



## بررسی تغییرات ضریب شدت تنش با فاصله ترک از لبه بار گذاری در بارگذاری متمرکز در ترک لبه ای

سید مهران زحلی<sup>۱</sup>، فرزاد فریبا<sup>۲\*</sup>

\* فرزاد فریبا: Farzad.Fariba@gmail.com

### چکیده

### واژه‌های کلیدی

توزیع تنش، ضریب شدت تنش، بار گذاری متمرکز، ترک مرکزی

تعیین توزیع تنش در نوک ترک و تعیین ضریب شدت تنش در آن، یکی از مباحث مطرح و مهم در مکانیک شکست می باشد. در حقیقت برای بررسی شکست نمونه تحت بار های متغیر، پارامتر ضریب شدت تنش در نوک ترک یکی از معیار های اساسی می باشد که با چقرمگی ماده مورد بررسی مقایسه می شود. همچنین توزیع تنش در نوک ترک بر حسب این پارامتر ارائه می شود. مقدار ضریب شدت تنش برای حالت های مختلف بار گذاری و هندسه های مختلف نمونه و ترک در استاندارد ها ارائه شده است. اما در تمامی این حالت ها ترک در وسط ورق واقع شده است. هنگامی که توزیع تنش یکنواخت در لبه های ورق وجود دارد، موقعیت ترک چندان تاثیری در مقدار ضریب شدت تنش نخواهد داشت، اما در بار گذاری های متمرکز با دور شدن از محل اعمال بار توزیع تنش تغییر نموده و مقدار ضریب شدت تنش نیز تغییر می کند. بنابراین تغییرات ضریب شدت تنش در ترک های واقع شده در نقاط غیر مرکزی یکی از مواردی است که باید مورد بررسی قرار گیرد. در این تحقیق، رابطه ای برای تعیین ضریب شدت تنش در ترک لبه ای در بار گذاری متمرکز بر حسب فاصله از لبه بار گذاری ارائه شده است. این رابطه با استفاده از شبیه سازی از طریق نرم افزار آباکوس به دست آمده و سپس با استفاده از روابط تحلیلی موجود، صحت سنجی شده است. تغییرات ضریب شدت تنش حاصل از شبیه سازی و تحلیل به صورت توابعی بیان شده و در نهایت یک رابطه نوین در این مورد در نظر گرفته شد که خطی و در محدوده الاستیک استخراج شده است. در نهایت، رابطه ارائه شده صحت سنجی شده است.

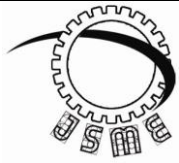
تاریخ ارسال: ۱۳۹۴/۰۸/۲۰

تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۱۰/۱۲

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۱۰/۲۹

۱- کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان، همدان، ایران.

۲- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان، همدان، ایران.



Journal of  
Solid Mechanics  
in Engineering

**Journal of  
Solid Mechanics in Engineering**

<http://jsme.iaukhsh.ac.ir>



## **Investigation of the Intensity Stress Factor of the Un-Central Edge Cracks in the Semi-Infinite Plate with the Concentrated Load**

Seyed Mehran Zohali<sup>1</sup>, Farzad Fariba<sup>2,\*</sup>

\* Corresponding Author: Farzad.Fariba@Gmail.com

### **Abstract:**

The stress distribution on crack tips and the stress intensity factor on them are the main courses in the fracture mechanic. The stress intensity factor of the cracks with the different exited loads and geometries are listed in the tables of the standard book tables. In all of them, the cracks are located in the central position in the plates. In the case that, the exited load is concentrated the stress distributions is not uniform and vanish in the different point on the plate. Therefore, the stress intensity factor of the crack, changes with the displacement of the crack line from load. In this paper, the stress intensity factor calculated with the change of the crack displacement from load point. A new relation is introduced from the simulation results with the Abaqus. Also, the analytical solution was used from the linear fracture mechanic theory and Another function and relation were determined. These two relations from Abaqus and the analytical method were compared and finally more accurate relation was introduced as the relation of the stress intensity factor of the crack in term of the distance from point load.

### **Key words:**

Stress distribution  
Stress intensity factor  
point load  
Crack

1- MSc Student, Islamic Azad University, Hamedan Branch, Hamedan, Iran.

