

## پیش‌بینی عمر خستگی نمونه‌های ناچ‌دار با استفاده از معیارهای خستگی چندمحوری

فیروز اسماعیلی گلدرق<sup>۱\*</sup>، سجاد برزگر محمدی<sup>۲</sup>، علیرضا بابائی<sup>۳</sup>، امیر افکار<sup>۴</sup>

\* نویسنده مسئول: f.esmaeili@iaut.ac.ir

### واژه‌های کلیدی

ناچ، خستگی چندمحوری، صفحه بحرانی، اجزا محدود.

### چکیده

در این تحقیق، اثر شکل ناچ بر روی عمر خستگی نمونه‌های ناچ‌دار از جنس آلیاژ آلومینیوم 2024-T3 به صورت تجربی و همچنین با استفاده از تحلیل خستگی چندمحوری مورد مطالعه قرار گرفته است. بدین منظور، چهار نوع نمونه آزمایش با شکل ناچ مختلف تهیه گردیده و در دستگاه تست خستگی برای بارهای کششی مختلف آزمایش گردیدند. تستهای خستگی به صورت بار کنترل و در دستگاه سرو هیدرولیک Amsler HA250 با فرکانس ۱۰ هرتز انجام گرفته است. علاوه بر بدست آوردن عمر نمونه‌ها به روش تجربی، در قسمت عددی این تحقیق از کد اجزا محدود غیرخطی ANSYS برای بدست آوردن توزیع تنش و کرنش در نمونه‌های مورد بررسی، در اثر اعمال بارگذاری کششی استفاده شده است. در نهایت برای پیش‌بینی عمر خستگی نمونه‌ها، از چندین معیار خستگی چندمحوری شامل معیارهای KBM، SWT، گلینکا، FS، کراسلند، VF و WY با استفاده از توزیع تنش و کرنش بدست آمده از تحلیل غیر خطی اجزا محدود استفاده گردیده است. نتایج بدست آمده از تحلیل خستگی چندمحوری مشخص کرد که از بین معیارهای استفاده شده در این تحقیق، معیار کراسلند بیشترین دقت را برای تمامی نمونه‌ها دارا می‌باشد.

۱- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران.

۲- کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، شرکت پتروشیمی خارک، خارک، ایران.

۳- مربی، گروه مهندسی مکانیک، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران.

۴- عضو هیات علمی گروه پژوهشی خودرو و نیرومحركه، پژوهشکده برق، مکانیک و ساختمان، پژوهشگاه استاندارد، کرج، ایران

## ۱- مقدمه

سازه‌های هوایی معمولاً در معرض انواع بارهای دینامیکی از جمله بارهای ناشی از مانور، بارهای ناشی از چاله‌های هوایی و طوفان در حین پرواز قرار می‌گیرند. بنابراین لازم است که مقدار عمر مربوط به اجزای سازه‌های هوایی قبل از واماندگی آنها مشخص گردد. بعلاوه سازه‌ها و قطعات مکانیکی بطور معمول دارای ناپوستگی‌های هندسی مانند، سوراخها، جاخارها، شیارها و غیره هستند که به عنوان ناچ شناخته می‌شوند. وجود سوراخها در سازه‌های هوایی به چندین دلیل از قبیل امکان اتصال اجزا به یکدیگر توسط اتصالات مکانیکی، عبور خطوط تجهیزات الکترونیکی و هیدرولیکی و مواردی از این دست غیرقابل اجتناب می‌باشند. این ناپوستگی‌های هندسی منجر به افزایش موضعی تنش شده و بدین علت تنش‌افزا نامیده می‌شوند. در صورت وجود تنش‌افزاها یا ناچ‌ها باید توجه خاصی صورت گیرد زیرا این ناچ‌ها مقاومت یک قطعه به واماندگی خستگی را کاهش می‌دهند. این امر تنش‌های موضعی بزرگتری را به دنبال دارد که باعث تولید ترکهای خستگی می‌گردد که در چنین مکانهایی آغاز می‌گردند. همانطور که اشاره شد، واضح است که اکثر ماشین‌ها و سازه‌ها از قبیل سازه‌های هوایی، در حین عمر سرویس خود در معرض تنش‌ها و کرنش‌های چندمحوری قرار می‌گیرند. بنابراین تحلیل خستگی چندمحوری می‌تواند به عنوان ابزاری مهم برای تخمین و پیش‌بینی مقاومت خستگی اجزا گردد. منشأ چندمحوری تنش می‌تواند وابسته به چندین عامل از قبیل بارگذاری، هندسه پیچیده قطعات، تنش‌های پسماند و پیش‌تنش و غیره باشد. معیارهای مختلفی با توجه به شکل بارگذاری و نوع مواد پیشنهاد شده است که هر کدام در حالت خاصی از شرایط مرزی و نیرویی و مواد امتحان شده و توصیه گردیده‌اند [۱-۶]. می‌توان به معیارهای اسمیت-واتسون-تاپر [۱۳]، گلینکا و همکاران [۱۴]، و فراهانی [۱۵] اشاره کرد.

بطور کلی معیارهای خستگی چند محوری به سه گروه عمده تقسیم می‌شوند که بر پایه (۱) تنش، (۲) کرنش و (۳) انرژی می‌باشند [۷]. از معروفترین معیارهایی که بر پایه تنش می‌باشند می‌توان به معیار کراسلند [۸] اشاره کرد. این نوع معیارها بیشتر برای خستگی پرچرخه موقعی که تغییر شکلها در محدوده الاستیک بوده و یا تغییر شکل پلاستیک کم می‌باشد، مناسب است. گروه دوم از معیارهای خستگی چندمحوری بر مبنای کرنش می‌باشند که به عنوان مثال می‌توان به معیارهای بران و میلر [۹]، فاطمی و سوشی [۱۰]، لی و ژانگ [۱۱] و وانگ و بران [۱۲] اشاره کرد. گروه سوم معیارها همانطور که اشاره گردید بر مبنای انرژی می‌باشند. در این معیارها از ضرب مستقیم تنش و کرنش استفاده می‌گردد. از جمله این معیارها کاهش می‌دهند. این امر تنش‌های موضعی بزرگتری را به دنبال دارد که باعث تولید ترکهای خستگی می‌گردد که در چنین مکانهایی آغاز می‌گردند. همانطور که اشاره شد، واضح است که اکثر ماشین‌ها و سازه‌ها از قبیل سازه‌های هوایی، در حین عمر سرویس خود در معرض تنش‌ها و کرنش‌های چندمحوری قرار می‌گیرند. بنابراین تحلیل خستگی چندمحوری می‌تواند به عنوان ابزاری مهم برای تخمین و پیش‌بینی مقاومت خستگی اجزا گردد. منشأ چندمحوری تنش می‌تواند وابسته به چندین عامل از قبیل بارگذاری، هندسه پیچیده قطعات، تنش‌های پسماند و پیش‌تنش و غیره باشد. معیارهای مختلفی با توجه به شکل بارگذاری و نوع مواد پیشنهاد شده است که هر کدام در حالت خاصی از شرایط مرزی و نیرویی و مواد امتحان شده و توصیه گردیده‌اند [۱-۶]. می‌توان به معیارهای اسمیت-واتسون-تاپر [۱۳]، گلینکا و همکاران [۱۴]، و فراهانی [۱۵] اشاره کرد.

