

## تحلیل رفتار ارتعاشات غیر خطی نانولوله‌های کربنی چندلایه در محیط حرارتی با استفاده از مدل غیرموضعی تیر تیموشنکو

ابوالحسن نظری نژاد گیاشی<sup>۱\*</sup>، رضا انصاری<sup>۲</sup>، حبیب رمضان نژاد آزارینی<sup>۳</sup>

\*نویسنده مسئول: nazarinezhad@iauroudbar.ac.ir

### چکیده

در این مقاله بر اساس تئوری غیرموضعی تیر تیموشنکو، مدلی غیر خطی از رفتار ارتعاشاتی نانولوله‌های کربنی چند لایه روی بستر الاستیک در محیط حرارتی ارائه می‌شود. با به کارگیری تئوری تیر تیموشنکو و تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن، اثرات اینرسی و تغییر شکل برشی و نیز اثرات مقیاس کوچک در تحلیل حاضر لحاظ می‌شوند. به منظور مدل کردن نیروی برهم کنش بین لایه‌ها، اثر متقابل و ندروالسی تمام لایه‌ها بر همدیگر در نظر گرفته شده‌است. از روش هارمونیک بالانس برای حل دستگاه معادلات غیرخطی حاکم بر رفتار سیستم و استخراج تابع فرکانسی تحت شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده استفاده می‌شود. این روش نسبت به روش هارمونیک بالانس جزئی که در مطالعات قبلی مورد استفاده قرار گرفته‌است، ساده‌تر و دارای دقت قابل قبولی می‌باشد. تأثیر پارامترهای هندسی نانولوله مانند تعداد لایه‌ها، نسبت طول به قطر خارجی و شرایط محیطی مانند اثرات ضریب بستر الاستیک، دما و همچنین تأثیر پارامتر غیرموضعی بر فرکانس غیرخطی نانولوله‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرند. تحلیل ارتعاشات غیرخطی ارائه شده دارای روابط کلی بوده، به طوری که این روابط قابل استفاده برای نانولوله کربنی با هر تعداد لایه هستند. نتایج بدست آمده برای نانولوله‌های تک‌لایه، دولایه و سه‌لایه نشان می‌دهند که افزایش در پارامترهایی همچون تعداد لایه‌ها، مقدار ضریب بستر الاستیک، نسبت طول به قطر خارجی و دما باعث کاهش سطوح پاسخ فرکانس غیرخطی شده و فرکانس غیرخطی به سمت فرکانس خطی میل می‌کند. همچنین مقایسه نتایج حاصل از تئوریهای تیر تیموشنکو و تیر اویلر-برنولی نشان می‌دهد که تفاوت پاسخ فرکانسی این دو تئوری در طولهای کوتاه نانولوله بوده و نتایج این دو تئوری در طولهای بلند به سمت یکدیگر همگرا می‌شوند.

### واژه‌های کلیدی

نانولوله کربنی چندلایه، تئوری غیرموضعی تیموشنکو، روش هارمونیک بالانس، محیط حرارتی.

۱- مربی، دانشگاه آزاداسلامی واحد رودبار.

۲- استادیار، دانشگاه گیلان.

۳- دانشجوی دکتری، دانشگاه گیلان.

## ۱- مقدمه

کشف نانولوله‌های کربنی در سال ۱۹۹۰ به گسترش علم نانو تکنولوژی و ارائه مقالات و افزایش دانش فنی و مهندسی این شاخه از علم منجر شده است [۱]. خواص منحصر به فرد نانولوله‌های کربنی باعث شده است تا این گونه نانسازه‌ها به طور گسترده‌ای در نانو الکترونیک، نانو ابزارها و نانو کامپوزیتها کاربرد داشته باشند [۲-۵]. از ویژگی‌های منحصر به فرد نانولوله‌های کربنی، خواص مکانیکی چشمگیر آنها است [۶-۸] به طور مثال سفتی نانولوله‌های کربنی صد برابر سفتی فولاد بوده در حالیکه وزنشان یک ششم وزن فولاد است.

بر اساس مکانیک محیط‌های پیوسته، شماری از محققان برای مدل کردن رفتارهای مکانیکی نانسازه‌ها از تئوریهای تیر [۹-۱۸] و پوسته [۱۹-۲۰] استفاده کرده‌اند. در تئوریهای کلاسیک تیر و پوسته از اثرات اندازه در مقیاسهای کوچک صرف نظر می‌شود. اما، در تئوری غیرموضعی ارائه شده توسط ارینگن [۲۱-۲۲]، بر خلاف مکانیک پیوسته کلاسیک، تانسور تنش در یک نقطه مرجع تنها به تانسور کرنش در آن نقطه وابسته نیست، بلکه تابعی از تانسور کرنش در تمامی نقاط ماده است. این امر سبب در نظر گرفتن طول مشخصه داخلی و لحاظ کردن طبیعت غیرپیوسته نانسازه می‌شود. با بیان این نظریه، تحلیل‌های مختلفی شامل تحلیل‌های ارتعاشاتی و کمانشی روی نانسازه‌ها در محدوده رفتار خطی انجام شده است [۱۲، ۱۵، ۱۹-۲۰].