2- Assistant Professor, Islamic Azad University, Hamedan Branch, Hamedan, Iran.

## ۱- مقدمه

توزیع و تمرکز تنش در نوک ترک، در مکانیک شکست خطی یکی از مسائل مهم و اساسی می باشد. تعیین توزیع تنش در نوک ترک، وابسته به محاسبه و تعیین پارامتری به نام ضریب شدت تنش می باشد. این پارامتر نه تنها می تواند تعیین کننده مقدار تنش در نوک ترک و در نقاط پیرامون آن باشد، بلکه نشان دهنده وضعیت ماده در برابر ترک مورد بررسی نیز خواهد بود. این پارامتر یکی از پارامترهای مهم در نظریه مکانیک شکست خطی می باشد.

ضریب شدت تنش برای بارگذاری ها و هندسه های مختلف در استاندارد های موجود ارائه شده است. در این استاندارد ها معمولاً ترک ها در مرکز ورق در نظر گرفته می شوند. این امر برای بارگذاری های گسترده یکنواخت در لبه ورق سبب ایجاد اختلاف و تغییر در ضریب شدت تنش نمی گردد، اما در هنگامی که بار از نوع متمرکز باشد به دلیل ایجاد توزیع تنش غیر یکنواخت در ورق، محل ترک در مقدار ضریب شدت تنش موثر خواهد بود.

در این مقاله، تغییرات ضریب شدت تنش با نزدیک شدن ترک به لبه بارگذاری شده با استفاده از روش تحلیلی و شبیه سازی تعیین شده و نتایج با هم مقایسه شده است. در نهایت یک رابطه برای این پارامتر بر حسب فاصله از لبه ورق ارائه شده است. در حالی که در تحقیقات قبلی و استانداردهای موجود همیشه ترک ها در مرکز ورق در نظر گرفته شده اند.

اولین پژوهش ها و آزمایش های گزارش شده در قرن های پیشین توسط لئوناردو [۱] در سال ۱۹۸۴ گزارش شده است که در آن به علل شکست های اتفاق افتاده پرداخته است. او استحکام یک سیم آهنی را اندازه گیری نمود و نتیجه گرفت که استحکام سیم آهنی با طول آن نسبت مستقیم دارد. این نتایج نشان می دهد که ترک و رخنه در ماده مورد بررسی استحکام آن را کنترل می کند. نتایج نشان داد که در سیم آهنی بلند تر با حجم بزرگتر امکان وجود رخنه بیشتر بوده و استحکام کاهش می یابد.

پس از آن گاليله [۲] شکست را در سیم ها و تیر های تحت بارگذاری مورد بررسی قرار داده و نشان داد ابعاد تیر در شکست آن تاثیری مستقیم دارد. ارتباط بین تنش شکست نمونه و طول ترک، اولین بار در سال ۱۹۲۰ توسط گریفیث [۳] مطرح و ارائه شد. او بر روی یک سوراخ بیضوی به عنوان یک ترک بیضوی که در حال رشد ناپایدار بود، تحلیل تنش انجام داد. گریفیث اولین شخصی بود که معیار و تئوری مربوط به رشد ترک را بر اساس معیار پایستاری انرژی فرموله نموده و ارائه داد [۲]. در حقیقت، وی بنیانگذار مکانیک شکست مدرن می باشد. بر اساس این معیار، ترک در صورتی رشد می کند که انرژی کرنشی حاصل از رشد ترک برابر یا بیشتر از انرژی سطحی ماده باشد. انرژی ای که سطوح ماده را به همدیگر چسبیده و پیوسته نگاه می دارد را انرژی سطحی می نامند. تئوری گریفیث، به درستی رابطه بین استحکام در نمونه شیشه ای و طول ترک را پیشگویی نمود. این تئوری برای نمونه های فولادی به درستی جواب نداد و در حقیقت تنها برای مواد ترد ایده آل مصداق دارد. تئوری اصلاح شده گریفیث در سال ۱۹۴۸ برای همه مواد ارائه شد [۴]. البته این کار توسط اینگلس [۵] هفت سال زودتر انجام شده بود.

