلات به صورت بدون بعد با اعمال روش آزادسازی دینامیکی بر مبنای تفاضلات محدود مرکزی حل شده‌اند. اثر پارامترهای مسأله نظیر ثابت توانی ماده هدفمند تابعی و نسبت ضلع به ضخامت ورق بر نتایج تحلیل مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به نتایج به‌دست آمده، لزوم درنظر گرفتن رفتار غیرخطی هندسی و استفاده از تئوری ای که اثرات ضخامت ورق روی پاسخ خمش ورق را درنظر بگیرد و همچنین در نهایت لزوم استفاده از روش حل آزادسازی دینامیکی با وجود جملات غیرخطی ناشی از تغییرشکل زیاد ورق ضخیم‌هدفمند تابعی بحث شده است.

واژه‌های کلیدی

روش آزادسازی دینامیکی، ورق هدفمند تابعی، تئوری مرتبه اول برشی میندلین، تغییر شکل بزرگ الاستیک

۱-استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

۲- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

۱- مقدمه

یک ماده به تنهایی نمی‌تواند جوابگوی خواص مورد نیاز در صنایع پیشرفته باشد. امروزه استفاده ترکیبی از مواد برای دستیابی به خواص مطلوب روزبه‌روز افزایش یافته‌است. به منظور ارضای این خواسته، مواد مرکب لایه‌ای تولید شدند که در دو سطح خود خواص متفاوتی داشتند ولی آنها نیز در اثر تنش‌های پسماندلایه لایه شده و دارای عمر کمی بودند.

به دنبال گسترش روز افزون استفاده از مواد مرکب در صنایع مختلف، ایده ساخت نسل جدیدی از مواد به نام ماده هدفمند تابعیبرای اولین بار در ژاپن مطرح گردید.در سال ۱۹۸۴ در لابراتوار هوافضای ژاپن موادی با ریز ساختار ناهمگن تولید شد که خواص مکانیکی آن به طور تدریجی و پیوسته از سطحی به سطح دیگر تغییر می‌نمود. مواد با تغییر تدریجی خواص یا مواد هدفمند تابعی[1](FGM) کامپوزیت‌های غیر همگنی هستند که دارای تغییرات پیوسته در ترکیب اجزای تشکیل دهنده خود (فلز و سرامیک) می-باشند. ایده ساخت مواد هدفمند تابعیاولین بار توسط کویزومی به منظور کاربردهایی که در آن مقاومت مکانیکی بالا به‌همراه تحمل حرارتی عالی مورد نیاز باشد، توسعه داده شد[۱]. یکی از موارد مهم استفاده از این مواد در فرایند شکافت راکتورهای هسته‌ای می‌باشد.

پس از گذشت چند سال از ساخت ورق‌های هدفمند تابعیتخمین‌های زیادی جهت تحلیل رفتار آنها پیشنهاد شد. ابودی و همکاران با استفاده از تئوری‌های برشی مرتبه بالا[2]، تحلیل ترموالاستیک ورق‌هایهدفمند تابعیبا تغییرخواص در یک، دو و سه جهت متعامد را ارائه نمودند [۲ تا ۴]. پراوین و ردی روش المان محدود را جهت یافتن پاسخ استاتیکی و دینامیکی ورق‌های هدفمند تابعیفلز-سرامیک به‌کار بردند که در آن از روابط غیر خطی فن-کارمن استفاده شده‌بود [۵]. ردی و همکاران خمش متقارن ورق‌های دایروی هدفمند تابعی را تحلیل کردند که بر پایه تئوری میندلین بود [۶]. ردی رفتار استاتیکی ورق‌های مستطیلی هدفمند تابعی را مورد بررسی قرار داد که پایه آن تئوری برشی مرتبه سوم[3] بود [۷]. ردی و چنگ تحلیل ترمومکانیکی ورق‌های مستطیلی هدفمند تابعی را ارائه دادند [۸]. چنگ و باتر از یک روش گسترش داده شده جهت تحلیل سه‌بعدی ترموالاستیک ورق‌های هدفمند تابعی با تابع بیضوی استفاده کردند که ورق دارای لبه‌های گیردار بود [۹]. باتر و چنگ خیز ورق‌های چند ضلعی هدفمند تابعی با شرایط تکیه‌گاه ساده را بوسیله تئوری برشی مرتبه اول و تئوری برشی مرتبه سوم فرمول‌بندی نمودند [۱۰]. کشتالیان با استفاده از معادلات پلواکو[4] یک تحلیل دقیق برای خمش ورق‌های مستطیلی هدفمند تابعی ارائه نمود [۱۱]. وو و مگود یک حل تحلیلی برای تغییر شکل زیاد ورق‌های هدفمند تابعی نازک ارائه دادند [۱۲]. یانگ و شن تغییر شکل بزرگ و پاسخ پس‌کمانش ورق‌های مستطیلی نازک هدفمند تابعی را تحت بار عرضی و داخل صفحه با استفاده از روش نیمه-تحلیلی اختلال[5]به‌همراه تقریب تفاضل مربعی[6] و روش گلرکین، مطالعه کردند [۱۳]. در تحقیق ایشان از ورق هدفمند تابعی با دو تکیه‌گاه گیردار در دو لبه مقابل و همچنین فرم ساده توانی برای توزیع اجزاء استفاده شده است. قنادپور و علی‌نیا رفتار تغییرشکل بزرگ ورق نازک هدفمند تابعی را تحت بار عرضی با حداقل کردن انرژی پتانسیل کل سیستم به‌دست آوردند [۱۴]. بیگلو تحلیل ترموالاستیک دقیق سه‌بعدی ورق مستطیلی هدفمند تابعی با تغییر شکل‌های کوچک روی تکیه‌گاه های ساده را ارائه کرد. در این تحقیق تابع نمایی جهت مدل کردن تغییرات خواص ماده هدفمند تابعی در طول ضخامت ورق در نظر گرفته شده است و حل تحلیلی با استفاده از سری فوریه دوگانه نسبت به مختصات داخل صفحه روش فضای حالت ارائه شده است[۱۵]. کومار و همکارانش تحلیل خمش ورق هدفمند تابعی ضخیم با تغییرشکل زیاد را با روش عددی ساده و غیر دقیق نیوتن-رافسون بررسی کردند[۱۶].

1.Functionally Graded Material(FGM)

2.Higher order Shear Deformation Theory (HSDT)

3. Third order Shear Deformation Theory (TSDT)

4.Plevako

5. Perturbation

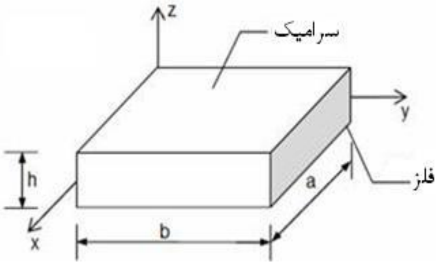
6. Differential quadrature approximation

در روشهای معمول حل معادلات تعادل استاتیکی فرض می‌شود که نیروهای داخلی از ابتدا در سازه وجود داشته‌اند. در چنین حالتی می‌توان فرض کرد که نیروهای خارجی به‌طور بسیار آهسته به گونه‌ای اعمال می‌شوند که رفتار دینامیکی سازه قابل چشم پوشی باشد. بیان مشابهی برای اولین بار توسط ریلی مطرح و منجربه ایده‌ای فیزیکی شد که هم‌اکنون پایه و اساس روش آزادسازی دینامیکی[1] است. کاربردهای اولیه این ایده بوسیله آتر و دی در سالهای ۱۹۶۰ جهت آنالیز مسائل مربوط به جذر و مد و آبگیری انجام گرفت [۱۷]. از حدود سالهای اواسط دهه ۶۰ به‌تدریج مقالات در مورد این روش جدید شکل گرفت که مهمترین آنها مقاله‌ای است که توسط دی در سال ۱۹۶۵ نوشته شد [۱۸]. بعدها آتر در مقاله خود از یک روش کامپیوتری جدید برای محاسبه تنش و تغییر مکان در مخازن فشاری جدار ضخیم نام برد که بر اساس تفاضل محدود با کاربرد تفاضل مرکزی شکل گرفته بود [۱۹]. تروی تحلیل استاتیکی ورق میندلین مستطیلی ایزوتروپ را با خیز زیاد با استفاده از روش آزادسازی دینامیکی انجام داد [۲۰]. سپس فلاحتگر تحلیل ورق قطاعی ویسکوالاستیک غیرخطی را با استفاده از روش آزادسازی دینامیکی انجام داد [۲۱]. در ادامه تحقیقات حل ورق دایروی و قطاعی از دایره با استفاده از روش آزادسازی دینامیکی انجام گرفت [۲۲ تا ۲۵]. تنها مورد استفاده از روش آزادسازی دینامیکی در تحلیل ورق‌های هدفمند تابعی دایروی شامل کار گلمکانی و کدخداییان می‌شود [۲۶]. استفاده از روش آزادسازی دینامیکی در تحلیل ورق‌های هدفمند تابعی مستطیلی چه نازک و چه ضخیم در تحقیقات پیشین مورد بررسی قرار نگرفته است.