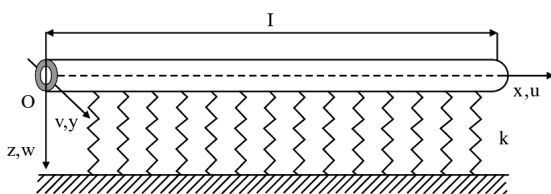
مروری بر مقالات ارائه شده در دبیره نشان می‌دهد که اکثراً رفتار مکانیکی نانولوله‌های کربنی تک لایه و دولایه مورد توجه محققان بوده است. همچنین معادلات ارائه شده کلی نبوده و قابلیت کاربرد برای تحلیل نانولوله‌های چندلایه را دارا نیستند. علاوه بر این، در مورد نانولوله‌های چندلایه که نیروهای وندروالسی بر روی رفتار مکانیکی آنها مؤثرند، در مدل‌های به کار گرفته شده موجود نیروی وندروالسی فقط بین لایه‌های مجاور در نظر گرفته شده است و از اثر نیروهای وندروالسی لایه‌های غیرمجاور صرف نظر می‌شود.

انصاری و همکاران مدل موضعی (کلاسیک) تیر اویلر-برنولی برای تحلیل رفتار ارتعاشات غیرخطی نانولوله‌های کربنی در محیط حرارتی به کار گرفته شده است. [۲۳] همچنین، روش حل

ارائه شده در مقاله مذکور، روش هارمونیک بالانس جزئی است. مدل تیر تیموشنکو با توجه به در نظر گرفتن اثرات اینرسی و تغییر شکل برشی مدلی کامل تر نسبت به مدل تیر اویلر-برنولی به شمار می‌رود. همچنین، همانگونه که پیشتر اشاره شد، تئوریهای کلاسیک قادر به در نظر گرفتن اثرات اندازه کوچک نیستند. از این رو، هدف اصلی از ارائه این مقاله، بسط سیستماتیک مدل غیرموضعی تیر تیموشنکو برای مطالعه ارتعاشات غیر خطی نانولوله‌های کربنی چندلایه روی بستر الاستیک در محیط حرارتی است. از طرفی روش به کار گرفته شده برای استخراج فرکانس غیرخطی، روش هارمونیک بالانس است که بسیار ساده تر و دارای دقت کافی نسبت به روش هارمونیک بالانس جزئی بوده و برای اولین بار برای محاسبه فرکانس غیر خطی نانولوله‌های کربنی مورد استفاده قرار می‌گیرد. با به کارگیری روش هارمونیک بالانس، دستگاه معادلات مورد نیاز برای محاسبه فرکانس غیرخطی به صورت تابعی از دامنه برای نانولوله کربنی با هر تعداد لایه به صورت کلی استخراج می‌شود. در این مقاله، اثرات پارامتر غیرموضعی، ضریب بستر الاستیک، دما، نسبت طول به قطر خارجی و تعداد لایه‌ها بر پاسخ فرکانسی مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین نتایج حاصل از دو تئوری تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو نیز با هم مقایسه می‌شوند. لازم به ذکر است که بر پایه مدل توسعه یافته در این تحقیق، اثر وندروالسی متقابل تمام لایه‌ها روی یکدیگر لحاظ می‌شود.

## ۲- معادلات حاکم

شکل (۱) یک نانولوله کربنی با طول  $L$ ، مدول یانگ  $E$ ، چگالی  $\rho$  و سطح مقطع  $A$  را روی بستر الاستیک نشان می‌دهد.



شکل (۱) شماتیک یک نانولوله کربنی چند لایه روی بستر الاستیک [۱۰].

$$\rho l_1 \mu \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - E l_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + k_1 G A_1 \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} + \psi \right) = 0$$

$$\rho A_1 \mu \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - k_1 G A_1 \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{E A_1}{\nu l} \left( \int_0^l \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 dx + N_t^1 \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \mu \sum_{j=1, j \neq 1}^n c_{1j} (w_j - w_1)$$

$$\rho l_i \mu \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} - E l_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + k_i G A_i \left( \frac{\partial w_i}{\partial x} + \psi \right) = 0$$

$$\rho A_i \mu \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - k_i G A_i \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{\partial w_i}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{E A_i}{\nu l} \left( \int_0^l \left( \frac{\partial w_i}{\partial x} \right)^2 dx + N_t^i \right) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \mu \sum_{j=1, j \neq i}^n c_{ij} (w_j - w_i)$$

$$\rho l_n \mu \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2} - E l_n \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + k_n G A_n \left( \frac{\partial w_n}{\partial x} + \psi_n \right) = 0$$

$$\rho A_n \mu \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} - k_n G A_n \left( \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + \frac{\partial w_n}{\partial x} \right) + k \mu w_n$$

$$= \frac{E A_n}{\nu l} \left( \int_0^l \left( \frac{\partial w_n}{\partial x} \right)^2 dx + N_t^n \right) \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}$$

$$+ \mu \sum_{j=1, j \neq n}^n c_{nj} (w_j - w_n) \quad (6)$$

که

$$\mu = (1 - (e_0 a)^2 \nabla^2)$$

برای شرط مرزی ساده می توان توابع جابه جایی و شیب را می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\psi_i(x, t) = \frac{\psi_i(t) \cos m \pi x}{l} \quad \text{و} \quad W_i(x, t) = \frac{W_i(x) \sin m \pi x}{l}$$

این توابع سازگار با شرط مرزی می باشد. با اعمال این توابع، دسته معادلات حاکم (۶) به صورت دسته معادلات مستقل از  $x$  و وابسته به زمان استخراج می شوند:

$$\frac{d^2 \psi_1}{dt^2} + \left( \frac{\pi^2 E}{\beta l^2} + \frac{k_1 G A_1}{\beta l_1} \right) \psi_1 + \frac{\pi k_1 G A_1}{\beta l_1} w_1 = 0$$

$$\frac{d^2 \psi_1}{dt^2} + \left( \frac{\pi^2 k_1 G}{\beta l^2} + \frac{\pi^2 N_t^1}{\beta A_1 l^2} + \sum_{j=1, j \neq 1}^n \frac{c_{1j}}{\beta A_1} \right) w_1$$

$$+ \frac{\pi k_1 G}{\beta l} \psi_1 + \frac{\pi^2 E}{\nu \beta l^2} w_1^2 - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{c_{ij}}{\eta A_i} w_j = 0$$