یکی از مهمترین اتفاقات مربوط به شکست خستگی مربوط به کشتی آمریکایی به نام کشتی لایبرتی بود. این کشتی به دلیل خستگی حاصل از حرکت موج ها در دریچه موجود بر روی عرشه دچار شکست شد. با اتفاق کشتی لایبرتی، عصر جدیدی در موضوع مکانیک شکست شروع شد. در این هنگام این تحقیقات در آزمایشگاهی به نام ناوال توسط ایروین [۶] شروع شد. او در اولین اقدام تئوری های گریفیث را با تعریف و در نظر گرفتن ناحیه پلاستیک به وجود آمده در نوک ترک در ارائه معیار انرژی برای رشد ترک، برای فلزات نیز گسترش داد. اروان [۷] سپس در اقدامی جداگانه معیار های گریفیث را اصلاح نموده و ارائه داد. موت [۸] در بررسی های خود معیار گریفیث را در رشد ناگهانی ترک تعمیم داد.

شکست در مواد جدید و کامپوزیت ها و مواد لایه ای می باشد.

با معرفی روش اجزای محدود در مهندسی، از اولین محققانی که از این روش برای مدلسازی ترک استفاده نمود الیور [۱۸] در سال ۱۹۹۵ بود. وی با استفاده از تکنیک حذف مش برای مدل نمودن حفره در نمونه استفاده نموده و ترک را شبیه سازی نمود. رشید [۱۹] با استفاده از تکنیک مش های حرکتی و جابه جا شدن مش ها برای مدلسازی ترک استفاده نمود. نیکلاس [۲۰] در سال ۱۹۹۹ از روش و تکنیک بدون مش برای شبیه سازی استفاده نمود و مشکلات روش های قبلی را حل نمود.

اولین کاربرد نرم افزارهایی مانند آباکوس برای شبیه سازی ترک توسط هانگ و همکاران [۲۱] در سال ۲۰۰۳ ارائه شد. در این روش که به آن روش اجزای محدود بسط داده شده<sup>۱</sup> می گویند، نرم افزار قادر است ضریب شدت تنش را با ایجاد یک سطح قابل جدایش در نمونه و تعریف المان هایی در نوک ترک محاسبه نماید.

امروزه با استفاده از روش های پردازش تصویر و پاشیدن رنگ بر روی نمونه و اطراف ترک و اندازه گیری جابه جایی این نقاط توزیع تنش و ضریب شدت تنش را در نمونه اندازه گیری می کنند. ریتور و همکاران [۲۲] در سال ۲۰۰۴ با استفاده از تکنیک پردازش تصویر در نمونه دارای ترک لبه ای مقدار ضریب شدت تنش را اندازه گیری نمودند. مزیت اصلی و مهم این روش در این است که خطای موجود در روش های اجزای محدود را نداشته و این ضریب مستقیماً از اندازه گیری جابه جایی نقاط بر روی نمونه به دست می آید.

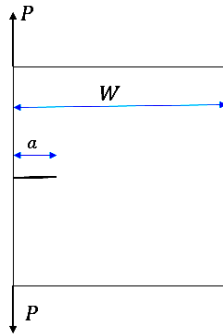
## ۲- بیان و توضیح مسئله

ضریب شدت تنش برای مودباز شدگی و برای ترک مرکزی مطابق با شکل (۱) به صورت رابطه زیر بیان می شود [۴]:

در سال ۱۹۵۶ ایروین [۹] با توجه معیار انرژی گریفیث، معیار رشد ترک را به صورت نرخ آزاد سازی انرژی به صورت جدیدی ارائه نمود که توسط مهندسان قابل استفاده تر باشد. پس از آن وسترگارد [۱۰] در سال ۱۹۳۸ با معرفی توابع مختلط، روش و تکنیکی را برای تعیین توزیع تنش و جابه جایی در نوک ترک معرفی نموده و نتایج بررسی خود را در مقاله ای چاپ نمود. پس از آن ایروین [۱۱] نشان داد که توزیع تنش به دست آمده در نوک ترک توسط وسترگارد را می توان بر حسب پارامتری بیان نمود که به آن ضریب شدت تنش نام نهادند. ویلیامز [۱۲] با استفاده از تکنیک دیگری توزیع تنش در نوک ترک را به دست آورد. پس از آن بررسی های مکانیک شکست ادامه یافته است.