مقادیر تنش و کرنش عمود این صفحه در رابطه بکار می-رود. البته معیارهای خستگی فراوانی برای حالت‌های کرنش و تنش چندمحوری توسط محققانی همچون بران و میلر [۱۸]، وانگ و یو [۱۹]، فراهانی و همکاران [۲۰] و قاجار و همکاران [۲۱] پیشنهاد شده است، ولی هر یک از این معیارها برای شرایط خاصی از بارهای اعمالی پیشنهاد و آزمایش شده‌اند. با این وجود به دلیل اهمیت موضوع (پیش‌بینی عمر خستگی تحت شرایط تنش و کرنش چندمحوری) و کاربردهای عملی آن، مطالعات بیشتری برای بررسی دقت و قابلیت اعتماد این معیارها در طراحی، تخمین عمر و بررسی واماندگی قطعات، بخصوص برای نمونه‌های عملی لازم می‌باشد.

هدف از این تحقیق، پیش‌بینی عمر خستگی نمونه‌های ناچ‌دار با ناچ مرکزی می‌باشد. در این تحقیق به منظور مطالعه عمر خستگی نمونه‌های ناچ‌دار، چهار نوع نمونه آزمایش با شکل و اندازه ناچ مختلف در نظر گرفته شده است. در قسمت تجربی این تحقیق نمونه‌های ناچ‌دار از جنس آلیاژ آلومینیوم 2024-T3 که کاربرد وسیعی در صنایع هوافضا دارد، تهیه گردیده و به منظور بدست آوردن منحنی تنش-عمر و همچنین بررسی اثر شکل ناچ بر روی عمر خستگی نمونه‌ها، در دستگاه تست خستگی برای بارهای کششی مختلف آزمایش گردیدند. علاوه بر بدست آوردن عمر نمونه‌ها به روش تجربی، در قسمت عددی این تحقیق از کد اجزا محدود ANSYS برای بدست آوردن توزیع تنش و کرنش در نمونه‌های مورد بررسی، در اثر اعمال بارگذاری کششی استفاده شده است. در نهایت برای پیش‌بینی عمر خستگی نمونه‌ها، از چندین معیار خستگی چندمحوری با استفاده از توزیع تنش و کرنش بدست آمده از تحلیل اجزا محدود استفاده گردیده است.

از نقطه نظر دیگر، معیارهای چند محوری را می‌توان به معیارهایی که از مفهوم صفحه بحرانی استفاده می‌کنند و همچنین معیارهایی که از این مفهوم استفاده نمی‌کنند، تقسیم کرد. در معیارهای خستگی بر مبنای صفحه بحرانی، در ابتدا صفحه‌ای از ماده که در آن ترکیب بعضی از مولفه‌های تنش مقدار بیشینه را دارد، تعیین می‌گردد. سپس پارامتر خستگی بصورت ترکیبی از بیشینه کرنش یا تنش برشی و کرنش یا تنش محوری در صفحه بحرانی محاسبه می‌گردد [۱۰]. همانند مدل‌های کلاسیک، معیارهای صفحه بحرانی می‌تواند بر مبنای تنش، کرنش و یا انرژی باشد.

مفهوم صفحه بحرانی برای اولین بار توسط بران و میلر [۹] پیشنهاد شد. آنها معیاری بر مبنای کرنش پیشنهاد کردند که در آن عمر خستگی را تابعی غیرخطی از کرنش در نظر می‌گرفت. صفحه بحرانی این پارامتر، صفحه بیشینه کرنش برشی بود. در این معیار ابتدا تغییرات کرنش در صفحه تنش مورد بررسی قرار گرفته و در نهایت پارامترهای کرنش به منظور بدست آوردن پارامتر خسارت در صفحه بحرانی مورد استفاده قرار می‌گیرد. سوشی [۱۶] پیشنهاد کرد که معیار عمر خستگی بایستی بر مبنای مکانیزم فیزیکی استوار باشد. سوشی پارامتر  $SWT^1$  را برای ماده‌ای با واماندگی از نوع کششی، با در نظر گرفتن این مطلب که رشد ترک عمود بر تنش کششی بیشینه می‌باشد، تصحیح کرد. در بعضی از معیارهای پیشنهادی، همانند معیارهای پیشنهاد شده توسط گلینکا [۱۴] و لیو [۱۷] معیار انرژی در ترکیب با مفهوم صفحه بحرانی مورد استفاده قرار گرفته است. معیار دیگری توسط فراهانی [۱۵] پیشنهاد شده که بر پایه انرژی بوده و شامل خواص ماده، اثر تنش میانگین و نیز اثر سخت-شوندگی حین اعمال بار می‌باشد. در این معیار نیز صفحه کرنش برشی بیشینه به عنوان صفحه بحرانی معرفی شده و

<sup>1</sup> - Smith- Watson- Topper

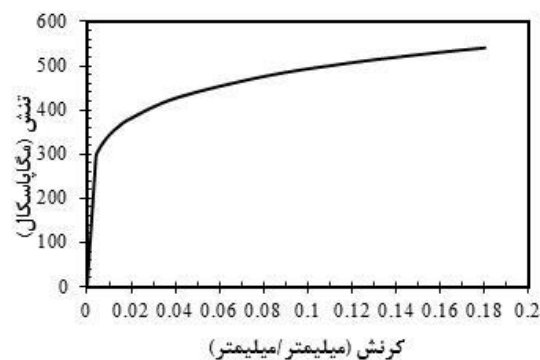
## ۲- آزمایش‌های تجربی

ماده انتخابی برای تحقیق حاضر آلیاژ آلومینیوم 2024-T3 با ضخامت ۲ میلی‌متر می‌باشد. این آلیاژ یکی از پرکاربردترین آلیاژها در صنایع هوافضا محسوب می‌شود. ترکیب شیمیایی آلیاژ آلومینیوم 2024-T3 که با استفاده از دستگاه طیف نگار نوری بدست آمده، در جدول (۱) آورده شده است.

جدول (۱) ترکیب شیمیایی آلیاژ آلومینیوم 2024-T3

Element	Cu	Mg	Mn	Fe	Si	Cr	Zn	Ti	Al
Weight (%)	۴/۸۲	۱/۶۷	۰/۵۸	۰/۱۸	۰/۰۷	۰/۰۲	۰/۰۶	۰/۱۵	Bal

برای تعیین خواص مکانیکی، آزمون کشش ساده بر روی نمونه‌ای که برش طولی آن در راستای نورد انتخاب شده، انجام شده است. نرخ اعمال بار استاتیکی در این تست ۰/۱ kN/s بوده است. شکل (۱) نمودار تنش - کرنش بدست آمده را نشان می‌دهد. مشخصات مکانیکی مستخرج از این نمودار در جدول (۲) درج شده است.