در این مقاله، بر خلاف روش‌های سنتی حل مسائل ورق‌ها، روش نسبتاً جدید و مؤثر آزادسازی دینامیکی جهت تحلیل استاتیکی ورق مستطیلی ضخیم هدفمند تابعی با تغییرشکل زیاد مورد استفاده قرار گرفته و توانایی‌ها و قابلیت‌های آن در حل مسائلی از این قبیل، نشان داده شده‌است. این روش، آن‌گونه که در ادامه مقاله به‌صورت مشروح بیان خواهد شد، مسئله استاتیکی را از دیدگاه دینامیکی تحلیل نموده و رفتار حالت ماندگار را متناظر با حل استاتیکی در‌نظر می‌گیرد. جهت درنظر گرفتن اثرات ضخامت ورق و تغییرشکل برشی عرضی از تئوری برشی مرتبه اول[2] استفاده می‌شود. از آنجا که ماهیت معادلات حاکم بر ورق‌های هدفمند تابعی به نحوی است که نمی‌توان برای ورق‌های مستطیلی با شرایط مرزی دلخواه در دو لبه موازی پاسخ کاملاً تحلیلی ارائه نمود، لذا دراین مقاله شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در دو لبه موازی و ورق میندلین مورد نظر است. به‌این ترتیب ابتدا مدل توزیع خواص ماده هدفمند تابعی مطرح می‌گردد و در ادامه به ارائه معادلات ورق مستطیلی هدفمند تابعی ضخیم با تغییرشکل بزرگ پرداخته می شود. سپس روش عددی آزادسازی دینامیکی برای ورق هدفمند تابعی معرفی و گسترش می‌یابد. در نهایت به ارائه نتایج، مقایسه آن با تحقیقات موجود پرداخته می‌شود و اثرات نسبت ضلع به ضخامت ورق و پارامتر رفتاری مدل ماده هدفمند تابعی روی پاسخ استاتیکی ورق موردنظر بررسی می‌شود.

۲- مدل خواص ماده هدفمند تابعی

مطابق شکل (۱) سازه مورد بررسی شامل ورق مستطیلی هدفمند تابعی‌ای به ضخامت h، عرض b و طول a به ترتیب در راستاهای z، y و x محور مختصات دکارتی انتخابی که صفحه $x-y$ و مبدا محور z آن منطبق بر صفحه میانی ورق است، می‌باشد. این ورق تحت بارگذاری عرضی یکنواخت qقرار دارد و دارای تکیه‌گاه‌های ساده در لبه‌های آن است.



شکل (۱) هندسه و دستگاه مختصات انتخابی ورق مستطیلی هدفمند تابعی

1.Dynamic Relaxation

2. First order Shear Deformation Theory (FSDT)

ورق مستطیلی از مخلوط سرامیک و فلز ساخته شده است. خواص ماده ترکیب شده به‌صورت پیوسته و آرام در طول ضخامت ورق تغییر می‌کند. مدل‌های تحلیلی و محاسباتی زیادی که در مورد به‌دست آوردن توابع مناسب به‌منظور مدلسازی خواص مواد هدفمند تابعی بحث می‌کنند، ارائه شده‌اند. یک ماده هدفمند تابعی با یک کسر حجمی متغیر تعریف می‌شود. بیشتر محققان از توابع توانی، توابع نمایی و یا قانون ساده مخلوط‌ها[1] استفاده می‌کنند. در این تحقیق، مدل ردیه‌عنوان یک مدل تعیین خواص به‌صورت واقعی‌تر استفاده می‌شود. بر طبق قانون ساده مخلوط‌ها خواص ماده در طول ضخامت ورق Pبه‌صورت زیر بیان می‌شود [۵]:

$$P(z) = P_c V_c + P_m V_m \tag{۱}$$

که زیرنویس m و c به‌ترتیب به اجزاء فلزی و سرامیکی اشاره دارد. در مدل ردی،کسر حجمی فلز V_m و سرامیک V_cبه‌صورت زیر فرض می‌شوند [۵]:

$$V_c = (\frac{z}{h} + \frac{1}{2})^n, \qquad V_m = 1 - V_c \tag{۲}$$

که z مختصات ضخامت ($-h/2 \le z \le h/2$) و n ثابت توانی ماده هدفمند تابعی‌است، که نحوه تغییرات خواص در ضخامت را اعمال می‌کند. در میان خواص مورد بررسی، مدول یانگ در ضخامت ورق متغیر بوده و از سطح بالایی تا سطح پایینی از سرامیک به فلز یا برعکس تغییر می‌کند.

تاثیر نسبت پواسون روی تغییر شکل خیلی کمتر از مدول یانگ است که این مقدار ثابت در نظر گرفته می‌شود [۵ تا ۱۰].

۳- تحلیل

۳- ۱- معادلات حاکم ورق

در ورق‌های ضخیم که مورد نظر این تحقیق است، فرض عمود ماندن خط عمود عرضی در حین تغییر شکل حذف می‌شود و اثر تنش‌های برشی عرضی در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه خیز ورق می‌تواند در طول ضخامت تغییر کند. بر این مبنا در تئوری مرتبه اول برشی، مؤلفه‌های تغییرمکان به‌صورت زیر تابع مختصات جهت عرضی z بیان می‌شوند [۲۸]:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u^0(x,y) + z\theta_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v(x,y) + z\theta_y(x,y) \\ w(x,y,z) &= w(x,y) \end{aligned} \tag{۳}$$

که u، v و w نشان‌دهنده مؤلفه بردار تغییر مکان به‌ترتیب در راستاهای x، y و z هستند. u^0 و v^0تغییرمکان داخل صفحه نقطه‌ای روی صفحه‌میانی ورق به‌ترتیب در راستاهای x و y هستند وتوابع θ_xوθ_yنشان‌دهنده دوران حول محورهای x و y می‌باشند. با فرض اینکه در ورق‌ها تغییرمکان‌های داخل صفحه خیلی کوچک هستند اما تغییرمکان عرضی w نسبتاً بزرگ است، روابط غیرخطی کرنش-تغییرمکان فنکارمن به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۲۸]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ e_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_{xz}^0 \\ e_{yz}^0 \end{Bmatrix} \tag{۴}$$

$$\varepsilon_z = 0$$

که در آن:

$$e_x^{\circ} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x})^2, \qquad k_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$$

$$e_y^{\circ} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y})^2, \qquad k_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}$$

$$e_{xy}^{\circ} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad k_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \tag{۵}$$

$$e_{zx}^{\circ} = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad e_{zy}^{\circ} = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y}$$

کرنش عمودی صفحهمیانی ε_z برابر صفر است. بنابراین طبق قانون هوک تعمیم‌یافته برای ورق ایزوتروپ مورد نظر روابط تنش و کرنش صفحه‌ای به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} \tag{۶}$$

1. Rule of mixture

که در آن برای ورق هدفمند تابعی مورد نظر $E = E(z)$ است.

با استفاده از اصل تغییر مکان مجازی معادلات تعادل خطی و دورانی ورق به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۲۸]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = 0 \quad (۷)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0$$

که در آنها N_{ij}، M_{ij} و Q_i به‌ترتیب منتجه‌های تنش داخل صفحه، تنش برشی عرضی و گشتاور هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} (1, z) dz \quad (۸)$$

$$\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} dz$$

با جایگزینی قانون هوک (۶) در انتگرال‌های (۸) و استفاده از روابط (۴) و (۵) برای کرنش روابط زیر بدست می‌آیند:

$$N_x = \frac{1}{1-\nu^2}\left(e_x^{\circ} + \nu e_y^{\circ}\right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E dz$$

$$N_y = \frac{1}{1-\nu^2}\left(e_y^{\circ} + \nu e_x^{\circ}\right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E dz \quad (۹)$$

$$N_{xy} = \frac{1}{1+\nu}\left(e_{xy}^{\circ}\right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E dz$$

$$M_x = \left[k_x + \nu k_y\right] \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E z^2 dz$$

$$M_y = \left[k_y + \nu k_x\right] \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E z^2 dz$$

$$Q_x = \frac{1}{1+\nu}\left(e_{zx}^{\circ}\right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E dz$$

$$Q_y = \frac{1}{1+\nu}\left(e_{yx}^{\circ}\right) \int_{-h/2}^{h/2} E dz$$

با توجه به تکیه‌گاه که بصورت تکیه‌گاه ساده در چهار ضلع ورق است، شرایط مرزی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