برخی کاربرد های تئوری و معیار های ارائه شده در کار های عملی و کاربرد های بعد از آن با موفقیت روبرو شد. ولز [۱۳] در سال ۱۹۵۶ با استفاده از معیار های گریفیث علت شکست در بال های جت های هوانورد را به درستی تحلیل نموده و علت آن ها را در رشد ترک به دلیل تبعیت از معیار های ارائه شده دانست. شرکت جنرال موتور در تحقیقات انجام گرفته توسط وین و وانت [۱۴] علت شکست شفت توربین گازی را به درستی تحلیل و بررسی نمود. در سال ۱۹۶۰ پاریس [۱۵] رابطه معروف خود را برای رشد ترک ارائه داد. مکانیک شکست غیر خطی هنگامی ارائه شد که مسئله پلاستیسیته نوک ترک مطرح شد. از آن به بعد تحلیل مکانیک شکست بیشتر بر روی مسئله پلاستیسیته نوک ترک و مباحث مربوطه معطوف شد. ولز [۱۶] پارامتری به نام بازشدگی دهانه ترک را برای بررسی خصوصیات ترک معرفی نمود. رایس [۱۷] تئوری انتگرال جی را که مستقل از مسیر بوده و بر روی مرزهای ترک تعریف می شود معرفی نمود. مکانیک شکست تا امروزه پشرفت های چشمگیری در حوزه های مختلف داشته است. کاربردی ترین این مسائل بررسی شکست در قطعات جوشکاری شده، مخازن تحت فشار و نیز بررسی

<sup>1</sup> X-FEM



شکل (۲) ترک لبه ای با بارگذاری متمرکز بر لبه آن

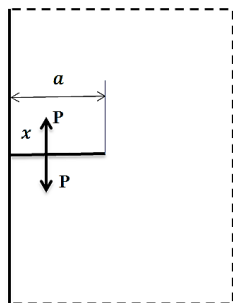
$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{2+\frac{a}{W}}{\left(1-\frac{a}{W}\right)^2} \left[ 0.886 + 4.64\left(\frac{a}{W}\right) - 13.32\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 14.72\left(\frac{a}{W}\right)^3 - 5.60\left(\frac{a}{W}\right)^4 \right] \quad (6)$$

که در آن W و B به ترتیب پهنا و ضخامت ورق می باشند. برای تعیین ضریب شدت تنش در حالت بارگذاری غیر یکنواخت بر روی خط ترک، یک روش تحلیلی وجود دارد. برای آن باید از رابطه ضریب شدت تنش، مطابق با شکل (۳) برای ترک لبه ای تحت بار متمرکز P در فاصله x از نوک ترک به طول a به صورت رابطه زیر استفاده نمود

$$K_I = \int_0^a \frac{2\sqrt{a}(1+F\left(\frac{x}{a}\right))}{\sqrt{\pi(a^2-x^2)}} \sigma_y dx \quad (7)$$

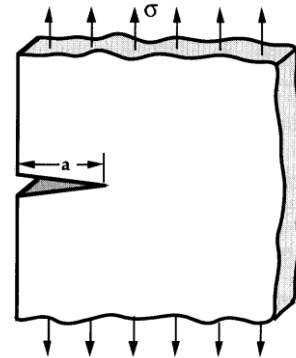
که در آن:

$$F\left(\frac{x}{a}\right) = [1 - (x/a)^2] \left[ 0.2945 - 0.3912\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 0.5094\left(\frac{x}{a}\right)^4 - 0.7685\left(\frac{x}{a}\right)^6 + 0.5094\left(\frac{x}{a}\right)^8 \right] \quad (8)$$



شکل (۳) ترک لبه ای دارای بار متمرکز در ورق نامحدود

$$K_I = 1.12\sigma\sqrt{\pi a} \quad (1)$$



شکل (۱) ترک کناری با بارگذاری گسترده در لبه های ورق [۴]

برای تعیین توزیع تنش در نوک ترک، وسترگارد [۱۰] توابع مختلطی را معرفی نموده و با استفاده از روش های موجود در الاستیسیته و معرفی توابع تنش ابری توزیع تنش را با استفاده از توابع مختلط استخراج نموده است. برای بارگذاری در مود ۱، توزیع تنش در نوک ترک به صورت روابط زیر ارائه شده است [۴]:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (2)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (4)$$