با توجه به تئوری غیر موضعی تیر تیموشنکو، معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار غیر خطی سیستم به صورت زیر بیان می شود [۱۱]:

$$\rho l (1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - E l \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k G A \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) = 0$$

$$\rho A \left( 1 - (e_0 a)^2 \nabla^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k G A \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$- \frac{E A}{\nu l} \left( \int_0^l \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + N_t \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = P(x, t) \quad (1)$$

در رابطه (۱)  $P(x, t)$  می تواند اثر فشار ناشی از عکس العمل نیروهای وندروالسی و یا عکس العمل بین لوله و بستر الاستیک با توجه به مدل وینکلر باشد. عکس العمل وندروالسی به صورت زیر تعریف می شود

$$p_i(x, t) = \sum_{j=1, j \neq i}^n c_{ij} (1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) (w_i - w_j) \quad (2)$$

$c_{ij}$  ضریب وندروالسی بوده و از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$c_{ij} = \left[ \frac{100 \nu \pi \varepsilon \sigma^{1/2}}{3 a^4} E_{ij}^{1/2} - \frac{112 \nu \pi \varepsilon \sigma^6}{9 a^4} E_{ij}^{3/2} \right] R_j \quad (3)$$

در این رابطه  $a = 1/42 A$  طول پیوند کربن-کربن  $\sigma$  عمق پتانسیل،  $\varepsilon$  پارامتری که با فاصله تعادل بدست می آید،  $R_j$  شعاع زامین لایه و  $E_{ij}^m$  با مقدار عددی طبیعی برای  $m$  به صورت انتگرال زیر بیان می شود

$$E_{ij}^m = (R_j + R_i)^m \int_0^{\pi/2} \left[ 1 - \frac{4 R_j R_i}{(R_j + R_i)^2} \cos^2 \theta \right]^{\frac{m}{2}} d\theta \quad (4)$$

و هرگاه  $p(x, t)$  عکس العمل بین لوله و بستر الاستیک در راستای عرضی باشد به صورت زیر تعریف می شود:

$$p(x, t) = -k (1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) w \quad (5)$$

علامت منفی در رابطه (۵) به خاطر فشاری است که از طرف بستر الاستیک در خلاف جهت جابه جایی نانولوله وارد شده که  $k$  ضریب بستر الاستیک است. همچنین نیروی ناشی از دما نیز به صورت  $N_t = \frac{E A}{1 - \nu} \alpha_x T$  تعریف شده که در آن  $\alpha_x$  ضریب نفوذ دمایی در راستای  $x$  و  $T$  دما و  $\nu$  ضریب پواسون می باشد. دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره ای غیر خطی حاکم بر رفتار نانولوله به صورت تابعی از زمان و جابه جایی به دست می آید:

$$\omega_T^i = \sqrt{\frac{\pi^i N_t^i}{\eta A_i l^i}}, \quad \omega_k = \sqrt{\frac{k}{\eta A_n}}, \quad \omega_c^{ij} = \sqrt{\frac{c_{ij}}{\eta A_i}}$$

$$\tau = \omega t, \quad \alpha = \frac{\pi^i}{\epsilon l^i}$$

معادله (۸) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\omega^i \bar{\psi}_i + ((\omega_r^i)^2 + (\omega_s^i)^2) \psi_i + \frac{\pi}{l} (\omega_s^i)^2 W_i = 0$$

$$\omega^i \bar{W}_i + \left( \frac{\pi}{l} (\omega_r^i)^2 + (\omega_T^i)^2 + (\omega_k^i)^2 \delta_{in} + \sum_{j=1, j \neq i}^n (\omega_c^{ij})^2 \right) W_i$$

$$+ (\omega_r^i)^2 \psi_i + \alpha \omega_l^i W_i^* - \sum_{j=1, j \neq i}^n (\omega_c^{ij})^2 W_j = 0 \quad (9)$$

همانطور که قبلاً اشاره شد یکی از اهداف این مقاله بکارگیری روش هارمونیک بالانس برای حل دستگاه معادلات غیرخطی حاکم بر رفتار نانولوله‌های چندلایه می‌باشد. در این روش فرض می‌شود که با توجه به ماهیت هارمونیک بودن رفتار نانولوله‌های چندلایه، حل دستگاه معادلات (۹) از سری فوریه زیر پیروی کند:

$$\psi_i(\tau) = \Lambda_i \cos \tau + \Lambda_{i+n} \cos 3\tau \quad (10)$$

$$W_i(\tau) = \Gamma_i \cos \tau + \Gamma_{i+n} \cos 3\tau$$

با قرار دادن حل فرضی بیان شده در رابطه (۱۰) در دستگاه معادلات (۹) و بسط هر یک از جملات سری فوریه و برابر قرار دادن ضرایب جملات مشابه هارمونیک، ضرایب  $\cos \tau$  و  $\cos 3\tau$ ، که اساس روش هارمونیک بالانس است، معادلات جبری زیر قابل استخراج است

$$-\omega^i \Lambda_i + ((\omega_l^i)^2 + (\omega_s^i)^2) \Lambda_i + \frac{\pi}{l} (\omega_s^i)^2 \Gamma_i = 0$$

$$-\omega^i \Gamma_i + \left( \frac{\pi}{l} (\omega_r^i)^2 + (\omega_T^i)^2 + (\omega_k^i)^2 \delta_{in} \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1, j \neq i}^n (\omega_c^{ij})^2 \right) \Gamma_i + (\omega_r^i)^2 \Lambda_i$$