روی لبه‌های $x = 0, a$، داریم:

$$u = v = w = \theta_y = M_x = 0$$

روی لبه‌های $y = 0, b$، داریم:

$$u = v = w = \theta_x = M_y = 0$$

۳-۲- روش حل آزادسازی دینامیکی

سیستم معادلات بیان شده در بخش قبل که پاسخ غیرخطی تغییرمکان بزرگ ورق مستطیلی هدفمند تابعیرا تشریح می‌کنند، پیچیده هستند و حل تحلیلی آنها به‌راحتی امکان‌پذیر نیست. بنابراین استفاده از روش‌های حل عددی می‌تواند مفید باشد. در این قسمت، روش آزادسازی دینامیکی [۲۸ و ۲۹] به‌همراه یک طرح گسسته‌سازی تفاضل محدود برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی ورق هدفمند تابعیمستطیلی استفاده می‌شود. آزادسازی دینامیکی یک روش تکراری است که عموماً یک مسأله استاتیکی را به فرم دینامیکی آن برای به‌دست آوردن یک حل پایا تبدیل می‌کند. این روش خصوصاً برای مسائل با غیرخطی هندسی و رفتار ماده بالا مورد توجه است. درضمن به‌دلیل طبیعت صریح آن و همچنین به‌این‌دلیل‌که در این روش با همه کمیت‌ها به‌صورت بردار رفتار شود، این روش بسیار مناسب برای کامپیوتر و قابل برنامه‌ریزی آسان با ملزومات ذخیره داده کم و پایداری حل آن بسیار مطلوب است. به‌واسطه‌این فواید محققان بسیاری از این روش برای حل هم معادلات خطی و هم غیرخطی استفاده می‌کنند.

الگوریتم روش آزادسازی دینامیکی بر اساس تبدیل یک مسأله شرط مرزی به مسأله شرط اولیه و مرزی معادل آن استوار

است. این تبدیل با اضافه کردن جملات اینرسی و میرایی به سمت راست معادلات تعادل ورق حاصل می‌شود. قبل از اعمال این روش، مشابه مطالعات پیشین جهت بدون بعد نمودن معادلات، متغیرهای بدون بعد، با علامت خط بالای آنها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x = a\bar{x}, y = b\bar{y}, z = h\bar{z}, E = E_m\bar{E}\ ,$$

$$E_m = min(E_c, E_m), h = h_\circ\bar{h}, t = t_\circ\bar{t}$$

$u = \frac{h^2}{L}\bar{u},\ \ v = \frac{h^2}{L}\bar{v},\ \ w = h\bar{w},\ \ e_x^\circ = \frac{h^2}{L^2}\bar{e_x^\circ},\ \ e_y^\circ = \frac{h^2}{L^2}\bar{e_y^\circ},\ \ e_{xy}^\circ = \frac{h^2}{L^2}\bar{e}_{xy}^\circ,\ \ \theta_x = \frac{h}{L}\bar{\theta}_x,\ \ \theta_y = \frac{h}{L}\bar{\theta}_y,\ \ e_{yz}^\circ = \frac{h}{L}\bar{e}_{yz}^\circ,\ \ e_{zx}^\circ = \frac{h}{L}\bar{e}_{zx}^\circ,\ \ k_x = \frac{h}{L^2}\bar{k}_x,\ \ k_y = \frac{h}{L^2}\bar{k}_y,\ \ k_{xy} = \frac{h}{L^2}\bar{k}_{xy},\ \ N_x = \frac{Eh^3}{L^2}\bar{N}_x,\ \ N_y = \frac{Eh^3}{L^2}\bar{N}_y,\ \ N_{xy} = \frac{Eh^3}{L^2}\bar{N}_{xy},$
$M_x = \frac{Eh^4}{L^2}\bar{M}_x,\quad M_y = \frac{Eh^4}{L^2}\bar{N}_y,\quad M_{xy} = \frac{Eh^4}{L^2}\bar{M}_{xy},$
$Q_x = \frac{Eh^2}{L}\bar{Q}_x, Q_y = \frac{Eh^2}{L}\bar{Q}_y, q = \frac{Eh^4}{L^4}\bar{q}$

عبارت‌های دانسیته مجازی انتقالی در راستاهای x، y و z به‌ترتیب ρ_u، ρ_v و ρ_w و دانسیته مجازی دورانی حول محورهای x و y، به‌ترتیب ρ_{θ_x} و ρ_{θ_y} هستند. عبارت‌های ضریب میرایی مجازی انتقالی در راستاهای x، y و z به‌ترتیب k_u، k_v و k_w و ضریب میرایی مجازی دورانی حول محورهای x و y، به‌ترتیب k_{θ_x} و k_{θ_y} هستند. این عبارت‌ها در محل مناسب در سمت راست معادلات تعادل (۷) قرار می‌گیرند. نحوه محاسبه آنها در پیوست مقاله با توجه به فرم گسسته سازی تفاضل محدود که در ادامه بحث می‌شود، آورده شده است. فرم بی‌بعد شده آنها به‌شکل زیر است:

$$k_u = \frac{Eh^3t}{L^4}\bar{k}_u,\ k_v = \frac{Eh^3t}{L^4}\bar{k}_v, k_w = \frac{Eh^3t}{L^4}\bar{k}_w,$$

$$k_{\theta_x} = \frac{Eh^3t}{L^2}\bar{k}_{\theta_x}, k_{\theta_y} = \frac{Eh^3t}{L^2}\bar{k}_{\theta_y},\qquad \rho_u = \frac{Eh^3t^2}{L^4}\bar{\rho}_u,$$
$$\rho_v = \frac{Eh^3t^2}{L^4}\bar{\rho}_v,\quad \rho_w = \frac{Eh^3t^2}{L^4}\bar{\rho}_w,\quad \rho_{\theta_x} = \frac{Eh^3t^2}{L^2}\bar{\rho}_{\theta_x},$$
$$\rho_{\theta_y} = \frac{Eh^3t^2}{L^2}\bar{\rho}_{\theta_y}.$$

با اضافه کردن عبارت‌های دانسیته مجازی و ضرایب میرایی مجازی در سمت راست معادلات تعادل (۷) به‌عنوان ضرایب به‌ترتیب جملات شتاب و سرعت و با اعمال کمیت‌های بدون بعد، معادلات تعادل به‌صورت زیر در می‌ایند:

$$\frac{\partial\bar{N}_x}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial\bar{N}_{xy}}{\partial\bar{y}} = \bar{\rho}_u\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{t}^2} + \bar{k}_u\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}}$$

$$\frac{\partial\bar{N}_y}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial\bar{N}_{xy}}{\partial\bar{y}} = \bar{\rho}_v\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{t}^2} + \bar{k}_v\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{t}}$$

$$\left(\frac{L^2}{h^2}\right)\left(\frac{\partial\bar{Q}_x}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial\bar{Q}_y}{\partial\bar{y}}\right) + \bar{N}_x\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2} + 2\bar{N}_{xy}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}} + \bar{N}_y\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{y}^2} + \bar{q} = \bar{\rho}_w\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{t}^2} + \bar{k}_w\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{t}} \quad (۱۰)$$

$$\frac{\partial\bar{M}_x}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial\bar{M}_{xy}}{\partial\bar{y}} - \left(\frac{L^2}{h^2}\right)\bar{Q}_x = \bar{\rho}_{\theta_x}\frac{\partial^2\bar{\theta}_x}{\partial\bar{t}^2} + \bar{k}_{\theta_x}\frac{\partial\bar{\theta}_x}{\partial\bar{t}}$$

$$\frac{\partial\bar{M}_y}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial\bar{M}_{xy}}{\partial\bar{x}} - \left(\frac{L^2}{h^2}\right)\bar{Q}_y = \bar{\rho}_{\theta_y}\frac{\partial^2\bar{\theta}_y}{\partial\bar{t}^2} + \bar{k}_{\theta_y}\frac{\partial\bar{\theta}_y}{\partial\bar{t}}$$

جهت اعمال روش آزادسازی دینامیکی تقریب زیر برای سرعت و شتاب درنظر گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = \dot{\gamma} = \frac{\dot{\gamma}^a + \dot{\gamma}^b}{2}, \frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial\gamma}{\partial t}) = \frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial t} = \frac{\dot{\gamma}^a - \dot{\gamma}^b}{\Delta t}\gamma = \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\theta}_x, \bar{\theta}_y$$

که در آن بالانویس a و b به مقادیر متغیرها به‌ترتیب به بعد و قبل از نمو زمانی Δt اشاره دارد.