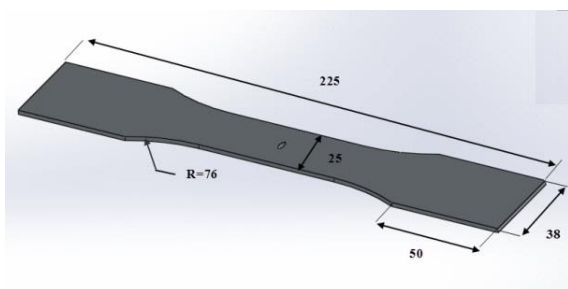
شکل (۱) نمودار تنش - کرنش حقیقی آلیاژ آلومینیوم 2024-T3

جدول (۲) مشخصات مکانیکی آلیاژ آلومینیوم 2024-T3

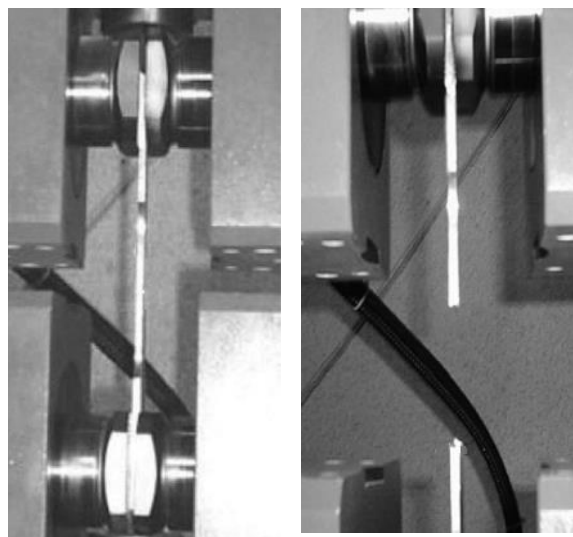
ازدیاد طول	ضریب پواسون	تنش نهایی	تنش تسلیم	مدول الاستیسیته
(%)		(MPa)	(MPa)	(GPa)
۱۸	۰/۳۳	۵۵۰	۳۱۵	۷۲

در این تحقیق به منظور مطالعه عمر خستگی نمونه‌های ناچ‌دار، چهار نوع نمونه آزمایش با شکل و شعاع ناچ مختلف در نظر گرفته شده است. این ناچ‌ها شامل سوراخ

دایروی به قطر ۵ میلی‌متر، سوراخ بیضوی با قطر بزرگ ۵ و قطر کوچک ۳ میلی‌متر، سوراخ بیضوی با قطر بزرگ ۵ و قطر کوچک ۲ میلی‌متر، و در نهایت شیار با طول ۵ میلی‌متر و عرض ۰/۴ میلی‌متر می‌باشند که از این پس در این تحقیق، به ترتیب نمونه‌های نوع اول تا چهارم نامیده می‌شوند. پیکربندی و ابعاد نمونه‌های نوع دوم (با سوراخ بیضوی) در شکل ۲ نشان داده شده است. در انجام تستهای خستگی از دستگاه سرو هیدرولیک Amsler HA250 که توانایی اعمال بار دینامیکی تا ظرفیت ۲۵۰ کیلو نیوتن را دارد، استفاده شده است (شکل (۳)). بارگذاری اعمالی از نوع سینوسی با نسبت بار ۰/۱ و فرکانس ۱۰ هرتز می‌باشد. نتایج حاصل از این آزمایشات در منحنی لگاریتمی S-N، مطابق با استاندارد ASTM: E468-11، نمایش داده شده است (شکل ۴).

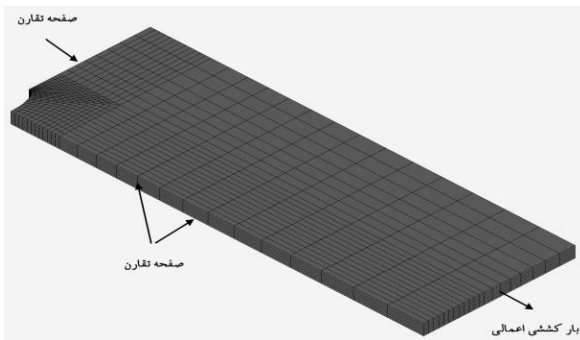


شکل (۲) پیکربندی و ابعاد نمونه نوع دوم (ابعاد بر حسب میلی‌متر)



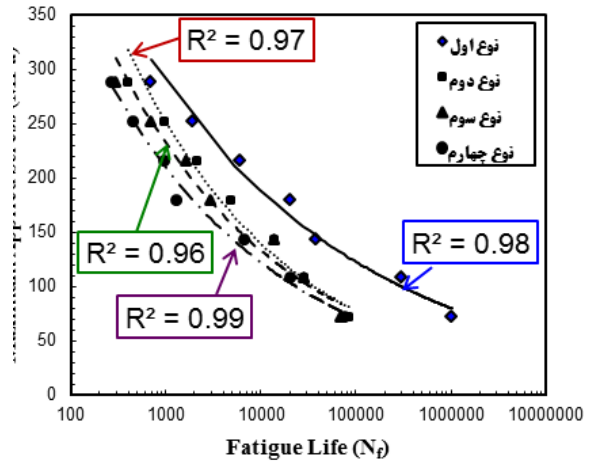
شکل (۳) نمونه‌های مورد بررسی حین آزمایش خستگی و پس از شکست

یک از معیارهای محوری محاسبه گردد. به عبارت دیگر با داشتن مقادیر تنش و کرنش اصلی در حین بارگذاری، مقادیر محدوده تنش و کرنش محوری و برشی در گرههای مختلف در تحلیل اجزا محدود بدست آمده و با استفاده از معیارهای مختلف در نظر گرفته شده عمر خستگی برای نمونه‌های مختلف پیش‌بینی می‌شود. به منظور بدست آوردن توزیع تنش و کرنش در نمونه‌ها در اثر اعمال بار کششی از کد اجزا محدود انسیس استفاده شده است. با توجه به تقارن، تنها ۱/۸ مدل مورد نیاز می‌باشد و شرایط تقارن در صفحات تقارن اعمال گردیده است. در این تحقیق برای شبکه‌بندی مدل از المان هشت‌گره‌ای و شش‌وجهی خطی SOLID45 استفاده شده است. مدل شبکه‌بندی شده ۱/۸ نمونه با ناچ بیضوی به همراه شرایط مرزی و بارهای اعمالی در شکل ۶ نشان داده شده است. رفتار ماده برای ورق‌های آلومینیومی، به صورت الاستیک-پلاستیک با سخت‌شوندگی سینماتیکی با معیار وان میسر در نظر گرفته شده است تا تحلیل‌ها هر چه بیشتر به واقعیت نزدیک‌تر باشند. مدول الاستیسیته و ضریب پواسون مربوطه نیز  $E=72$  GPa و  $\nu=0.33$  در نظر گرفته شده است.



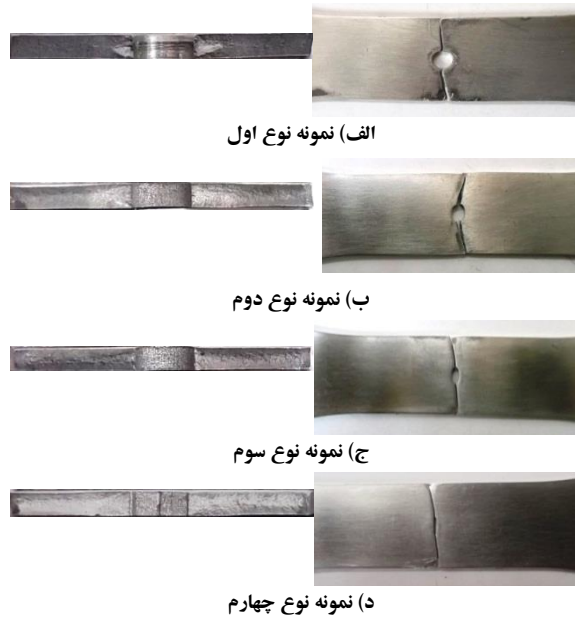
شکل (۶) مدل اجزا محدود به همراه شرایط مرزی و بارهای اعمالی

در تحلیل اجزا محدود بعد از اعمال شرایط مرزی، نیروی محوری کششی بیشینه در هر سیکل (مطابق با آزمایش‌های تجربی) به انتهای نمونه اعمال گردید. سپس به منظور شبیه‌سازی باربرداری در نیم سیکل دوم، مقدار بار کمینه مطابق با آزمایش‌های تجربی به انتهای نمونه اعمال گردید. همچنین به



شکل (۴) منحنی تنش-عمر

همانطور که انتظار می‌رفت، بدلیل وجود تمرکز تنش در مجاورت ناچ‌ها، شکست تمام نمونه‌ها در مجاورت ناچ‌ها اتفاق می‌افتد. شکل (۵) شکست در نمونه‌های مختلف به همراه محل ایجاد و گسترش ترکهای خستگی را برای بیشینه تنش اعمالی  $S_{max}=180$  MPa نشان می‌دهد.