$$+ \alpha \omega_l^i \left( \frac{3}{4} \Gamma_i^2 \Gamma_{i+n} + \frac{3}{4} \Gamma_{i+n}^2 \Gamma_i + \frac{3}{4} \Gamma_i^3 \right)$$

$$- \sum_{j=1, j \neq i}^n (\omega_c^{ij})^2 \Gamma_{j+n} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{d^i \psi_i}{dt^i} + \left( \frac{\pi^i E}{\beta l^i} + \frac{k_i G A_i}{\beta I_i} \right) \psi_i + \frac{\pi k_i G A_i}{\beta I_i l} w_i = 0$$

$$\frac{d^i W_i}{dt^i} + \left( \frac{\pi^i k_i G}{\beta l^i} + \frac{\pi^i N_t^i}{\beta A_i l^i} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{c_{ij}}{\beta A_i} \right) W_i +$$

$$\frac{\pi k_i G}{\beta l} \psi_i + \frac{\pi^i E}{\epsilon \beta l^i} W_i^* - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{c_{ij}}{\beta A_i} W_j = 0$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\frac{d^i \psi_n}{dt^i} + \left( \frac{\pi^i E}{\beta l^i} + \frac{k_n G A_n}{\beta I_n} \right) \psi_n + \frac{\pi k_n G A_n}{\beta I_n l} w_n = 0$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\frac{d^i W_n}{dt^i} + \left( \frac{\pi^i k_n G}{\beta l^i} + \frac{\pi^i N_t^n}{\beta A_n l^i} \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1, j \neq n}^n \frac{c_{nj}}{\beta A_n} + \frac{K}{\beta A_n} \right) W_n$$

$$+ \frac{\pi k_n G}{\beta l} \psi_n + \frac{\pi^i E}{\epsilon \beta l^i} W_n^* - \sum_{j=1, j \neq n}^n \frac{c_{nj}}{\beta A_n} W_j = 0 \quad (7)$$

که

$$\beta = \left( 1 + (e_0 a \frac{\pi}{l})^2 \right)$$

### ۳- روش حل هارمونیک بالانس

دستگاه معادلات (۷) را که برای یک نانولوله  $N$  لایه به دست آمده است می‌توان به صورت فشرده شده به صورت زیر بیان کرد.

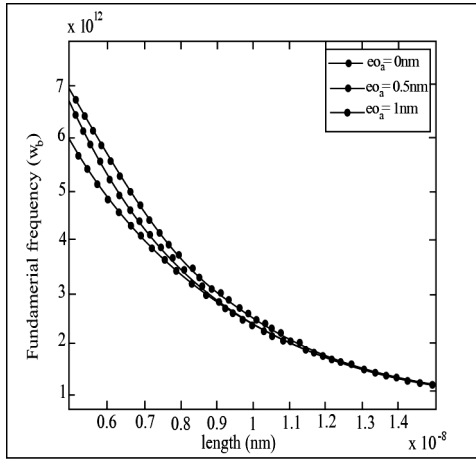
$$\frac{d^i \psi_i}{dt^i} + \left( \frac{\pi^i E}{\eta l^i} + \frac{k_i G A_i}{\eta I_i} \right) \psi_i + \frac{\pi K_i G A_i}{\eta I_i l} W_i = 0$$

$$\frac{d^i W_i}{dt^i} + \left( \frac{\pi^i K_i G}{\eta l^i} + \frac{\pi^i N_t^i}{\eta A_i l^i} + \frac{k}{\eta A_n} + \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{c_{ij}}{\beta A_i} \right) W_i$$

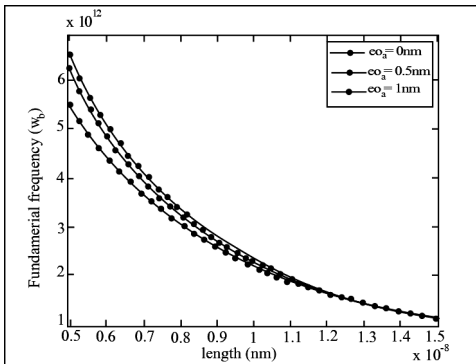
$$+ \frac{\pi K_i G}{\eta l} \psi_i + \frac{\pi^i E}{\epsilon \eta l^i} W_i^* - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{c_{ij}}{\eta A_i} W_j = 0 \quad (8)$$

با بکارگیری پارامترهای بی بعد به صورت زیر:

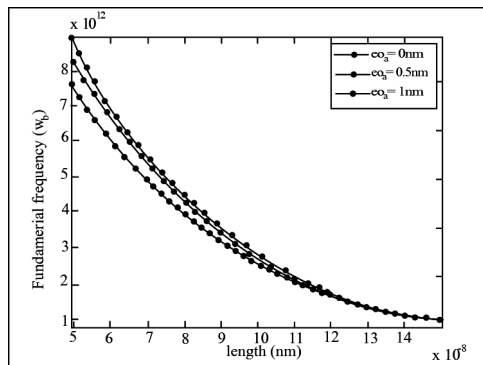
$$\omega_i = \sqrt{\frac{\pi^i E}{\eta l^i}}, \quad \omega_s^i = \sqrt{\frac{K_i G A_i}{\eta I_i}}, \quad \omega_r^i = \sqrt{\frac{\pi K_i G}{\eta l}}$$



شکل (۲) تأثیر پارامتر غیر موضعی بر فرکانس پایه نانولوله تک لایه.



شکل (۳) تأثیر پارامتر غیر موضعی بر فرکانس پایه نانولوله دو لایه.