اولین معادله تعادل شبه دینامیکی،به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial\bar{N}_x}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial\bar{N}_{xy}}{\partial\bar{y}} = \bar{\rho}_u\frac{\dot{\bar{u}}^a - \dot{\bar{u}}^b}{\Delta t}, +\bar{k}_u\frac{\dot{\bar{u}}^a + \bar{u}^b}{2}$$

با اعمال کمی عملیات ریاضی،به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\dot{\bar{u}}^a = \left(\frac{1}{1 + {k^*}_u}\right)[(1 - {k^*}_u)\dot{\bar{u}}^b + \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_u}\left(\frac{\partial\bar{N}_x}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial\bar{N}_{xy}}{\partial\bar{y}}\right)]$$

که در آن ${k^*}_u = \frac{\bar{k}_u\Delta t}{2\bar{\rho}_u}$. به‌این ترتیب معادلات متناظر معادلات دیگر تعادل شبه‌دینامیکی را می‌توان به‌دست آورد.

این معادله و سایر معادلات تعادل شبه دینامیکی پس از اعمال تفاضلات محدود مرکزی به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\dot{\bar{u}}^a(i,j) = \left(\frac{1}{1+k^*{}_u(i,j)}\right)[(1-k^*{}_u)\dot{\bar{u}}^b(i,j) + \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_u(i,j)}\left(\frac{\bar{N}_x(i+1,j)-\bar{N}_x(i-1,j)}{2\Delta x} + \frac{\bar{N}_{xy}(i,j+1)-\bar{N}_{xy}(i,j-1)}{2\Delta y}\right)$$

$$\dot{\bar{v}}^a(i,j) = \left(\frac{1}{1+k^*{}_v(i,j)}\right)[(1-k^*{}_v)\dot{\bar{v}}^b(i,j) + \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_v(i,j)}\left(\frac{\bar{N}_y(i,j+1)-\bar{N}_y(i,j-1)}{2\Delta x} + \frac{\bar{N}_{xy}(i+1,j)-\bar{N}_{xy}(i-1,j)}{2\Delta y}\right)]$$

$$\begin{aligned}\dot{\bar{w}}^a(i,j) &= \left(\frac{1}{1+k^*{}_w(i,j)}\right)[(1-k^*{}_w)\dot{\bar{w}}^b(i,j) + \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_w(i,j)}\Bigg(\left(\frac{L^2}{h^2}\right)\left(\frac{\bar{Q}_x(i+1,j)-\bar{Q}_x(i-1,j)}{2\Delta x} + \frac{\bar{Q}_y(i,j+1)-\bar{Q}_y(i,j-1)}{2\Delta y}\right) + \bar{N}_x(i,j) \\ &\times \left(\frac{\bar{w}(i-1,j)-2\bar{w}(i,j)+\bar{w}(i+1,j)}{\Delta x^2}\right) + 2\bar{N}_{xy}(i,j)\times(\frac{\bar{w}(i+1,j+1)-\bar{w}(i-1,j+1)}{4\Delta x\Delta y} + \frac{-\bar{w}(i+1,j-1)+\bar{w}(i-1,j-1)}{4\Delta x\Delta y}) \\ &+ \bar{N}_y(i,j)(\frac{\bar{w}(i,j-1)-2\bar{w}(i,j)+\bar{w}(i,j+1)}{\Delta y^2}) + \bar{q}(i,j)\Bigg)\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

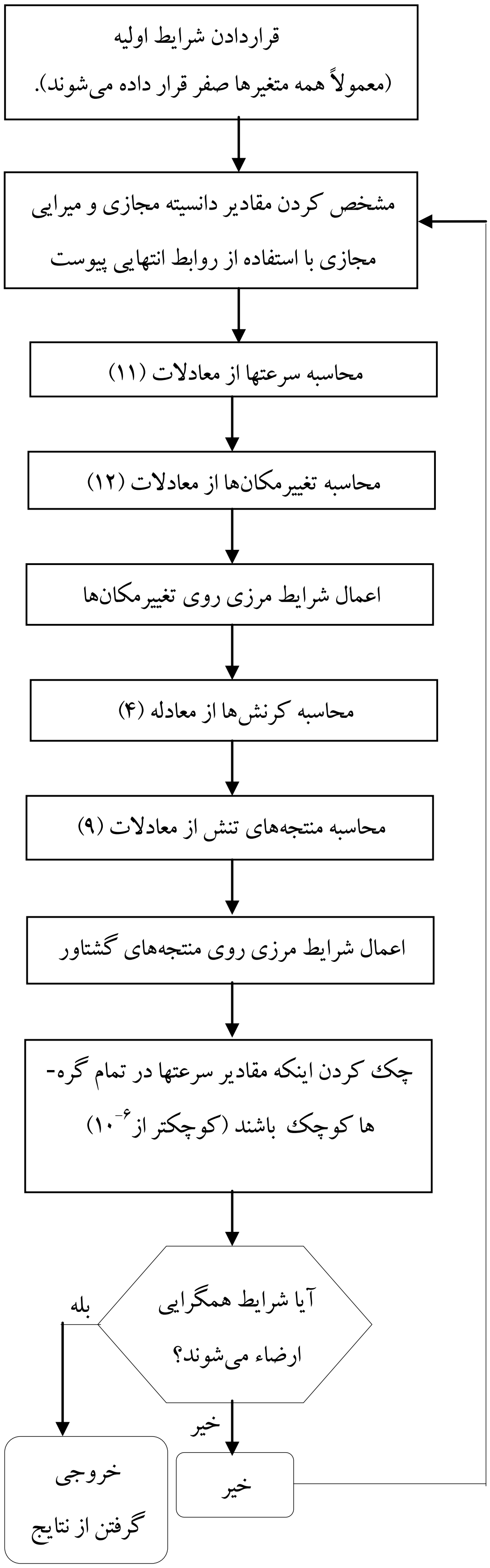
$$\dot{\bar{\theta}}_x{}^a(i,j) = \left(\frac{1}{1+k^*{}_{\theta_x}(i,j)}\right)[(1-k^*{}_{\theta_x})\dot{\bar{\theta}}_x{}^b(i,j) + \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_{\theta_x}(i,j)}\left(\frac{\bar{M}_x(i+1,j)-\bar{M}_x(i-1,j)}{2\Delta x} + \frac{\bar{M}_{xy}(i,j+1)-\bar{M}_{xy}(i,j-1)}{2\Delta y}\right)]$$

$$\dot{\bar{\theta}}_y{}^a(i,j) = \left(\frac{1}{1+k^*{}_{\theta_y}(i,j)}\right)[\left(1-k^*{}_{\theta_y}\right)\dot{\bar{\theta}}_y{}^b(i,j) + \frac{\Delta t}{\bar{\rho}_{\theta_y}(i,j)}\left(\frac{\bar{M}_y(i,j+1)-\bar{M}_y(i,j-1)}{2\Delta x} + \frac{\bar{M}_{xy}(i+1,j)-\bar{M}_{xy}(i-1,j)}{2\Delta y}\right)]$$

تبدیل معادلات تعادل به شکل مسأله مقدار اولیه باعث وارد کردن متغیر زمان t شد. بنابراین لازم است که جهت برقراری سازگاری تغییرمکان-زمان از روابط (۱۲) استفاده شود: با استفاده از انتگرال‌گیری از مؤلفه‌های سرعت طبق روابط زیر می‌توان تغییر مکان‌های هر گره را محاسبه نمود:

$$\gamma^a = \gamma^b(i,j) + \Delta t\,\dot{\gamma}^a(i,j)\gamma = \bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{\theta}_x,\bar{\theta}_y \qquad (۱۲)$$

با تکرار محاسبات، روند فوق آن‌قدر ادامه می‌یابد تا سرعت‌ها به مقدار ناچیز مثلاً 10^{-6} یا کمتر از آن برسند. در این شرایط تعادل استاتیکی حاکم شده و نوسانات تقریباً به صفر میرا می‌شوند. در نتیجه مقادیر تغییر مکان و تنش با تقریب بسیار خوبی محاسبه می‌گردند. بنابراین برای جمع‌بندی و تشریح دقیق نحوه اعمال روش آزادسازی دینامیکی، الگوریتم این روش روی معادلات پیشین به‌صورتنمودار جریانیشکل (۲) قابل ارائه است.عملکرد موفق روش آزادسازی دینامیکی به انتخاب مناسب مقادیر ضرایب میرایی و دانسیته مجازی و همچنیننمو زمانی بستگی دارد. مقادیر این کمیت‌ها در اوایل ابداع روش آزادسازی دینامیکی به‌طریقه سعی و خطا مورد استفاده قرار می‌گرفتند. اما به‌تدریج روش‌هایی برای محاسبه این ضرایب به‌وجود آمد [۲۰ و۳۰]. در مطالعه حاضر، جهت حصول یک حل رضایت‌بخش، ۱۱ کمیت باید در ابتدا بصورت بهینه انتخاب شوند. عبارت‌های تقریب برای دانسیته‌های مجازی با استفاده از تکنیک بیان شده در [۳۰] با فرض مقدار واحد برای نمو زمانی Δt، در تحقیق حاضر برای ماده هدفمند تابعی در بخش پیوست ارائه شده است. همچنین ارتباط با ضرایب میرایی از طریق یک ضریب مشترک امکان‌پذیر است.