شکل (۵) نمونه‌های شکسته شده در تنش اعمالی  $S_{max}=180$  MPa

### ۳- تحلیل اجزا محدود

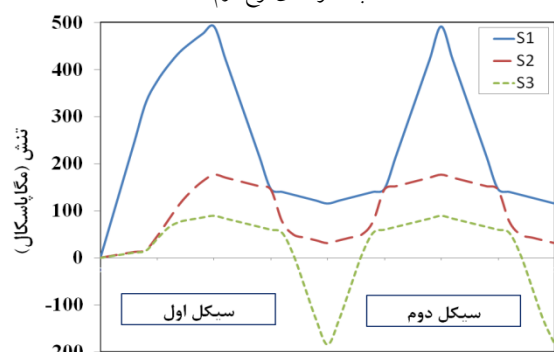
همانطور که قبلاً اشاره شد، به منظور پیش‌بینی عمر خستگی نمونه‌ها، بایستی توزیع تنش و کرنش در مجاورت ناچ‌ها تعیین گردیده و در نهایت تعداد سیکل‌های مورد نیاز برای گسیختگی نمونه‌ها با بدست آوردن مقدار بحرانی در هر



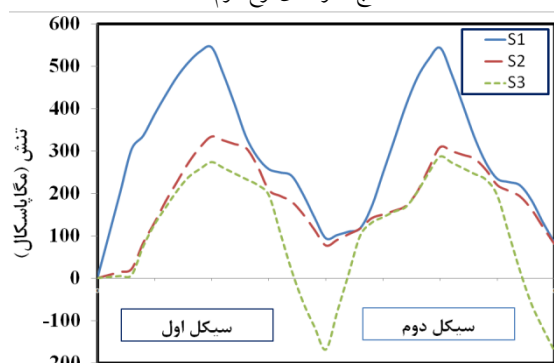
الف) نمونه‌های نوع اول



ب) نمونه‌های نوع دوم



ج) نمونه‌های نوع سوم



د) نمونه‌های نوع چهارم

شکل (۷) تغییرات تنش‌های اصلی در لبه ناچ برای نمونه‌های مختلف

برای تنش اعمالی پیشینه  $S_{max} = 180 \text{ MPa}$

منظور در نظر گرفتن تغییرات توزیع تنش و کرنش طی بارگذاری سیکلی، بارگذاری و باربرداری مجدداً تکرار گردید. در فرایند تحلیل، توزیع تنش و کرنش از نتایج اجزا محدود گرفته شده و برای بدست آوردن مقدار بحرانی در هر یک از معیارهای محوری استفاده شده است. به عبارت دیگر اطلاعات مورد نیاز برای پیش‌بینی عمر خستگی نمونه‌ها با استفاده از معیارهای مختلف شامل مقادیر تنش و کرنش اصلی در حین بارگذاری، مقادیر محدوده تنش و کرنش محوری و برشی در گره‌های مجاور ناچ که بیشترین تمایل را برای شروع و گسترش ترک دارند ثبت می‌شود. در شکل (۷) نمونه‌ای از تغییرات تنش‌های اصلی برای نمونه‌های مختلف برای دو سیکل کامل بارگذاری رسم گردیده است. همانطور که در شکل مشخص است علی‌رغم اعمال بارگذاری تک محوری، وضعیت تنش در مجاورت ناچ چندمحوری می‌باشد.

#### ۴- معیارهای خستگی چند محوری

در این تحقیق، برای پیش‌بینی عمر خستگی نمونه‌ها از هفت معیار مختلف، یعنی معیارهای اسمیت-واتسون-تاپر، کاندلی-بران-میلر، گلینکا، FS، کراسلند، VF و WY استفاده شده است. در ادامه، این معیارها بطور خلاصه توضیح داده می‌شوند. بعلاوه خواص مکانیکی آلیاژ آلومینیوم 2024-T3 مورد استفاده در این معیارهای خستگی در جدول (۳) آورده شده است.

جدول (۳) خواص مکانیکی آلیاژ آلومینیوم 2024-T3 مورد استفاده در معیارهای خستگی چند محوری.

$\sigma_y$	۳۱۵ MPa	$\epsilon_f'$	۰/۱۷
$\nu$	۰/۳۳	c	-۰/۵
E	۷۲ GPa	$\gamma_f'$	۰/۳۶۴
$\sigma_f'$	۱۱۱۰ MPa	$\tau_f'$	۶۴۰ MPa
b	-۰/۱۱	$b'$	-۰/۱۱
$c'$	-۰/۵		

این معیار بر پایه مقدار بیشینه تغییرات کرنش برشی  $\Delta\gamma_{max}$  در ترکیب با تغییرات کرنش محوری  $\Delta\varepsilon_n$  در صفحه‌ای است که مقدار بیشینه تغییرات کرنش برشی در آن اتفاق می‌افتد. همچنین  $S$  ضریبی است که وابسته به جنس قطعه می‌باشد. در عمرهای نزدیک حد دوام این ضریب برای مواد نرم  $0.3$  در نظر گرفته می‌شود. در این معادله  $\sigma'_f$  ضریب استحکام خستگی محوری،  $\varepsilon'_f$  ضریب شکل‌پذیری خستگی،  $b$  توان استحکام خستگی محوری،  $c$  توان شکل‌پذیری پذیر خستگی و  $N_f$  نیز عمر خستگی قطعه می‌باشد. مقادیر تغییرات کرنش برشی  $\Delta\gamma_{max}$  و تغییرات کرنش محوری  $\Delta\varepsilon_n$  در صفحه بحرانی با استفاده از تنش‌ها و کرنش‌های اصلی بدست آمده از تحلیل اجزا محدود، و استفاده از معادلات (۳) و (۴) برای گره‌های اطراف فاق تعیین می‌گردند. در معادلات (۳) و (۴)  $\varepsilon_1$  و  $\varepsilon_3$  به ترتیب مقادیر کرنش‌های اصلی اول و سوم می‌باشند. بعلاوه  $\theta_1$  و  $\theta_2$  در این معادلات به ترتیب نشان دهنده حالت بارگذاری و باربرداری در یک سیکل می‌باشند. این پارامترها برای همه گره‌های اطراف ناچ محاسبه شده‌اند تا مقدار بیشینه آن بدست آید. سپس با استفاده از معادله (۲) عمر خستگی نمونه‌ها تخمین زده می‌شود.