همچنین، در صورتی که ابعاد ورق نسبت به طول ترک خیلی بزرگ نباشد ضریبی به نام ضریب تصحیح برای آن به کار برده می شود که اثر اندازه را نیز در نظر می گیرد. برای ترک لبه ای که در دو لبه آن نیروی متمرکز وجود داشته باشد، مطابق با شکل (۲) مقدار ضریب شدت تنش با استفاده از رابطه زیر به دست می آید [۲۵]:

$$K_I = \frac{P}{B\sqrt{W}} f\left(\frac{a}{W}\right) \quad (5)$$

که در آن داریم:

$$K_I = \int_0^a \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1+F(\frac{x}{a})}{(a^2-x^2)^{1/2}} (\sigma_0 dx) a^{\frac{1}{2}} = \quad (11)$$

$$= \sigma_0 a^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a \frac{1+F(\frac{x}{a})}{(a^2-x^2)^{1/2}} dx$$

با جاگذاری از معادله (۸) و مرتب سازی و محاسبه عددی ترم های موجود در انتگرال با استفاده از روش ذوزنقه و با در نظر گرفتن ۱۰۰ المان، در نهایت به دست می آید:

$$K_I = 1.87885 \frac{2\sqrt{a}\sigma_0}{\sqrt{\pi}} = 1.19\sqrt{\pi a}\sigma_0 \quad (12)$$

مقدار ضریب شدت تنش با استفاده از روابط موجود در کتب مراجع [۴] برای این حالت بارگذاری یکنواخت به صورت زیر به دست می آید:

$$K_I = 1.145\sigma_0\sqrt{\pi a} \quad (13)$$

دیده می شود که این دو مقدار با هم خطایی در حدود ۲/۳ درصد دارند. بنابراین، با این محاسبات نتیجه گرفته می شود که رابطه (۱۰) و تکنیک مود استفاده در آن برای تعیین ضریب شدت تنش درست می باشد. در ادامه از این روش برای تعیین ضریب شدت تنش برای ترک های واقع در نقاط مختلف نسبت به لبه بارگذاری شده استفاده می شود. قبل از آن باید بتوان توزیع تنش را در ورق مورد بررسی تعیین نمود.

برای حل این مسئله و تعیین توزیع تنش در ورق مورد بررسی، از حل الاستیک مسئله گوه استفاده شده است. برای این منظور در ابتدا با توجه به پارامترهای شک (۵)، برای حالت مسئله مورد بررسی در این تحقیق داریم [۲۴]:

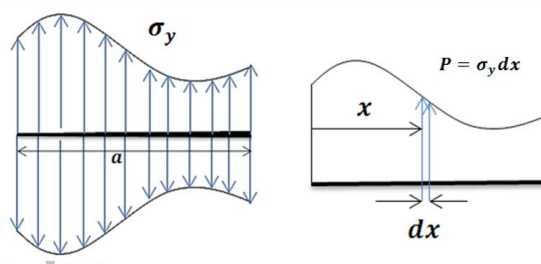
$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \quad F_1 = 0 \quad (14)$$

حل عمومی گوه در مراجع به صورت زیر ارائه شده است [۲۴]:

$$\sigma_{rr} = \frac{2C_1 \cos \theta}{r} + \frac{2C_3 \sin \theta}{r}, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0 \quad (15)$$

حال چنان که بارگذاری و توزیع تنش بر روی ترک دارای تابع  $\sigma_y$  باشد، مطابق با شکل (۴) رابطه (۷) برای آن به صورت زیر نوشته می شود:

$$dK_I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1+F(\frac{x}{a})}{(a^2-x^2)^{1/2}} (\sigma_y dx) a^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$



شکل (۴) توزیع تنش بر روی ترک لبه ای و مفهوم انتگرال گیری در آن

در واقع در این رابطه به جای نیروی متمرکز مقدار  $\sigma_y dx$  قرار داده شده است. از آن جا که توزیع تنش بر روی لبه شامل تعداد زیادی نیروی متمرکزی باشد، از مفهوم انتگرال برای آن استفاده می شود. خواهیم داشت:

$$K_I = \int_0^a \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1+F(\frac{x}{a})}{(a^2-x^2)^{1/2}} (\sigma_y dx) a^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