شکل (۴) تأثیر پارامتر غیر موضعی بر فرکانس پایه نانولوله سه لایه.

رفتار چهار فرکانس پایه اول نانولوله‌های کربنی تک‌لایه، دو لایه، سه لایه بر حسب طول نانولوله به ترتیب در شکل‌های (۵) تا (۷) نشان داده شده است.

اختلاف بین این مقادیر در طول‌های کوتاه زیاد بوده و با افزایش طول اختلاف بین سطوح فرکانسهای پایه اول تا چهارم کاهش می‌یابد. در این نمودارها  $e_0a = 0.5 \text{ nm}$  است.

$$\begin{aligned}
 & -9\omega_l^2 \Lambda_{i+n} + ((\omega_l^i)^2 + (\omega_s^i)^2) \Lambda_{i+n} + \frac{\pi}{l} (\omega_s^i)^2 \Gamma_{i+n} = 0 \\
 & -9\omega_l^2 \Gamma_{i+n} + \left( \frac{\pi}{l} (\omega_r^i)^2 + (\omega_k^i)^2 \right) \delta_{in} \\
 & \left. \sum_{j=1, j \neq i}^n (\omega_c^{ij})^2 \right) \Gamma_{i+n} + (\omega_r^i)^2 \Lambda_{i+n} \\
 & + \alpha \omega_l^2 \left( \frac{3}{2} \Gamma_i^2 \Gamma_{i+n} + \frac{1}{4} \Gamma_i^3 + \frac{3}{4} \Gamma_{i+n}^3 \right) \\
 & \sum_{j=1, j \neq i}^n (\omega_c^{ij})^2 \Gamma_{j+n} = 0 \quad (12)
 \end{aligned}$$

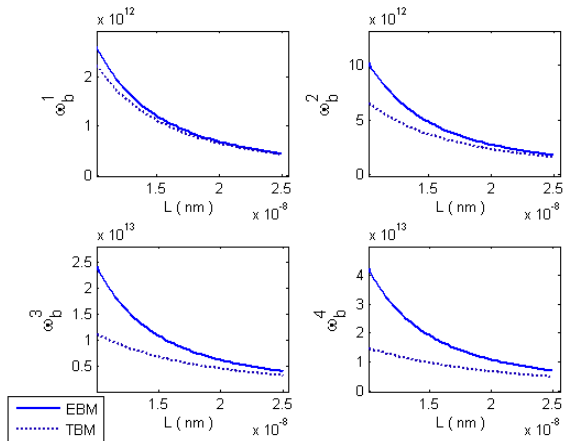
معادلات غیرخطی ارائه شده در روابط (۱۱) و (۱۲) را می‌توان به‌ازای مقداری مشخص از  $\Gamma_1$  برای  $\Gamma_i, \Gamma_{i+n}, i = 2, 3, \dots, n$  و  $\omega, \Lambda_i, \Lambda_{i+n}, i = 1, 2, \dots, n$  حل کرد.

#### ۴- پاسخ فرکانس غیر خطی برای نانولوله

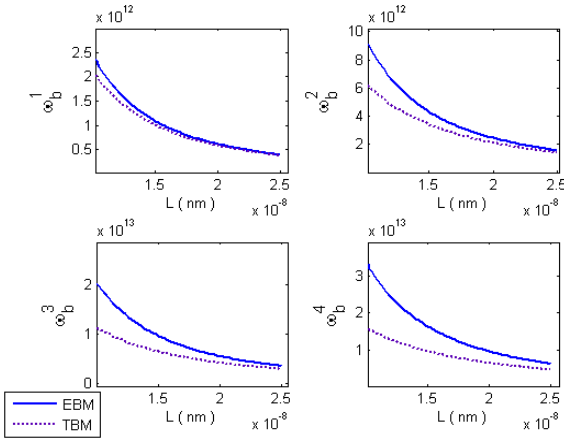
نانولوله کربنی مورد مطالعه دارای مدول الاستیسیته  $E = 1/8 \text{ TPa}$ ، ضریب برشی  $k_i = 0.6$ ، چگالی  $\rho = 1300 \text{ kg/m}^3$ ، طول  $d = 45 \text{ nm}$  قطر خارجی  $d_o = 3 \text{ nm}$ ، قطر داخلی  $d_i = 3 \text{ nm}$ ، ضخامت  $t = 0.34 \text{ nm}$ ، ضریب نفوذ  $\alpha_x = 1.6 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ، ضریب پواسون  $\nu = 0.3$ ، دما  $T = 50^\circ \text{C}$  و ضریب بستر الاستیک برابر  $k = 10^7 \text{ N/m}^2$  است.

شکل‌های (۲) تا (۴) مقایسه بین مدل موضعی و غیرموضعی تیر تیموشنکو را به ترتیب برای نانولوله کربنی تک‌لایه، دو لایه و سه لایه نشان می‌دهد.

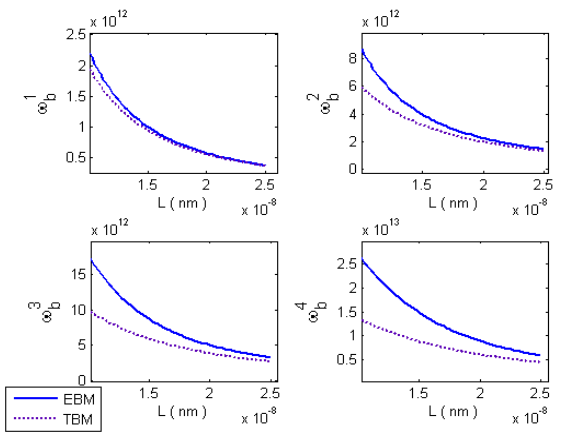
در این نمودارها فرکانس پایه بر حسب طول نانولوله کربنی نشان داده شده است. مطابق این نمودارها برای طول‌های نسبتاً بلند، دو مدل موضعی و غیرموضعی تیر تیموشنکو دارای فرکانسهای برابر بوده و تأثیر پارامتر غیرموضعی در طول‌های کوتاه مشاهده می‌شود. همچنین با افزایش مقدار پارامتر غیرموضعی، مقدار فرکانس پایه سطوح پایین‌تری را به خود اختصاص می‌دهد.