شکل (۲) نمودار جریانی الگوریتم اعمال روش آزادسازی دینامیکی

جزئیات این روند برای انتخاب درستو بهینه ضرایب میرایی در [۲۰]آورده شده است. لازم به ذکر است که در تحلیل آزادسازی دینامیکی همواره دو پارامتر، میرایی ویسکوز و دانسیته مجازی شامل تابع ساده‌ای از نمو زمان و دانسیتهبه‌صورت$\frac{\Delta t^2}{\rho}$ ظاهر می‌شوند [۲۰ و۳۰]. همان‌طور که اشاره شد میرایی معمولاً به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که حل استاتیکی هرچه سریعتر حاصل گردد و سایر پارامترها باید با درنظر گرفتن پایداری عددی به‌حد کافی بزرگ باشند تا تعداد تکرار مورد نیاز به حداقل برسد. در برخی حالت‌ها تعداد تکرار برای همگرا شدن کمیت‌های مورد نظر در حل مسئله ممکن است زیاد باشد ولی سادگی این روش آن‌را همچنان به‌عنوان یک روش موثر و کارآمد در حل مسائل خطی و غیرخطی مطرح می‌نماید. در عمل ضریب میرایی به میزان ناچیزی کمتر از مقدار بحرانی آن به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که یک همگرایی نوسانی ایجاد شود که در پایان به مقدار استاتیکی میل کند. به‌این ترتیب محدوده‌ای به گونه‌ای مشخص می‌شود که جواب واقعی همواره در این محدوده است. به‌طور کلی فرمول‌بندی اشاره شده از نظر پارامتر زمان خطی بوده و در نتیجه در این روش فقط نیاز به جاگذاری مستقیم مقادیر از تکرار قبلی برای محاسبه مقادیر جدید می‌باشد.

۴- نتایج و بحث

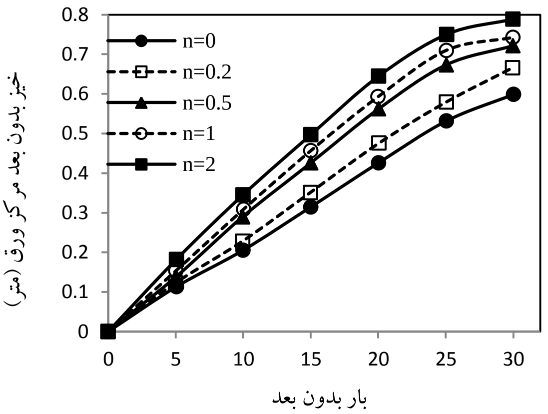
نتایج حل عددی ورق ضخیم مستطیلی هدفمند تابعیبه‌کمک الگوریتم آزادسازی دینامیکی بر مبنای یک شبکه حل بر اساس تفاضلات محدود مرکزی در این قسمت ارائه شده و با تحقیق در دسترس پیشین [۱۶] مورد مقایسه و اعتبارسنجی قرارمی‌گیرد. شرایط بارگذاری نیز به‌صورت یکنواخت بوده و شرایط تکیه‌گاهی نیز به‌صورت ساده در چهار لبه ورق فرض گردیده و تمامی نتایج به صورت بی‌بعد ارائه می‌شود. در تحقیق مذکور از تئوری مرتبه بالاتر برشی جهت مدلسازی ورق ضخیم استفاده شده، اثرات غیرخطی تغییر شکل بزرگ ورق مشابه تحقیق حاضر در نظر گرفته شده و جهت حل معادلات غیرخطی از روش نیوتن-رافسون استفاده شده است. مصالح ورق هدفمند تابعیسرامیک/فلز مورد مطالعه به‌صورترترکیب زیرکونیا/آلومینیوم منطبق بر تحقیق مورد بحث

درنظر گرفته می‌شود. خواص این مواد در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول (۱)خواص اجزاء ماده هدفمند تابعی زیرکونیا/آلومینیوم [۱۶]

نام فاز	مدول الاستیسیته (GPa)	ضریب پواسون	چگالی $(\mathrm{Kg/m^3})$
آلومینیوم	۷۰	۰/۳	۲۷۰۷
زیرکونیا	۱۵۱	۰/۳	۳۰۰۰

در شکل (۳) نحوه تغییرات خیز بدون بعد مرکز ورق مربعی با نسبت ضلع به‌ضخامت ۱۰۰ برحسب بار گسترده عرضی بدون بعد در مقادیر n برابر ۰، ۰/۲، ۰/۵، ۱ و ۲ نشان داده شده است. مقدار نسبت ضلع به ضخامت زیاد ۱۰۰، اثرات تغییرشکل ناشی از کرنش‌های برشی عرضی را کاهش می‌دهد.



شکل (۳) اثر پارامتر ماده n بر تغییرات خیز بدون بعد مرکز ورق مستطیلی هدفمند تابعی بر حسب بار عرضی بدون بعد وارده به ورق

همان‌طور که در شکل (۳) مشاهده می شود، ضمن تأیید مشابه نحوه وابستگی خیز ورق به بار بدون بعد وارده در n های مختلف، ملاحظه می‌شود که با افزایش پارامتر ماده هدفمند تابعی، n، ورق رفتار نرم‌تری از خود نشان می‌دهد، همچنین مشابه جدول (۲) از این نمودار می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش n اثرات غیرخطی هندسی ناشی از خیز بزرگ ورق بیشتر می‌شود.

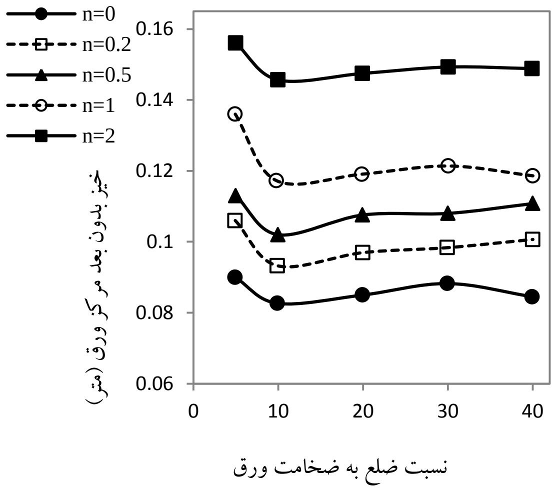
در جدول (۲) یک مطالعه پارامتری در مورد اثر ثابت توانی ماده هدفمند تابعی، n، روی تغییرات خیز عرضی برای ورق مربعی با نسبت ضلع به ضخامت برابر ۵، تحت بار عرضی بدون بعد $\bar{q} = ۲۰$ انجام شده و نتایج حاصل با نتایج کومار مورد مقایسه قرار گرفته است.

جدول (۲) اثر ثابت توانی ماده هدفمند تابعی، n، روی تغییرات خیز عرضی و مقایسه نتایج به‌دست‌آمده از الگوریتم آزادسازی دینامیکی با نتایج کومار و همکاران [۱۶]

نتایج حاصل از کار کومار وهمکاران [۱۶]		نتایج حاصل از روش آزادسازی دینامیکی	
خیز بدون بعد مرکز ورق	n	خیز بدون بعد مرکز ورق	n
۰/۰۹۵	۰	۰/۰۹۰	۰
۰/۱۱۲	۰/۲	۰/۱۰۶	۰/۲
۰/۱۲۰	۰/۵	۰/۱۱۳	۰/۵
۰/۱۴۵	۱	۰/۱۳۶	۱
۰/۱۶۸	۲	۰/۱۵۶	۲

باتوجه به جدول (۲) ضمن تأیید نتایج تحقیق حاضر در مقایسه با تحقیق مورد اشاره می‌توان مشاهده کرد که مطابق انتظار با توجه به جایگاه nو با توجه به مقادیر خواص آلومینیوم و زیرکونیم، با افزایش مقدار nرفتار ورق نرم‌تر شده و خیز ورق افزایش پیدا می‌کند و درنتیجه اثرات غیرخطی هندسی بیشتر خود را نشان می‌دهند.

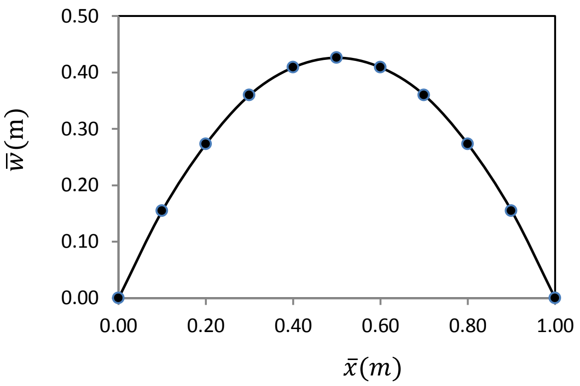
در شکل (۴) وابستگی خیز بدون بعد مرکز ورق به نسبت ضلع به ضخامت ورق در مقادیر n برابر ۰، ۰/۲، ۰/۵، ۱ و ۲ نشان داده شده است.