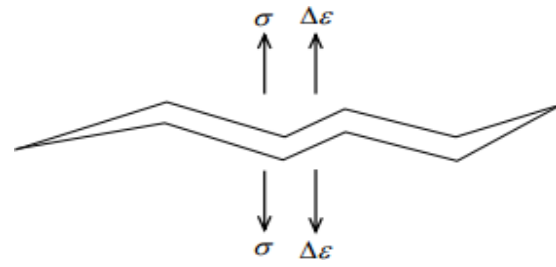
$$\frac{\Delta\gamma}{2} = \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \right)_{\theta_1} - \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \right)_{\theta_2} \quad (۳)$$

$$\frac{\Delta\varepsilon_n}{2} = \left( \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} \right)_{\theta_1} - \left( \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} \right)_{\theta_2} \quad (۴)$$

#### ۳-۴- معیار گلینکا

گلینکا [۱۴] با استفاده از مجموع چگالی انرژی الاستیک و پلاستیک در صفحه بحرانی پارامتر خستگی دیگری را در نظر گرفته و معیار زیر را ارائه کرده است:

$$\frac{\Delta\gamma}{2} \cdot \frac{\Delta\tau}{2} + \frac{\Delta\varepsilon_n}{2} \cdot \frac{\Delta\sigma_n}{2} = \frac{(\sigma'_f)^2}{2E} (2N_f)^{2b} + \frac{E\varepsilon'_f}{2} (2N_f)^{b+c} \quad (۵)$$



شکل (۸) ماهیت فیزیکی معیار اسمیت-واتسون-تاپر

#### ۴-۱- معیار اسمیت-واتسون-تاپر (SWT<sup>۱</sup>)

این معیار به عنوان یک معیار صفحه بحرانی اغلب برای موادی که ترک در مود I قرار می‌گیرد، مناسب است. این معیار بر اساس حاصلضرب تغییرات تنش اصلی در تغییرات کرنش اصلی می‌باشد و به علت در بر گرفتن همزمان تنش و کرنش قادر به در نظر گرفتن سخت‌شوندگی سیکلی می‌باشد و بصورت زیر ارائه می‌شود [۱۳]:

$$\sigma_n^{\max} \frac{\Delta\varepsilon_1}{2} = \frac{(\sigma'_f)^2}{E} (2N_f)^{2b} + \sigma'_f \varepsilon'_f (2N_f)^{b+c} \quad (۱)$$

در این رابطه  $\sigma_n^{\max}$  بیشترین تنش عمودی در صفحه بحرانی و  $\Delta\varepsilon_1$  دامنه بیشترین کرنش عمودی روی صفحه بحرانی هستند. شکل (۸) مفهوم پایه‌ای و اساس فیزیکی این مدل آسیب را به صورت شماتیک نشان می‌دهد. در این مطالعه حداکثر مقدار حاصلضرب  $(\sigma_n^{\max} \frac{\Delta\varepsilon_1}{2})$ ، در هر گره مورد استفاده قرار گرفته است.

#### ۴-۲- معیار کاندلی-بران و میلر (KBM<sup>۲</sup>)

معیار چندمحوری KBM بر اساس ماهیت فیزیکی رشد ترک استوار است. شکل کلی این معیار به صورت زیر ارائه می‌گردد [۲۲]:

$$\frac{\Delta\gamma_{max}}{2} + S\Delta\varepsilon_n = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (۲)$$

برشی،  $\tau_f'$  ثابت استحکام خستگی برشی،  $\gamma_f'$  ثابت شکل - پذیرگی خستگی برشی،  $b'$  و  $c'$  به ترتیب توان استحکام خستگی برشی و شکل‌پذیری خستگی برشی هستند.

#### ۴-۵- کراسلند

معیار کراسلند، معیاری بر پایه تنش بوده و از ریشه دوم نامتغیر دوم تانسور تنش استفاده می‌کند. این نامتغیر از دامنه تنش تعیین می‌گردد. عبارت دیگری که به این معیار اضافه شده است، تنش هیدرواستاتیک محاسبه شده از مقادیر بیشینه تنش می‌باشد [۸].

$$\sqrt{J_{2,a}} + k\sigma_{H,max} = \sigma_f' (2N_f)^b \quad (9)$$

$$\sqrt{J_{2,a}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} [(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2)^2 + (\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3)^2 + (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)^2]^{1/2} \quad (10)$$

در این رابطه  $J_{2,a}$  دامنه دومین نامتغیر تانسور تنش انحرافی،  $\sigma_{H,max}$  تنش هیدرواستاتیک،  $k$  ثابت مربوط به ماده بوده و در این تحقیق برابر مقدار واحد در نظر گرفته شده است.

#### ۴-۶- معیار واران-فراهانی (VF)

معیار پیشنهادی توسط واران-فراهانی و جاهد [۲۳] بر پایه انرژی بوده و از طرفی بصورت بدون بعد می‌باشد که شامل خواص ماده، اثر تنش میانگین و نیز اثر سخت-شوندگی حین بارگذاری می‌باشد. دیگر مزیت این معیار عدم استفاده از ضرایب تجربی وابسته به ماده نظیر  $S$ ،  $K$  در معیارهای KBM و FS می‌باشد. در این معیار صفحه کرنش برشی بیشینه به عنوان صفحه بحرانی معرفی شده و مقادیر تنش و کرنش عمودی این صفحه در رابطه بکار می‌رود. البته لازم به ذکر است که صفحه بحرانی همواره منطبق بر صفحه بیشینه پارامتر خسارت نمی‌باشد، بنابراین در این معیار صفحه‌ای که معیار مقدار بیشینه خود را دارد به عنوان صفحه

در این رابطه  $\Delta\gamma$ ،  $\Delta\tau$ ،  $\Delta\varepsilon_n$  و  $\Delta\sigma_n$  به ترتیب مقادیر بازه کرنش برشی، بازه تنش برشی، بازه کرنش عمودی و بازه تنش عمودی بر روی صفحه بحرانی می‌باشند. این مقادیر با استفاده از تنش‌ها و کرنش‌های اصلی بدست آمده از تحلیل اجزا محدود، و همچنین استفاده از معادلات (۳)، (۴)، (۶) و (۷) برای گره‌های اطراف ناچ تعیین می‌گردند. مقدار بیشینه طرف چپ معادله (۵) از بین مقادیر محاسبه شده برای گره‌های اطراف ناچ، به منظور پیش‌بینی عمر خستگی نمونه‌ها استفاده می‌گردد.

$$\Delta\tau = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)_{\theta_1} - \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)_{\theta_2} \quad (6)$$

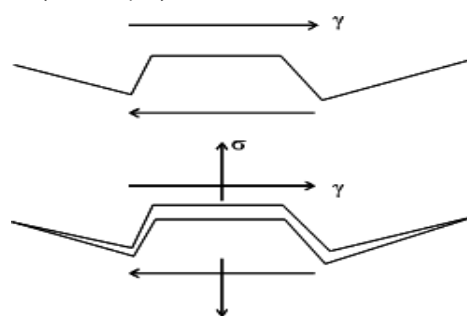
$$\Delta\sigma_n = \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)_{\theta_1} - \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)_{\theta_2} \quad (7)$$

در معادلات بالا  $\sigma_1$  و  $\sigma_3$  به ترتیب مقادیر بیشینه و کمینه تنش‌های اصلی می‌باشند.