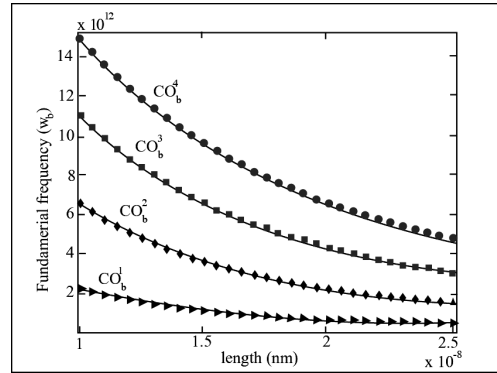
شکل (۸) مقایسه بین مدل تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو در تخمین چهار فرکانس پایه برای نانولوله کربنی تک‌لایه.



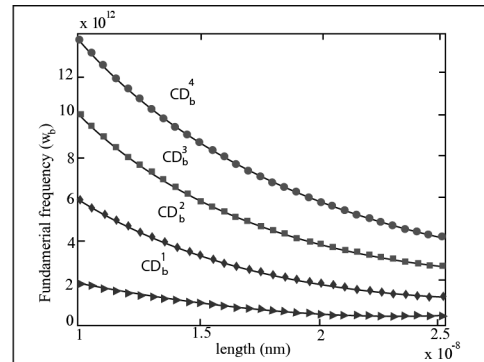
شکل (۹) مقایسه بین مدل تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو در تخمین چهار فرکانس پایه برای نانولوله کربنی دو لایه.



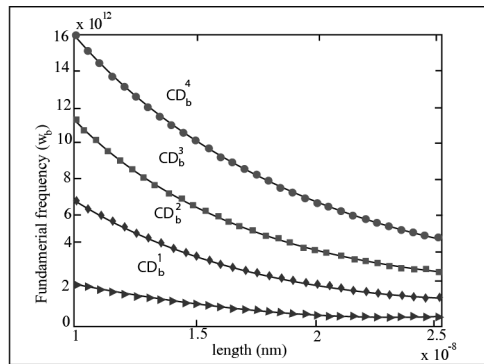
شکل (۱۰) مقایسه بین مدل تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو در تخمین چهار فرکانس پایه برای نانولوله کربنی سه لایه.



شکل (۵) تأثیر افزایش مود بر فرکانس پایه نانولوله تک لایه.

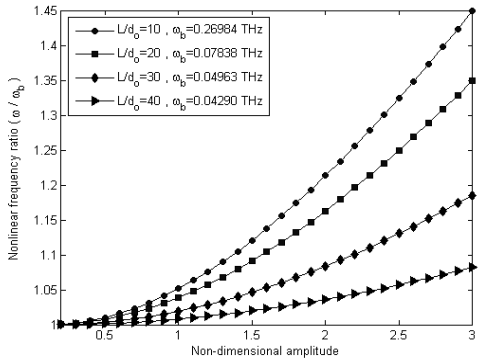


شکل (۶) تأثیر افزایش مود بر فرکانس پایه نانولوله دو لایه.

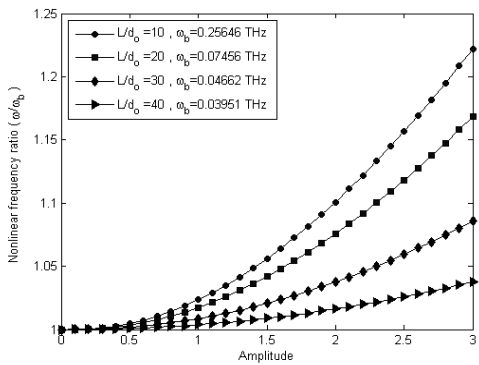


شکل (۷) تأثیر افزایش مود بر فرکانس پایه نانولوله سه لایه.

نمودارهای (۸) تا (۱۰) مقایسه رفتار چهار فرکانس پایه را بین دو مدل تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو برای نانولوله‌های کربنی تک‌لایه، دو لایه و سه لایه نشان می‌دهد. برای نانولوله‌های کربنی بلند دو مدل رفتاری یکسان داشته در حالیکه در طولهای کوتاه به خاطر عدم در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی در مدل تیر اویلر-برنولی، این مدل نسبت به مدل تیر تیموشنکو تخمین بالاتری را برای فرکانسهای پایه ارائه می‌کند.

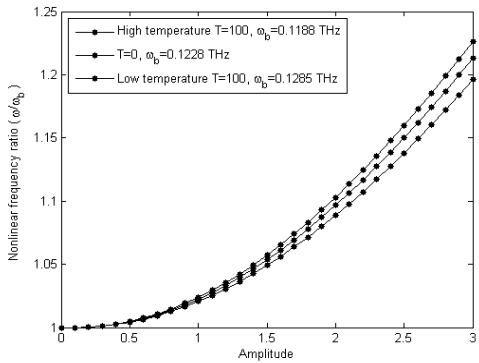


شکل (۱۳) تأثیر نسبت طول به قطر خارجی بر پاسخ فرکانس غیر خطی برای نانولوله کربنی دولایه.