شکل (۴) اثر پارامتر ماده n بر تغییرات خیز بدون بعد مرکز ورق مستطیلی هدفمند تابعی برحسب نسبت ضلع به ضخامت ورق

همان‌طور که در شکل (۴) مشاهده می شود، ضمن تأیید نحوه وابستگی خیز ورق به نسبت ضلع به ضخامت آن در nهای مختلف، ملاحظه می‌شود که با افزایش پارامتر ماده هدفمند تابعی، n، ورق رفتار نرم‌تری از خود نشان می‌دهد.

در شکل (۵) نتایج حل ورق مربعی مورد نظر ($a/b=$۱)با نسبت ضلع به ضخامت ۱۰۰ ($L/h=$۱۰۰) و ترکیب ماده هدفمند تابعی با $n=0$ تحت بار گسترده یکنواخت عرضی $\bar{q}=$۲۰ با استفاده از روش آزادسازی دینامیکی برای حل شبکه ۱۰×۱۰ نشان داده شده است. در این شکل تغییرات خیز عرضی بدون بعد واقع بر محور تقارن افقی ورق بر حسب $\bar{x}$ رسم شده است. از این شکل رفتار مطابق انتظار تغییرشکل ورق با تکیه‌گاه ساده در چهار لبه مشاهده می‌شود که حداکثر خیز در وسط ورق و تغییرمکان در لبه‌ها صفر است. شایان ذکر است که نمودارهای مشابه با رفتارهای منطقی در مورد تغییرمکان‌ها در راستاهای x و y، دوران‌ها حول محورهای x و y و مؤلفه‌های تنش استخراج شده‌اند، که تنها به‌ارائه نمودار شکل (۵) بسنده شده است.



شکل (۵) خیز عرضی بدون بعد ورق مستطیلی هدفمند تابعی واقع بر محور تقارن افقی

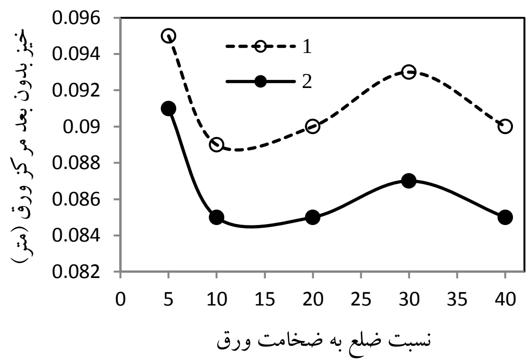
در جدول (۳) نتایج حاصل از اعمال روش آزادسازی دینامیکی برای ورق مربعی ذکرشده در بارهای گسترده بدون بعد مختلف استخراج و با نتایج تحقیق کومار و همکارانش مورد مقایسه قرار گرفته است.

جدول (۳) تطابق خوبی بین نتایج تحقیق حاضر با اعمال روش آزادسازی دینامیکی بر روی ورق ضخیم در مقایسه با نتایج اعمال روش نیوتن-رافسون روی ورق ضخیم با تئوری مرتبه بالاتر برشی در تحقیق کومار نشان می‌دهد. به‌طوریکه خطای نسبی روش آزادسازی دینامیکی در بیشترین حالت ۶ درصد می‌باشد. از اعداد این جدول می‌توان ملاحظه کرد که در خیز بیشتر، اثرات غیرخطی هندسی بیشتر آشکار می‌گردند.

جدول (۳) مقایسه نتایج روش آزادسازی دینامیکی با نتایج کومار و همکاران [۱۶] برای تغییرات خیز بدون بعد مرکز ورق تحت بار بدون بعد مختلف

نتایج حاصل از کار کومار وهمکاران [۱۶]		نتایج حاصل از روش آزادسازیدینامیکی	
خیز بدون بعد مرکز ورق	بار بدون بعد	خیز بدون بعد مرکز ورق	بار بدون بعد
۰/۱۱۹	۵	۰/۱۱۲	۵
۰/۲۱۶	۱۰	۰/۲۰۴	۱۰
۰/۳۳۱	۱۵	۰/۳۱۴	۱۵
۰/۴۴۸	۲۰	۰/۴۲۶	۲۰
۰/۵۵۷	۲۵	۰/۵۳۱	۲۵
۰/۶۳۰	۳۰	۰/۶۰۳	۳۰

در شکل (۶) یک مطالعه پارامتری در مورد اثر نسبت ضلع به ضخامت روی تغییرات خیز عرضی انجام شده است.



شکل (۶) مقایسه نحوه تغییرات خیز بدون بعد مرکز ورق مستطیلی هدفمند تابعی بر حسب نسبت ضلع به ضخامت ورق: ۱ کار کومار و همکاران [۱۶]، ۲ تحقیق حاضر

همان‌طور که در شکل (۶) مشاهده می‌شود، ضمن تأیید روند نتایج مطالعه حاضر با تحقیق کومار و همکاران، مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت ضلع به ضخامت ورق، یعنی با نازک‌تر شدن ورق، اثرات غیرخطی در صفحات کامپوزیتی هدفمند تابعی، خیز مرکزی را کاهش داده ورفتار سفت‌تری از خود نشان می‌دهد. این اثر در کاهش خیز صفحات نازک با نسبت ضلع به ضخامت بیشتر از ۳۰ برجسته و غالب است.

البته این کاهش برای نسبت ضلع به‌ضخامت بیشتر از ۳۰ چندان محسوس نیست و در این حالت می‌توان از تئوری ساده‌تر کلاسیک ورق‌ها به‌جای تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول حاضر جهت بررسی رفتار غیرخطی ورق استفاده کرد.

در جدول (۴) یک تحلیل حساسیت روی تعداد گره‌های ورق مربعی ذکر شده انجام شده است. سه شبکه‌بندی ۱۰×۱۰، ۱۶×۱۶ و ۲۴×۲۴ در بارگذاری‌های مختلف مورد تحلیل قرار گرفته است و نتایج برای خیز عرضی بدون بعد در جدول (۴) نشان داده شده است.

جدول (۴) اثر حساسیت به تعداد شبکه بندی روی خیز عرضی حاصل از الگوریتم آزادسازی دینامیکی برای ورق ضخیم‌هدفمند تابعی

خیز بدون بعد مرکز ورق	شبکه‌بندی	بار بدون بعد
۰/۱۱۲۲۳	۱۰×۱۰	
۰/۱۱۲۱۳	۱۶×۱۶	۵
۰/۱۱۲۲۳	۲۴×۲۴	
۰/۲۰۴۳۹	۱۰×۱۰	
۰/۲۰۴۶۰	۱۶×۱۶	۱۰
۰/۲۰۴۸۹	۲۴×۲۴	
۰/۳۱۴۰۱	۱۰×۱۰	
۰/۳۱۴۵۲	۱۶×۱۶	۱۵
۰/۳۱۴۷۷	۲۴×۲۴	
۰/۴۲۶۳۰	۱۰×۱۰	
۰/۴۲۶۶۹	۱۶×۱۶	۲۰
۰/۴۲۶۹۵	۲۴×۲۴	
۰/۵۳۱۲۹	۱۰×۱۰	
۰/۵۳۲۵۱	۱۶×۱۶	۲۵
۰/۵۳۳۰۶	۲۴×۲۴	
۰/۶۰۳۴۵	۱۰×۱۰	
۰/۶۰۴۰۸	۱۶×۱۶	۳۰
۰/۶۰۴۹۴	۲۴×۲۴	

طبق جدول (۴) ملاحظه می‌شود که با افزایش شبکه‌ها، مقدار خیز بدون بعد مرکز ورق افزایش یافته ومطابق انتظار سازه رفتار نرم‌تری از خود نشان می‌دهد و نتایج به داده‌های حاصل از کار کومار و همکارانش [۱۶] نزدیک می‌شود. همچنین با دقت بر روی اعداد جدول می‌توان تأثیر رفتار غیرخطی ورق را در تعداد شبکه بالاتر واضح‌تر مشاهده کرد.