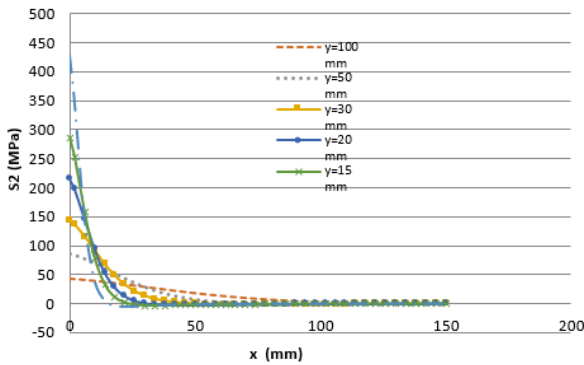
با قرار دادن رابطه توزیع تنش در ورق نیمه محدود در نزدیکی لبه ورق و انتگرال گیری از رابطه (۸) مقدار ضریب شدت تنش به دست خواهد آمد. توجه شود که این حالت هنگامی روی می دهد که ترک نزدیک لبه باشد و اثر عدم یکنواختی تنش بر روی آن وجود خواهد داشت. همچنین، برای تعیین انتگرال در حالت پیچیده می توان از انتگرال گیری عددی استفاده نمود.

برای بررسی صحت رابطه بیان شده در حالت توزیع یکنواخت تنش که در آن بار گسترده یکنواخت با شدت  $\sigma_0$  بر لبه ورق اثر می کند، از رابطه (۱۰) استفاده و ضریب شدت تنش به دست آمده است. در این حالت داریم:

(۲۲)

که در آن  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  به ترتیب تنش در راستاهای طولی و عرضی در ورق می باشند.

با رسم نمودن توزیع تنش طولی در ورق در فاصله های مختلف از لبه بارگذاری شده نمودار شکل (۶) به دست می آید.



شکل (۶) توزیع تنش در مقطع طولی در فاصله های مختلف از لبه بار گذاری شده در ورق حاصل از معادله استخراجی

پس از تعیین توزیع تنش در این ورق، رابطه تنش به دست آمده از معادله (۲۲) را در رابطه (۱۰) جایگزین نموده و مقدار ضریب شدت تنش محاسبه می شود. خواهیم داشت:

$$K_I = \int_0^a \frac{2\sqrt{a} - 1 + F(\frac{x}{a})}{\sqrt{\pi(a^2 - x^2)}} \frac{-8F_2 y^2}{(x^2 + y^2)^2 (\pi^2 - 4)} \left(x - \frac{\pi y}{2}\right) dx \quad (23)$$

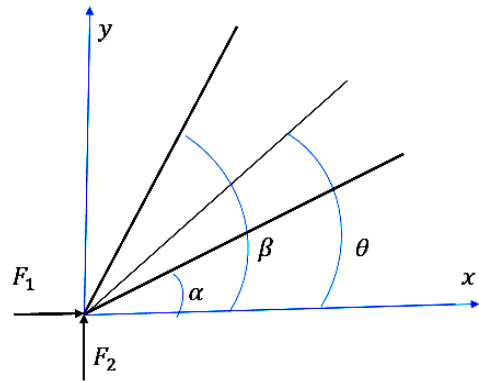
با ساده نمودن این رابطه در نهایت به دست می آید:

$$K_I = \frac{-16P\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}(\pi^2 - 4)} \int_0^a \frac{1 + F(\frac{x}{a})}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)^2 \left(x - \frac{\pi y}{2}\right) dx \quad (24)$$

که در آن داریم:

$$F\left(\frac{x}{a}\right) = [1 - (x/a)^2] \left[ 0.2945 - 0.3912 \left(\frac{x}{a}\right)^2 + 0.7685 \left(\frac{x}{a}\right)^4 - 0.9942 \left(\frac{x}{a}\right)^6 + 0.5094 \left(\frac{x}{a}\right)^8 \right] \quad (25)$$

این مسئله ابتدا برای ورقی به ابعاد ۲۰ در ۱۰ میلیمتر و طول ترکی معادل با ۱۰ میلیمتر حل می شود.