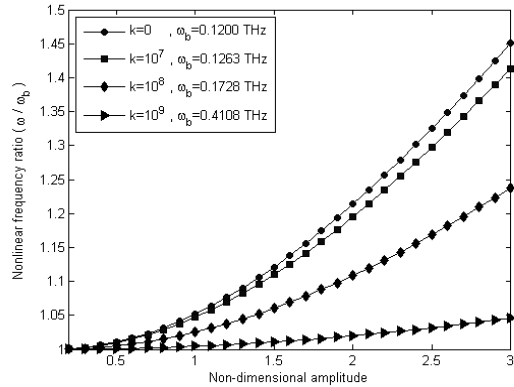
شکل (۱۴) تأثیر نسبت طول به قطر خارجی بر پاسخ فرکانس غیر خطی برای نانولوله کربنی سه لایه

اثر دمای پایین و بالا نیز روی نانولوله کربنی سه لایه در شکل (۱۵) نشان داده شده است. در حالت دما بالا که ضریب نفوذ فرکانس خطی سطح بالاتری را نسبت به دمای صفر و دمای پایین با ضریب نفوذ  $\alpha_x = 1/6 \times 10^{-6} K^{-1}$  به خود اختصاص می دهد.

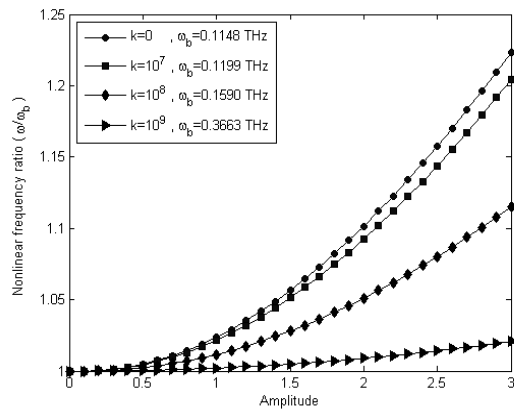


شکل (۱۵) تأثیر دما بالا ( $\alpha_x = -1/1 \times 10^{-6} K^{-1}$ ) و دما پایین ( $\alpha_x = -1/1 \times 10^{-6} K^{-1}$ ) روی فرکانس غیر خطی برای نانولوله کربنی سه لایه

تأثیر ضریب سفتی بستر الاستیک بر فرکانس غیر خطی نانولوله دولایه و سه لایه به ترتیب در شکل های (۱۱) و (۱۲) نشان داده شده است. با توجه به این نمودارها با افزایش مقدار ضریب بستر الاستیک نرخ نسبت فرکانس غیر خطی به فرکانس خطی با افزایش دامنه کاهش می یابد و بستر با ضریب الاستیک بیشتر رفتار غیر خطی سیستم را به سمت رفتار خطی میل می دهد.



شکل (۱۱) تأثیر ضریب بستر الاستیک بر پاسخ فرکانس غیر خطی برای نانولوله کربنی دولایه.



شکل (۱۲) تأثیر ضریب بستر الاستیک بر پاسخ فرکانس غیر خطی برای نانولوله کربنی سه لایه.

همچنین شکل های (۱۳) و (۱۴) نیز تأثیر نسبت طول به قطر خارجی را بر نسبت فرکانس غیر خطی به فرکانس خطی برای نانولوله دولایه و سه لایه نشان می دهد. در این نمودارها نیز با افزایش نسبت طول به قطر خارجی، فرکانس غیر خطی به فرکانس خطی نزدیک می شود. بدین معنا که برای نسبت طول به قطر خارجی بزرگ می توان از اثر غیر خطی صرف نظر کرد.

### ۵- نتیجه گیری

در این مقاله بر اساس تئوری غیرموضعی تیر تیموشنکو، معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی حاکم بر رفتار دینامیکی نانولوله‌های کربنی چندلایه به صورت کلی استخراج شدند و با به کارگیری روش هارمونیک بالانس و تابع شکل متناسب با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده، معادلات دیفرانسیل معمولی تابع زمان به دست آمدند. برخلاف مطالعات گذشته، در این مقاله به منظور مدل کردن نیروی برهم‌کنش بین لایه‌ها، اثر متقابل وندروالسی تمام لایه‌ها بر همدیگر در نظر گرفته شد. با توجه به در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی در تئوری تیر تیموشنکو، در این تئوری مدلی کامل‌تر از رفتار نانولوله نسبت به مدل تیر اویلر-برنولی ارائه می‌شود. مقایسه این دو تئوری نشان می‌دهد که در طولهای کوتاه اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی کاملاً محسوس بوده و مدل تیر تیموشنکو تخمین پایین‌تری را نسبت به مدل تیر اویلر-برنولی ارائه می‌دهد. ولی با افزایش طول نانولوله، پاسخ فرکانسی این دو مدل به یکدیگر همگرا می‌شوند. همچنین اثر پارامترهای هندسی نانولوله کربنی مانند نسبت طول به قطر خارجی، تعداد لایه، همچنین اثرات محیطی حاکم مانند ضریب بستر الاستیک، دما و اثر پارامتر غیرموضعی بر پاسخ فرکانسی نانولوله‌های تک‌لایه، دولایه و سه‌لایه مورد بررسی قرار گرفتند. با توجه به نتایج حاصل، با افزایش تعداد لایه‌ها، نسبت طول به قطر خارجی، ضریب بستر الاستیک و دما پاسخ فرکانسی سطوح پایین‌تری را به خود اختصاص می‌دهد. به عبارت دیگر، نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی نزدیک شده و رفتار غیرخطی نانولوله کربنی به رفتار خطی میل می‌کند. با افزایش پارامتر غیرموضعی نیز فرکانس پایه به‌ازای طول‌های کوتاه سطوح پایین‌تری را به خود اختصاص داده ولی با افزایش طول تأثیر این پارامتر قابل صرف‌نظر کردن است.