#### ۴-۴- معیار فاطمی و سوشی (FS)

معیار پیشنهادی توسط فاطمی و سوشی معیاری بر پایه کرنش می‌باشد که صفحه بیشینه تنش برشی را به عنوان صفحه بحرانی در نظر می‌گیرد. شکل (۹) ماهیت فیزیکی این معیار را نشان می‌دهد [۱۰].

$$\frac{\Delta\gamma_{max}}{2} \left( 1 + k \frac{\sigma_{n,max}}{\sigma_y} \right) = \frac{\tau_f'}{2G} (2N_f)^{b'} + \gamma_f' (2N_f)^{c'} \quad (8)$$



شکل (۹) ماهیت فیزیکی معیار فاطمی و سوشی

در این رابطه  $\sigma_{n,max}$  مقدار بیشینه تنش عمودی موجود در صفحه بحرانی،  $K$  ضریبی تجربی و وابسته به ماده و  $\sigma_y$  مقدار تنش تسلیم ماده مورد نظر می‌باشد. هم‌چنین  $G$  مدول



در رابطه بالا  $\vartheta_e$  ضریب پواسون و  $\sigma_y$  تنش تسلیم ماده می‌باشد. همچنین مقادیر  $\Delta\gamma$  و  $\Delta\varepsilon_n$  از معادلات (۳) و (۴) محاسبه می‌شوند، و  $\sigma_n$  تنش نرمال می‌باشد که برابر با مقدار تنش اصلی اول در نظر گرفته می‌شود. معادله (۱۴) برای گره بحرانی که مقدار طرف چپ معادله را بیشینه می‌کند، حل می‌گردد. این معیار نیز همانند معیار گلینکا، نیازمند استفاده از ضرایب تجربی وابسته به ماده نظیر K و S در معیارهای FS و KBM و همچنین ضریب k در معیار کراسلند نمی‌باشد.

#### ۵- نتایج و بحث

در این تحقیق به منظور مطالعه عمر خستگی نمونه‌های ناچ‌دار، چهار نوع نمونه آزمایش با شکل و شعاع ناچ مختلف در نظر گرفته شده است. به منظور بدست آوردن منحنی تنش-عمر و همچنین بررسی اثر شکل ناچ بر روی عمر خستگی، نمونه‌های تهیه شده در دستگاه تست خستگی برای بارهای کششی مختلف آزمایش گردیدند. نتایج بدست آمده از آزمایش‌های تجربی نشان داد که نمونه‌های نوع اول (نمونه‌های دارای سوراخ دایروی) دارای بیشترین مقاومت خستگی و نمونه‌های نوع چهارم (نمونه‌های شیاردار) دارای کمترین مقاومت خستگی هستند. علاوه بر بدست آوردن عمر نمونه‌ها به روش تجربی، در قسمت عددی این تحقیق از کد اجزا محدود ANSYS برای بدست آوردن توزیع تنش و کرنش در نمونه‌های مورد بررسی، در اثر اعمال بارگذاری کششی استفاده شده است. در نهایت برای پیش‌بینی عمر خستگی نمونه‌ها، از چندین معیار خستگی چندمحوری، یعنی معیارهای SWT، گلینکا، KBM، FS، کراسلند، VF و WY با استفاده از توزیع تنش و کرنش بدست آمده از تحلیل اجزا محدود استفاده گردیده است.

بحرانی تعریف شده و هنگام پیش‌بینی عمر خستگی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\left[ \frac{1}{\sigma_f \varepsilon_f} (\Delta\sigma_n \cdot \Delta\varepsilon_n) + \frac{\left(1 + \frac{\sigma_n^m}{\sigma_f^m}\right)}{\tau_f \dot{\gamma}_f} \left( \frac{\Delta\gamma}{2} \cdot \frac{\Delta\tau}{2} \right) \right]_{\max} = \frac{\sigma_f'}{E} (2N_f)^b + \varepsilon_f' (2N_f)^c + \frac{\tau_f'}{G} (2N_f)^{b'} + \dot{\gamma}_f' (2N_f)^{c'} \quad (11)$$

در رابطه بالا مقدار تنش عمودی در صفحه بحرانی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\sigma_n^m = 1/2(\sigma_n^{\max} + \sigma_n^{\min}) \quad (12)$$

در رابطه (۱۱) مقادیر  $\Delta\gamma$  و  $\Delta\varepsilon_n$  از معادلات (۳) و (۴) محاسبه می‌شوند و  $\sigma_n$  تنش نرمال می‌باشد که برابر با مقدار تنش اصلی اول در نظر گرفته می‌شود. معادله (۱۱) برای گره بحرانی که مقدار طرف چپ معادله را بیشینه می‌کند، حل می‌گردد.

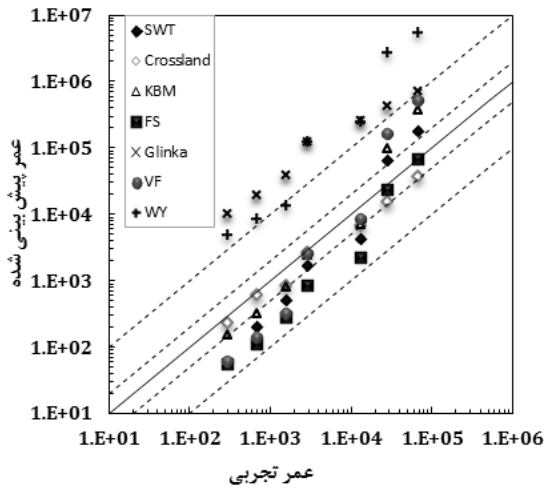
#### ۴-۷- معیار وانگ-یاو (WY)

در معیار پیشنهاد شده توسط وانگ و یاو [۱۹] صفحه محدوده کرنش برشی بیشینه به عنوان صفحه بحرانی معرفی شده و مقادیر تنش و کرنش عمودی در این صفحه به عنوان پارامتر خستگی خسارت مورد استفاده قرار می‌گیرد.

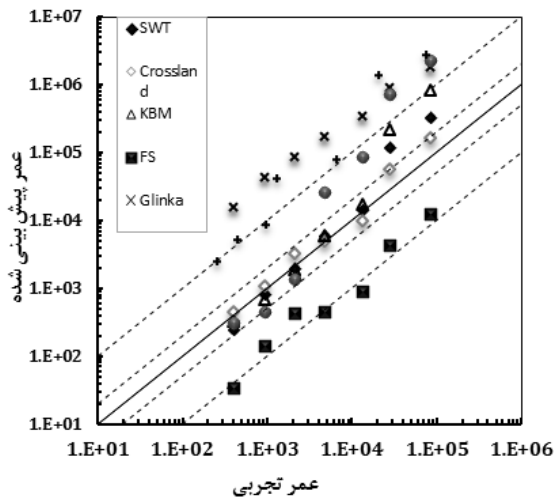
$$\frac{\Delta\gamma_{\max}}{2} + \left(1 - \frac{\sigma_n}{2\sigma_y}\right) \Delta\varepsilon_n = f(N_f) \quad (13)$$

البته صفحه بحرانی همواره منطبق بر صفحه مقدار بیشینه پارامتر خسارت نمی‌باشد، بنابراین، در این معیار، صفحه‌ای که معیار مقدار بیشینه خود را دارد به عنوان صفحه بحرانی تعریف شده و هنگام پیش‌بینی عمر خستگی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\left[ \frac{\Delta\gamma}{2} + \left(1 - \frac{\sigma_n}{2\sigma_y}\right) \Delta\varepsilon_n \right]_{\max} = (1 + \vartheta_e) \frac{\sigma_f'}{E} (2N_f)^b + 1.5\varepsilon_f' (2N_f)^c + \left[ 1 - \frac{\sigma_f'}{4\sigma_y} (2N_f)^b \right] [(1 - \vartheta_e)(\sigma_f')/E (2N_f)^b + 0.5\varepsilon_f' (2N_f)^c] \quad (14)$$