شکل (۵) معرفی پارامترهای مسئله توزیع تنش در ورق نیمه محدود گوه ای شکل [۲۴]

که در آن  $\sigma_{rr}$ ،  $\sigma_{r\theta}$  و  $\sigma_{\theta\theta}$  به ترتیب، تنش در راستای شعاعی، برشی و محیطی می باشند. همچنین  $C_1$ ،  $C_3$  ثوابتی هستند که از روابط زیر به دست می آیند:

$$F_1 + 2 \int_0^{\pi/2} (C_1 \cos\theta + C_3 \sin\theta) \cos\theta d\theta = 0 \quad (16)$$

$$F_2 + 2 \int_0^{\pi/2} (C_1 \cos\theta + C_3 \sin\theta) \sin\theta d\theta = 0 \quad (17)$$

با قرار دادن شرایط مسئله در روابط (۱۶) و (۱۷) مقدار دو ثابت موجود در رابطه استخراج می شوند:

$$\frac{4F_2}{\pi^2 - 4} = C_1 \quad (18)$$

$$\frac{2\pi F_2}{4 - \pi^2} = C_3 \quad (19)$$

با قرار دادن ثابت ها از معادلات (۱۸) و (۱۹) در معادله (۱۵) به دست می آید:

$$\sigma_{rr} = \frac{8F_2 \cos\theta}{r(\pi^2 - 4)} + \frac{4\pi F_2 \sin\theta}{r(4 - \pi^2)} \quad (20)$$

با توجه به روابط تبدیل بین مختصات دکارتی و قطبی، هم چنین رابطه بین تنش در مختصات قطبی و مختصات دکارتی به دست می آید:

$$\sigma_x = \frac{8F_2 x^2}{(x^2 + y^2)^2 (\pi^2 - 4)} \left(x - \frac{y}{2}\right) \quad (21)$$

$$\sigma_y = \frac{-8F_2 y^2}{(x^2 + y^2)^2 (\pi^2 - 4)} \left(x - \frac{\pi y}{2}\right)$$

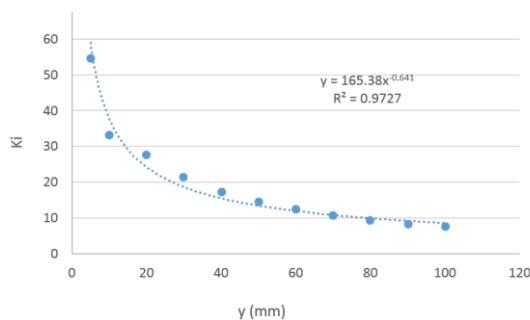
داده شده است. مقدار ضریب شدت تنش تعیین شده در جدول (۱) لیست شده است.

جدول (۱) تغییرات ضریب شدت تنش و مقدار تنش ماکزیمم بر حسب فاصله از لبه بارگذاری شده

تنش در نوک ترک (مگاپاسکال)	KI (MPa(m <sup>1/2</sup> ))	Y(mm)
۴۲/۸	۷/۵۶	۱۰۰
۴۷/۶	۸/۴۹	۹۰
۵۳/۵	۹/۴۷	۸۰
۶۱/۲۴	۱۰/۷۱	۷۰
۷۱/۴۴	۱۲/۳۰۷	۶۰
۸۵/۷۴	۱۴/۴۳	۵۰
۱۰۷/۱۷	۱۷/۳۷	۴۰
۱۴۲/۹	۲۱/۶۱	۳۰
۲۱۴/۳	۲۷/۶۴	۲۰
۴۲۸/۷	۳۳/۱۸۴	۱۰
۸۵۷/۴	۵۴/۶	۵

تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب فاصله را چنان که در شکل (۸) نشان داده شده است، می توان به صورت رابطه

$$K_i = 165.38e^{-0.461y} \quad \text{زیر نمایش داد:} \quad (28)$$

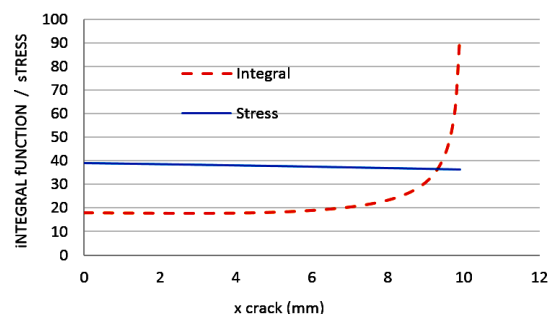


شکل (۸) تغییرات مقدار ضریب شدت تنش با فاصله ترک از لبه بارگذاری شده برای ترک در شرایط ذکر شده