### فهرست علائم

$L (m)$	طول
$t (m)$	ضخامت
$\rho (kg/m^3)$	چگالی
$A (m^2)$	سطح مقطع
$R_j (m)$	شعاع زامین لایه
$E (N/m^2)$	مدول یانگ

$v$	ضریب پواسون
$K (N/m^2)$	ضریب بستر الاستیک
$c_{ij} (N/m^2)$	ضریب وندروالسی
$T (^\circ C)$	دما
$\alpha_x (K^{-1})$	ضریب نفوذ دمایی در راستای $x$
$N_t (N)$	نیرو ناشی از دما
$\omega (rad/s)$	فرکانس
$G (N/m^2)$	مدول برشی
$k_i$	ضریب برشی

### مراجع

- [1] Iijima S., Helical microtubes of graphitic carbon, *Nature*, 354, 1991, pp. 56-58.
- [2] Baughman R.H., Carbon nanotubes actuators, *Science*, 284, 1991, pp. 1340-4.
- [3] Tsukagoshi K., Yoneya N., Uryu S., Aoyagi Y., Kanda A., Ootuka Y., Carbon nanotube devices for electronics, *Physica B*, 323(1-4), 2002, pp. 107-14.
- [4] Baughman R.H., Zakhidov A.A., de Heer W.A., Carbon nanotubes – the route toward applications, *Science*, 297, 2002, pp. 787-92.
- [5] Choi W.B., Bae E., Kang D., Chae S., Cheong B., Ko J., Aligned carbon nanotubes for nanoelectronics, *Nanotechnology*, 15, 2004, pp. 512-6.
- [6] Iijima S., Brabec C., Maiti A., Bernholc J., Structural flexibility of carbon nanotube, *J. Chem. Phys.*, 104, 1996, pp. 2089-92.
- [7] Yakobson B.I., Campbell M.P., Brabec C.J., Bernholc J., High strain rate fracture and C-chain unraveling in carbon nanotubes, *Comput. Mater. Sci.*, 8, 1997, pp. 341-8.
- [8] Hernandez E., Goze C., Bernier P., Rubio A., Elastic properties of C and BxCyNz composite nanotubes, *Phys. Rev. Lett.*, 80, 1998, pp. 4502-5.
- [9] Yoon J., Ru C.Q., Mioduchowski A., Timoshenko-beam effects on transverse wave propagation in carbon nanotubes, *Compos Part B*, 35, 2004, pp. 87-93.



- [20] Arash B., Ansari R., Evaluation of nonlocal parameter in the vibrations of single-walled carbon nanotubes with initial strain, *Physica E*, 42, 2010, pp.2058-64.
- [21] Eringen A.C., On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *J. Appl. Phys.*, 54, 1983, pp. 4703–10.
- [22] Eringen A.C., *Nonlocal Continuum Field Theories*, Springer New York, 2002.
- [۲۳] انصاری ر.، رمضان نژاد ح.، تحلیل ارتعاشات غیرخطی نانولوله‌های کربنی چندلایه روی بستر الاستیک در محیط حرارتی، فصلنامه علمی پژوهشی مهندسی مکانیک جامدات دانشگاه آزاد خمینی شهر، شماره چهارم، زمستان ۱۳۸۷.
- [10] Fu Y.M., Hong J.W., Wang X.Q., Analysis of nonlinear vibration for embedded carbon nanotubes, *Journal Sound and Vibration*, 296, 2006, pp. 746-56.
- [11] Wang C.M., Tan V.B.C., Zhang Y.Y., Timoshenko beam model for vibration analysis of multi-walled carbon nanotubes, *Journal Sound and Vibration*, 294, 2006, pp.1060–72.
- [12] Wang Q., Varadan V.K., Quek S.T., Small scale effect on elastic buckling of carbon nanotubes with nonlocal continuum models, *Phys. Lett. A*, 357, 2006, pp. 130-5.
- [13] Hsu J.C., Chang R.P., Chang W.J., Resonance frequency of chiral single-walled carbon nanotubes using Timoshenko beam theory, *Phys. Lett. A*, 372, 2008, pp. 2757-9.
- [14] Zhang Y.Q., Liu X., Zhao J.H., Influence of temperature change on column buckling of multiwalled carbon nanotubes, *Phys. Lett. A*, 372, 2008, pp. 1676-81.
- [15] Aydogdu M., *A general nonlocal beam theory its application to nano beam bending, buckling and vibration*, *Physica E*, 41, 2009, pp. 1651–5.
- [16] Zhang Y.Y., Wang C.M., Tan V.B.C., Assessment of Timoshenko Beam Models for Vibrational Behavior of Single-Walled Carbon Nanotubes using Molecular Dynamics, *Adv. Appl. Math. Mech.*, 1, 2009, pp. 89-106.
- [17] Lee H.L., Chang W.J., A closed-form solution for critical buckling temperature of a single-walled carbon nanotube, *Physica E*, 41, 2009, pp. 1492–4.
- [18] Ansari R., Hemmatnezhad M., Ramezannezhad H., Application of HPM to the nonlinear vibrations of multiwalled carbon nanotubes, *Numer. Meth. Part. Diff. Eq.*, 26, 2010, pp. 490–500.
- [19] Hu Y.G., Liew K.M., Wang Q., He X.Q., Yakobson, B.I., Nonlocal shell model for elastic wave propagation in single- and double-walled carbon nanotubes, *J. Mech. Phys. Solids*, 56, 2008, pp. 3475-85.