شایان ذکر است خطای روش آزادسازی دینامیکی در بیشترین حالت ۷ درصد و در کمترین حالت ۴ درصد می‌باشد. همچنین با مقایسه شکل (۶) و جدول (۴) مشاهده می شود که حساسیت جابجایی بدون بعد ورق به تغییرات بار بدون بعد، بیشتر از تغییرات نسبت ضلع به ضخامت ورق می‌باشد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله قابلیت‌های روش آزادسازی دینامیکی در تحلیل غیرخطی استاتیکی ورق هدفمند تابعینسبتاً ضخیم مستطیلی با ضخامت یکنواخت در سرتاسر ورق تحت بارگذاری مکانیکی عرضی یکنواخت ارائه شده است. با استفاده از روابط کرنش-تغییرمکان فنکارمن، معادلات تعادل غیرخطی جدیدی براساس تئوری مرتبه اول برشی توسعه داده شده و روش آزادسازی دینامیکی به‌همراه تکنیک گسسته‌سازی تفاضل محدود برای حل معادلات استفاده شده است. صحت و اعتبارسنجی الگوریتم و نتایج خروجی برای شرایط معلوم با مقاله‌ای که با روش تئوری مرتبه بالاتر برشی برای ورق هدفمند تابعی ضخیم، تحت خمش غیرخطی حل شده، کنترل گردیده و حداکثر خطای ۷ درصد برای روش آزادسازی دینامیکی ارزیابی شده است.

فهرست علائم

ρ_u	دانسیته مجازی انتقالی در راستای x ($\mathrm{kg/m^3}$)
ρ_v	دانسیته مجازی انتقالی در راستای y ($\mathrm{kg/m^3}$)
ρ_w	دانسیته مجازی انتقالی در راستای z ($\mathrm{kg/m^3}$)
ρ_{θ_x}	دانسیته مجازی دورانی حول محور x ($\mathrm{kg.rad/m^3}$)
ρ_{θ_y}	دانسیته مجازی دورانی حول محور y ($\mathrm{kg.rad/m^3}$)
σ_x	تنش در راستای x
σ_y	تنش در راستای y
a	طول ورق (m)
b	عرض ورق (m)
E	مدول الاستیسیته (Pa)
$\mathring{e}_x$	کرنش در راستای x

کرنش در راستای y	e°_{y}
کرنش در راستای xy	e°_{xy}
ضخامت ورق(m)	h
ضریب میرایی مجازی انتقالی در راستای x (rad/m)	k_u
ضریب میرایی مجازی انتقالی در راستای y (rad/m)	k_v
ضریب میرایی مجازی انتقالی در راستای z (rad/m)	k_w
ضریب میرایی مجازی دورانی حول محور x (rad/m)	k_{θ_x}
ضریب میرایی مجازی دورانی حول محور y(rad/m)	k_{θ_y}
منتجه تنش برشی عرضی (Pa)	M_{ij}
ثابت توانی ماده هدفمند تابعی	n
منتجه تنش داخل صفحه (Pa)	N_{ij}
بارگذاری عرضی (N)	q
گشتاور (N.m)	Q_i
مؤلفه بردار تغییر مکان در راستای x (m)	u
تغییرمکان داخل صفحه نقطه‌ای روی صفحه‌میانی ورق در راستای x	u^0
مؤلفه بردار تغییر مکان در راستای y(m)	v
تغییرمکان داخل صفحه نقطه‌ای روی صفحه‌میانی ورق در راستای y	v^0
کسر حجمی فلز	V_m
کسر حجمی سرامیک	V_c
مؤلفه بردار تغییر مکان در راستای z (m)	w
مختصات ضخامت (m)	z

پیوست‌ها

الف-محاسبه دانسیته مجازی

با نوشتن روابط کرنش و انحنا بر اساس تفاضل محدود، می‌توان مؤلفه‌های کرنش و انحنا را بر حسب تغییر مکان طبق روابط ذیل در هر گره محاسبه نمود.

$$e^{\circ}{}_{x}(i,j)=\left[\frac{u(i+1,j)-u(i-1,j)}{2\Delta x}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{w(i+1,j)-w(i-1,j)}{2\Delta x}\right]^2$$

$$e^{\circ}{}_{y}(i,j)=[\frac{v(i,j+1)-v(i,j-1)}{2\Delta y}]+\frac{1}{2}[\frac{w(i,j+1)-w(i,j-1)}{2\Delta y}]^2$$

$$e^{\circ}{}_{xy}(i,j)=\left[\frac{u(i,j+1)-u(i,j-1)}{2\Delta y}\right]+\left[\frac{v(i+1,j)-v(i-1,j)}{2\Delta x}\right]+\left[\frac{w(i+1,j)-w(i-1,j)}{2\Delta x}\right]\times\left[\frac{w(i,j+1)-w(i,j-1)}{2\Delta y}\right]$$

$$e^{\circ}{}_{yz}(i,j)=\theta_y(i,j)+\left[\frac{w(i,j+1)-w(i,j-1)}{2\Delta y}\right]$$

$$e^{\circ}{}_{zx}(i,j)=\theta_x(i,j)+\left[\frac{w(i+1,j)-w(i-1,j)}{2\Delta x}\right]$$

$$k_x(i,j)=\frac{\theta_x(i+1,j)-\theta_x(i-1,j)}{2\Delta x}$$

$$k_y(i,j)=\frac{\theta_y(i,j+1)-\theta_y(i,j-1)}{2\Delta y}$$

$$k_{xy}(i,j)=\frac{\theta_x(i,j+1)-\theta_x(i,j-1)}{2\Delta y}+\frac{\theta_y(i+1,j)-\theta_y(i-1,j)}{2\Delta x}$$

بر اساس روش ارائه شده در [۳۰]، با جاگذاری روابط بالا در معادلات (۹) به‌دست می‌آوریم:

$$N_x(i,j) = \left\{\left[\frac{u(i+1,j)-u(i-1,j)}{2\Delta x}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{w(i+1,j)-w(i-1,j)}{2\Delta x}\right]^2 + \nu\left[\frac{v(i,j+1)-v(i,j-1)}{2\Delta y}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{w(i,j+1)-w(i,j-1)}{2\Delta y}\right]^2\right\}\frac{1}{1-\nu^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E dz$$

$$N_y(i,j) = \left\{\left[\frac{v(i,j+1)-v(i,j-1)}{2\Delta y}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{w(i,j+1)-w(i,j-1)}{2\Delta y}\right]^2 + \nu\left[\frac{u(i,j+1)-u(i,j-1)}{2\Delta y}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{w(i,j+1)-w(i,j-1)}{2\Delta x}\right]^2\right\}\frac{1}{1-\nu^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E dz$$

$$N_{xy}(i,j) = \left\{\left[\frac{u(i,j+1)-u(i,j-1)}{2\Delta y}\right] + \left[\frac{v(i+1,j)-v(i-1,j)}{2\Delta x}\right] + \left[\frac{w(i+1,j)-w(i-1,j)}{2\Delta x}\right] * \left[\frac{w(i,j+1)-w(i,j-1)}{2\Delta y}\right]\right\}\frac{1}{1+\nu}\int_{-h/2}^{h/2} E dz$$

$$M_x(i,j) = \left[\frac{\theta_x(i+1,j)-\theta_x(i-1,j)}{2\Delta x} + \nu\frac{\theta_y(i,j+1)-\theta_y(i,j-1)}{2\Delta y}\right]\frac{1}{1-\nu^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E z^2 dz$$

$$M_y(i,j) = \left[\frac{\theta_y(i,j+1)-\theta_y(i,j-1)}{2\Delta y} + \nu\frac{\theta_x(i+1,j)-\theta_x(i-1,j)}{2\Delta x}\right]\frac{1}{1-\nu^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E z^2 dz$$

$$M_{xy}(i,j) = \left\{\frac{\theta_x(i,j+1)-\theta_x(i,j-1)}{2\Delta y} + \frac{\theta_y(i+1,j)-\theta_y(i-1,j)}{2\Delta x}\right\}\frac{1}{1+\nu}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E z^2 dz$$

$$Q_x(i,j) = \left\{\theta_x(i,j) + \left[\frac{w(i+1,j)-w(i-1,j)}{2\Delta x}\right]\right\}\frac{1}{1+\nu}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E dz$$

$$Q_y(i,j) = \left\{\theta_y(i,j) + \left[\frac{w(i,j+1)-w(i,j-1)}{2\Delta y}\right]\right\}\frac{1}{1+\nu}\int_{-h/2}^{h/2} E dz$$