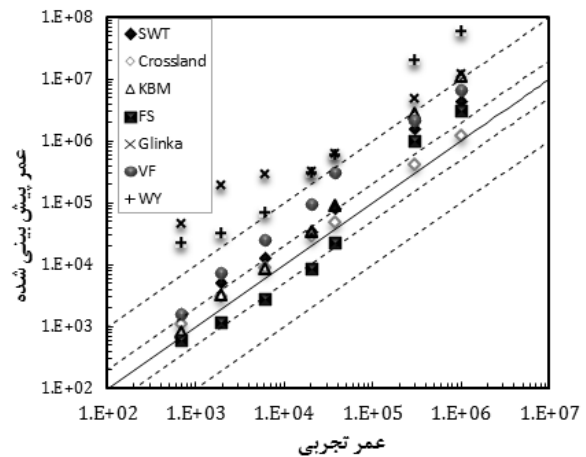
شکل (۱۲) مقایسه عمرهای تجربی و عمرهای پیش‌بینی شده توسط معیارهای خستگی چند محوری برای نمونه‌های نوع سوم



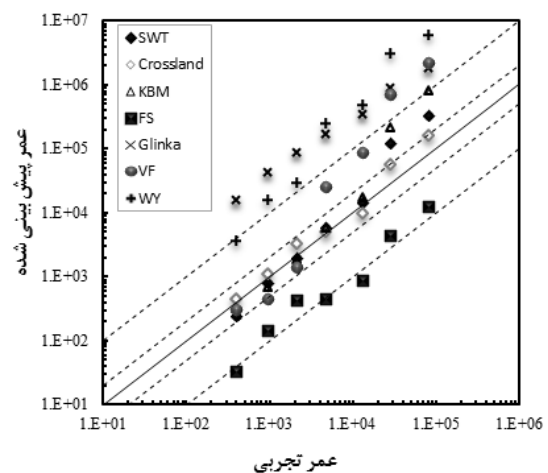
شکل (۱۳) مقایسه عمرهای تجربی و عمرهای پیش‌بینی شده توسط معیارهای خستگی چندمحوری برای نمونه‌های نوع چهارم

همانگونه که در اشکال مشخص است، در این نمونه‌ها نتایج معیار کراسلند در میان دو خط مشخص کننده نسبت تخمین ۲ می‌باشند که نشان دهنده دقت مناسب عمرهای پیش‌بینی شده می‌باشند. توضیح این که نسبت تخمین برابر است با نسبت عمر پیش‌بینی شده به عمر تجربی برای پیش‌بینی‌های بیشتر و یا برعکس برای تخمین‌های کمتر از عمر تجربی. همچنین نتایج معیار KBM و SWT به غیر از چند نقطه در میان دو خط با نسبت تخمین ۲ می‌باشند و در نتیجه این معیار نیز مناسب می‌باشد ولی نتایج معیارهای گلینکا، VF و WY دارای خطای زیادی هستند.

در فرایند تحلیل عددی، توزیع تنش و کرنش از نتایج اجزا محدود گرفته شده و برای بدست آوردن مقدار بحرانی در هر یک از معیارهای محوری استفاده گردید. به عبارت دیگر با داشتن مقادیر تنش و کرنش اصلی در حین بارگذاری، مقادیر محدوده تنش و کرنش محوری و برشی در گره‌های مختلف بدست آمده و با استفاده از روابط (۳)، (۴)، (۶) و (۷) و نیز روابط مربوط به معیارهای مختلف، عمر پیش‌بینی شده برای نمونه‌های مختلف بدست آمده است. نتایج بدست آمده برای نمونه‌های مختلف در اشکال (۱۰) الی (۱۳) در مقابل مقادیر عمر خستگی به دست آمده از آزمایش‌های خستگی رسم گردیده است.



شکل (۱۰) مقایسه عمرهای تجربی و عمرهای پیش‌بینی شده توسط معیارهای خستگی چند محوری برای نمونه‌های نوع اول



شکل (۱۱) مقایسه عمرهای تجربی و عمرهای پیش‌بینی شده توسط معیارهای خستگی چند محوری برای نمونه‌های نوع دوم

نوع اول تا چهارم به ترتیب برابر با ۲۹۳، ۲۲۶، ۱۶۷ و ۲۱۸ درصد می‌باشد.

### ۶- نتیجه‌گیری

در قسمت اول این تحقیق عمر خستگی نمونه‌های ناچ-دار از جنس آلیاژ آلومینیوم 2024-T3، به صورت تجربی با استفاده از آزمایش‌های تجربی مورد مطالعه قرار گرفت. علاوه بر بدست آوردن عمر نمونه‌ها به روش تجربی، در قسمت عددی این تحقیق، برای پیش‌بینی عمر خستگی نمونه‌ها، از چندین معیار خستگی چندمحوری با استفاده از توزیع تنش و کرنش بدست آمده از تحلیل اجزا محدود بهره گرفته شد. با توجه به نتایج بدست آمده از آزمایش‌های خستگی مشخص گردید که نمونه‌های نوع اول (نمونه‌های دارای سوراخ دایروی) دارای بیشترین مقاومت خستگی و کمترین مقاومت خستگی هستند. بعلاوه نتایج حاصل از تخمین عمر خستگی توسط معیارهای چندمحوری نشان داد که معیار کراسلند عمر خستگی قطعات را با دقت مناسبی پیش‌بینی می‌کند. با توجه به مقادیر میانگین خطای محاسبه شده، بیشترین انحراف بین عمرهای پیش‌بینی شده توسط معیار کراسلند با نتایج بدست آمده از آزمایشات خستگی ۱۹ درصد می‌باشد. بعلاوه نتایج معیارهای SWT و KBM نسبتاً مناسب بوده، ولی معیارهای گلینکا و WY بیشترین مقدار میانگین خطا را برای تمامی نمونه‌ها ارائه می‌دهند.

### فهرست علائم

E	مدول الاستیسیته
b	توان استحکام خستگی محوری
b'	توان استحکام خستگی برشی
c	توان شکل‌پذیری خستگی

به منظور ارزیابی و مقایسه بهتر عمرهای خستگی پیش‌بینی شده در این تحقیق از یک تابع خطا استفاده شده است. این تابع، انحراف بین عمرهای پیش‌بینی شده توسط معیارهای چندمحوری مورد استفاده و نتایج تجربی حاصل از آزمایش‌های خستگی را بیان می‌کند. تابع خطای مورد استفاده به شکل زیر تعریف می‌گردد.

$$E = \log \left( \frac{N_{exp}}{N_{est}} \right) \quad (15)$$

$$\bar{E} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |E_i| \quad (16)$$

در حالیکه  $N_{est}$  عمرهای پیش‌بینی شده توسط معیارهای مورد استفاده و  $N_{exp}$  نتایج تجربی حاصل از آزمایش‌های خستگی را نشان می‌دهند. مقادیر میانگین خطای محاسبه شده برای هر یک از معیارهای خستگی چندمحوری در جدول (۴) نشان داده شده است.

جدول (۴) مقادیر میانگین خطای محاسبه شده برای هر یک از معیارهای خستگی چندمحوری (مقادیر بر حسب درصد می‌باشند).

	SWT	Glinka	KBM	FS	Crossland	VF	WY
نمونه‌های نوع اول	۴۳	۱۳۵	۴۳	۳۲	۱۵	۶۸	۲۹۳
نمونه‌های نوع دوم	۲۳	۱۴۱	۳۳	۶۳	۱۴	۷۱	۲۲۴
نمونه‌های نوع سوم	۴۶	۱۳۵	۳۷	۵۳	۱۹	۵۷	۱۶۷
نمونه‌های نوع چهارم	۶۰	۸۸	۶۰	۷۸	۱۶	۷۸	۲۱۸

با توجه به نتایج جدول (۴) معیار کراسلند عمر خستگی این قطعات را با دقت مناسبی پیش‌بینی کرده است. میانگین خطای محاسبه شده برای معیار کراسلند در نمونه‌های نوع اول تا چهارم به ترتیب برابر با ۱۵، ۱۴، ۱۹ و ۱۶ درصد می‌باشد. خطای نتایج معیارهای SWT و KBM نسبتاً مناسب بوده، و معیارهای گلینکا و WY بیشترین مقدار میانگین خطا را برای تمامی نمونه‌ها ارائه می‌دهند. به عنوان نمونه مقدار میانگین خطای محاسبه شده در معیار WY برای نمونه‌های

- [3] Berto F., Lazzarin P., Marangon C., Fatigue strength of notched specimens made of 40CrMoV13.9 under multiaxial loading, *Materials and Design*, 54, 2014, pp. 57-66.
- [4] Abazadeh B., Chakherlou T.N., Farrahi G.H., Alderliesten R.C., Fatigue life estimation of bolt clamped and interference fitted-bolt clamped double shear lap joints using multiaxial fatigue criteria, *Materials and Design*, 43, 2013, pp. 327-336.
- [5] Esmaeili F., Hassanifard S., Zehsaz M., Fatigue Life Prediction of Notched Specimens using the Volumetric Approach, *Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering*, 5, 2011, pp. 508-518.
- [۶] حسنی فرد، سوران، زهساز، محمد، اسماعیلی گلدرق، فیروز، تأثیر فاصله بین صفحات بر روی عمر خستگی اتصالات نقطه‌جوش آلیاژ آلومینیوم 5083-0، روش‌های عددی در مهندسی، شماره اول، ۱۳۹۲، صفحه ۱۵-۲۵.
- [7] Esmaeili F., Chakherlou T.N., Zehsaz M., Prediction of fatigue life in aircraft double lap bolted joints using several multiaxial fatigue criteria, *Materials & Design*, 59, 2014, pp. 430-438.
- [8] Crossland B., Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel. In: Proceedings of the international conference on fatigue of metals. London: Institution of Mechanical Engineers, 1956, pp. 138-49.
- [9] Brown M.W., Miller KJ., A theory for fatigue failure under multiaxial stress-strain conditions, *Process Instruction of Mechanical Engineering*, Vol. 187, 1973, pp. 745-55.
- [10] Fatemi A., Socie DF., Critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Vol. 11, 1988, pp. 149-65.
- [11] Li J., Zhang ZP., Sun Q., A new multiaxial fatigue damage model for various metallic materials under the combination of tension and torsion loadings, *International Journal of Fatigue*, Vol. 31, 2009, pp. 776-781.
- [12] Wang CH., Brown MW., A path-independent parameter for fatigue under proportional and non-proportional loading, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Vol. 16, 1993, pp. 1285-1298.
- [13] Smith RN., Watson P., Topper TH., A stress strain function for the fatigue of metal, *J Mater*, Vol. 5, 1970, pp. 767-778.

$c'$	توان شکل‌پذیری خستگی برشی
$G$	مدول برشی
$J_{2,a}$	دامنه دومین نا متغیر تانسور تنش انحرافی
$N_{est}$	عمر خستگی پیش‌بینی شده
$N_{exp}$	عمر خستگی تجربی
$N_f$	عمر خستگی
$\Delta\gamma_{max}$	بیشینه تغییرات کرنش برشی
$\Delta\varepsilon_1$	دامنه بیشترین کرنش عمودی در صفحه بحرانی
$\Delta\varepsilon_n$	تغییرات کرنش محوری
$\Delta\gamma$	بازه کرنش برشی بر روی صفحه بحرانی
$\Delta\tau$	بازه تنش برشی بر روی صفحه بحرانی
$\Delta\varepsilon_n$	بازه کرنش عمودی بر روی صفحه بحرانی
$\Delta\sigma_n$	بازه تنش عمودی بر روی صفحه بحرانی
$\varepsilon_1$	مقدار کرنش اصلی اول
$\varepsilon_3$	مقدار کرنش اصلی سوم
$\sigma_1$	مقدار بیشینه تنش اصلی
$\sigma_3$	مقدار کمینه تنش اصلی
$\sigma_{H,max}$	تنش هیدرواستاتیک
$\sigma_n^{max}$	بیشترین تنش عمودی در صفحه بحرانی
$\sigma_y$	تنش تسلیم
$\nu$	ضریب پواسون

#### مراجع:

- [1] Fatemi A.T., Zeng Z., Plaseied A., Fatigue behavior and life predictions of notched specimens made of QT and forged microalloyed steels, *International Journal of Fatigue*, Vol. 26, 2004, pp. 663-72.
- [2] Medekshas H., Balina V., Assessment of low cycle fatigue strength of notched components. *Materials and Design*, Vol. 27, 2006, pp. 132-140.

- [14] Glinka G., Shen G., Plumtree A., A Multiaxial Fatigue Strain Energy Density Parameter Related to the Critical Plane, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structure*, Vol. 18, 1995, pp. 37-46.
- [15] Varvani-Farahani A., A new energy-critical plane parameter for fatigue life assessment of various metallic materials subjected to in-phase and out-of phase multiaxial fatigue loading conditions, *International Journal of Fatigue*, Vol. 22, 2000, pp. 295-305.
- [16] Socie D.F., Multiaxial fatigue damage models, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 109, 1987, pp. 293-298.
- [17] Liu K.C., A Method Based on Virtual Strain-Energy Parameters for Multiaxial Fatigue, *Advances in Multiaxial Fatigue*, ASTM STP 1191, D. L. McDowell and R. Ellis Eds., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1993, pp. 67-84.
- [18] Brown M.W., Miller K.J., Two Decades of Progress in the Assessment of Multiaxial Low-Cycle Fatigue Life, *Low-Cycle Fatigue and Life Prediction*, ASTM STP 770, C. Amzallag, B. Lewis, and P. Rabbe, Eds. American Society for Testing and Materials, 1982, pp. 482-499.
- [19] Wang Y.Y., Yao W.X., Evaluation and comparison of several multiaxial fatigue criteria, *International Journal of Fatigue*, Vol. 26, 2004, pp. 17-25.
- [20] Varvani-Farahani A., Kodric T., Ghahramani A., A method of fatigue life prediction in notched and un-notched components, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 169, 2005, pp. 94-102.
- [۲۱] قاجار، رحمت‌الله، پیمان، صفا، علیزاده کاکلر، جواد، ارائه یک مدل کرنش پایه بهبود یافته برای محاسبه عمر خستگی چندمحوری فلزات، *مهندسی مکانیک جامدات*، شماره اول، ۱۳۹۰، صفحه ۱۷-۲۵.
- [22] Kandil F.A., Brown M.W., Miller K.J., Biaxial low cycle fatigue fracture of 316 stainless steel at elevated temperatures, *The Metal Society of London*, Vol. 280, 1982, pp. 203-210.
- [23] Jahed H., Varvani-Farahani A., Upper and lower fatigue life limits model using energy-based fatigue properties, *International Journal of Fatigue*, Vol. 28, 2006, pp. 467-473.