با درنظر گرفتن قدرمطلق مؤلفه‌های تغییر مکان برابر واحد نتیجه می‌شود:

$$\tilde{N}_x(i,j) = \left\{\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{2\Delta x^2}|w(i+1,j)-w(i-1,j)| + \frac{\nu}{\Delta y} + \frac{\nu}{2\Delta y^2}|w(i,j+1) - w(i,j-1)|\right\}\frac{1}{1-\nu^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E dz$$

$$\tilde{N}_y(i,j) = \left\{\frac{1}{\Delta y} + \frac{1}{2\Delta y^2}|w(i,j+1)-w(i,j-1)| + \frac{\nu}{\Delta x} + \frac{\nu}{2\Delta x^2}|w(i,j+1) - w(i,j-1)|\right\}\frac{1}{1-\nu^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E dz$$

$$\tilde{N}_{xy}(i,j) = \left\{\frac{1}{\Delta y} + \frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{2\Delta y\Delta x}|w(i,j+1) - w(i,j-1)| + \frac{1}{2\Delta y\Delta x}|w(i+1,j) - w(i-1,j)|\right\}\frac{1}{1+\nu}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E dz$$

$$\widetilde{M}_x(i,j) = \left[\frac{\nu}{\Delta y} + \frac{1}{\Delta x}\right]\frac{1}{1-\nu^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Ez^2 dz$$

$$\widetilde{M}_y(i,j) = \left[\frac{1}{\Delta y} + \frac{\nu}{\Delta x}\right]\frac{1}{1-\nu^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Ez^2 dz$$

$$\widetilde{M}_{xy}(i,j) = \left\{\frac{1}{\Delta y} + \frac{1}{\Delta x}\right\}\frac{1}{1+\nu}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Ez^2 dz$$

$$\tilde{Q}_x(i,j) = \left\{1 + \frac{1}{\Delta x}\right\}\frac{1}{1+\nu}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E dz$$

$$\tilde{Q}_y(i,j) = \{1 + \frac{1}{\Delta y}\}\frac{1}{1+\nu}\int_{-h/2}^{h/2} E dz$$

بر این اساس مولفه‌های دانسیته مجازی عبارت خواهند بود از:

$$\rho_u(i,j) = \frac{1}{4}\left\{\left[\frac{N_x(i+1,j) + N_x(i-1,j)}{2\Delta x} + \frac{N_{xy}(i,j+1) + N_{xy}(i,j-1)}{2\Delta y}\right]\right\}$$

$$\rho_v(i,j) = \frac{1}{4}\left\{\left[\frac{N_{xy}(i+1,j) + N_{xy}(i-1,j)}{2\Delta x} + \frac{N_y(i,j+1) + N_y(i,j-1)}{2\Delta y}\right]\right\}$$

$$\rho_w(i,j) = \frac{1}{4}\{\left(\frac{l}{h}\right)^2 ([\frac{Q_x(i+1,j) + Q_x(i-1,j)}{2\Delta x}] + [\frac{Q_y(i,j+1) + Q_y(i,j-1)}{2\Delta y}]\} + N_x(i,j)\left[\frac{w(i-1,j) - 2w(i,j) + w}{\Delta x^2}\right.$$

$$+ N_x(i,j)\left(\frac{4}{\Delta x^2}\right)$$

$$+2N_{xy}(i,j)\left[\frac{w(i+1,j+1) - w(i-1,j+1)}{2\Delta x\Delta y} + \frac{-w(i+1,j-1) + w(i-1,j-1)}{2\Delta x\Delta y}\right] + N_x(i,j)\left(\frac{4}{\Delta x^2}\right)$$

$$+2N_{xy}(i,j)\left(\frac{1}{\Delta x\Delta y}\right)$$

$$+N_y(i,j)\left[\frac{w(i,j-1) - 2w(i,j) + w(i,j+1)}{\Delta y^2}\right]$$

$$+N_y(i,j)\left(\frac{4}{\Delta y^2}\right)$$

$$\rho_{\theta_x}(i,j) = \frac{1}{4}\{\left[\frac{M_x(i+1,j) + M_x(i-1,j)}{2\Delta x} + \frac{M_{xy}(i,j+1) + M_{xy}(i,j-1)}{2\Delta y}\right] + (\frac{l}{h})^2 Q_x(i,j)\}$$

$$\rho_{\theta_y}(i,j) = \frac{1}{4}\{\left[\frac{M_y(i,j+1) + M_y(i,j-1)}{2\Delta y} + \frac{M_{xy}(i+1,j) + M_{xy}(i-1,j)}{2\Delta x}\right] + (\frac{l}{h})^2 Q_y(i,j)\}$$

مراجع:

[1] Koizumi M., The concept of FGM, *Ceramic Transactions, Functionally Gradient. Materials*, vol. 34, 1993, pp. 3-10.

[2] Aboudi J., Pindera M.J., Arnold S.M., Thermoelastic theory for the response of materials functionally graded in Two Directions, *International Journal of Solid and Structures,* vol. 33, 1996, pp. 931-966.

[3] Aboudi J., Pindera M.J., Arnold S.M., Elastic response of metal matrix composites with tailores microstructures to thermal gradient, *International Journal of Solid and Structures*, vol. 31, 1994, pp. 1393-1428.

[4] Aboudi J., Pindera M.J., Arnold S.M., Higher order theory for functionally graded materials, *Composites Part B*, vol. 30, 1999, pp. 777-832.

[5] Reddy J.N., Praveen G.N., Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates, , *International Journal of Solid and Structures*, vol. 35, 1998, pp. 4457-4476.

[6] Reddy J.N., Wang C.M., Kitipornchai S., Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates, , *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 18, 1999, pp. 185-199.

[7] Reddy J.N., Analysis of functionally graded plates, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, vol. 47, 2000, pp. 663-684.

[8] Reddy J.N., Cheng Z.Q., Three-dimensional thermo-mechanical deformation of functionally graded rectangular plate, *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 20, 2001, pp. 841-855.

[9] Cheng Z.Q., Batra R.C., Three-dimensional deformation of a functionally graded elliptic plate, *Composite Part B*, vol. 31, 2000, pp. 97-106.

[10] Cheng Z.Q., BatraR.C., Deflection relationships between the homogeneous Kirchhoff plate theory and different functionally graded plate theories, *Archive of mechanics*, vol. 52, 2000, pp. 143-158.

[11]Kashtalyan M., Three-dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates,*European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 23, 2004, pp. 853-864.

[12] Woo J., Meguid S.A., Nonlinear analysis of functionally graded platesand shallow shells,*International Journal of Solid and Structures*, vol. 38, 2001, pp. 9-21.

[13] Yang J., Shen H.S., Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads, *International Journal of Non-linear Mechanics*, vol. 38, 2003, pp. 467-482.

[14] Ghannad Pour S.A.M., Alinia M.M., Large deflection behavior of functionally graded plates under pressure loads, *Composite Structures*, 75, 2006, pp. 67-71.

[15] Alibeigloo A., Exact solution for thermo-elastic response of functionally graded rectangular plates, *Composite Structures*, vol. 92, 2010, pp. 113-121.

[16] Kumar J.S., Reddy B.S., Reddy C.E., Nonlinear bending analysis of functionally graded plates using higher order theory, *International Journal of Engineering Science and Technology*, vol. 3, 2012, pp. 3010-3022.

[17]Otter J.R.H., Day A.S., Tidal flow computations, *The Engineer*, 209, 1960, pp. 177-182.

[18]DayA.S., An introduction to dynamic relaxation, *The Engineer*, vol. 19, 1965, pp. 218-221.

[19]Otter J.R.H., Computations for prestressed concrete reactor pressure vessels using dynamic relaxation, *Nuclear Structural Engineering*, vol. 1, 1965, pp. 61-75.

[20]Turvey G.J., Osman M.Y., Elastic large deflection analysis of isotropic rectangular Mindlin plates, *International Journal of Mechanical sciences*, vol. 32, 1990, pp. 315-328.

[21]Falahatgar S.R., Salehi M., Dynamic relaxation nonlinear viscoelastic analysis of annular sector composite plate, *Journal of Composite Materials*, vol. 43, 2009, pp. 257-275.

[22]Turvey G.J., Salehi M., DR large deflection analysis of sector plates, *Computers and Structures*, vol. 34, 1990, pp. 101-112.

[23]Turvey G.J., Salehi M., Computer-generated elasto-plastic design data for pressure loaded circular plates, *Computers and Structures*, vol. 41, 1991, pp. 1329-1340.

[24]Salehi M., Shahidi A.G., Large deflection analysis of sector Mindlin plates, *Computers and Structures*, vol. 52, 1994, pp. 987-998.

[25]Turvey G.J., SalehiM., Circular plates with one diametral stiffener-an elastic large deflection analysis, *Computersand Structures*, vol. 63, 1997, pp. 775-783.

[26]Golmakani E., KadkhodayanM., Nonlinear bending analysis of annular FGM plates using higher-order shear deformation plate Theories, *Composite Structures*, vol. 93, 2011, pp. 973-982.

[27] Delale F., Erdogan F., The crack problem for a nonhomogeneous plane, *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, 1983, pp. 609-614.

[28] Reddy J.N., Mechanics of laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis, Second Edition, CRC Press, 2004, Boca Raton, FL.

[29] Chajes A., Principles of Structural Stability Theory, Prentice-Hall, 1974.

[30] Cassel A.C., Hobbs R.E., Numerical stability of dynamic relaxation analysis of non-linear structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, 1976. pp. 1407-1410.