این مقدار برای ترک به طول ۱۰ میلیمتر و نیروی ۲۰۰۰ نیوتن به دست آمده است. می دانیم که ضریب شدت تنش وابسته به طول ترک و مقدار نیرو می باشد. بنابراین رابطه را به صورت بی بعد شده زیر در می آوریم:

$$K_i = 0.033P\sqrt{ae}^{-0.71y} \quad (29)$$

در شکل (۷) تابع معادله (۲۳) و تغییرات آن در طول ترک به همراه توزیع تنش بر روی آن برای ترک به طول ۱۰ میلیمتر، نشان داده شده است.



شکل (۷) توزیع تنش و تابع معادله (۲۳) که باید انتگرال آن گرفته شود ادر مقطع طولی در فاصله های مختلف از لبه بارگذاری شده در ورق حاصل از معادله استخراجی

برای محاسبه این انتگرال طول ترک را به تعداد ۱۰۰ فاصله مساوی تقسیم نموده و مساحت هر قسمت را از روش مستطیل یا دوزنقه محاسبه نموده و نتایج را به هم جمع می نماییم. با این محاسبات برای ترک واقع در مرکز ورق  $y=100$  به دست می آید:

$$K_i = 7.56 \text{ MPa}\sqrt{m} \quad (26)$$

از رابطه تحلیلی نیز برای ترک واقع شده در مرکز ورق به

$$K_i = \frac{P}{B\sqrt{W}} f\left(\frac{a}{W}\right) = 6.748 \quad \text{دست می آید:} \quad (27)$$

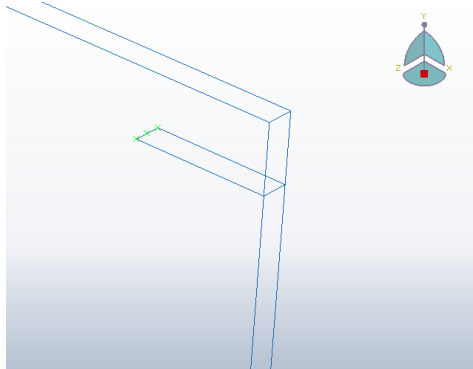
$$K_i = 7.56 \text{ MPa}\sqrt{m}$$

دیده می شود که این تکنیک در محاسبه ضریب شدت تنش برای ترک کناری واقع در مرکز ورق دارای خطایی در حدود ۱۲ درصد می باشد. علت وجود این خطای نسبی این است که رابطه توزیع تنش استخراج شده از مسئله گوه خطا دارد. اما چنان که بعداً خواهیم دید شبیه سازی نتایج دقیق تری را ارائه می دهد.

بعد از این صحت سنجی نسبی از روش پیشنهادی و روابط استخراجی، در این مرحله از این روش برای تعیین ضریب شدت تنش در فاصله های دیگر برای ورق مورد بررسی با طول ترک ۱۰ میلیمتر و نیروی اعمالی برابر با مقدار ۲۰۰۰ نیوتن، استفاده و تغییرات آن مورد بررسی قرار



مورد نظر مقدار ضریب شدت تنش به دست آمده است. با رسم تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب فاصله از لبه بار گذاری شده در نهایت یک رابطه پیشنهاد شده است. در شکل (۹) روش ایجاد ترک در فاصله ۵ میلیمتری لبه نشان داده شده است.



شکل (۹) روش ایجاد ترک در فاصله ۵ میلیمتری لبه

در این شبیه سازی ها تعداد ۲۴۰۰ المان با کد C3D8R<sup>۱</sup> استفاده شده است. برای ترک به طول ۱۰ میلیمتر ۱۰ گره بر روی خط ترک ایجاد شده و برای طول ترک ۲۰ میلیمتر تعداد ۲۰ المان. در حقیقت تعداد المان ها بر روی خط ترک به صورتی انتخاب شده است که طول هر المان برابر با مقدار ۱ میلیمتر باشد. برای طول ترک ۱۰ میلیمتر و نیروی ۲۰۰۰ نیوتن مقادیر به دست آمده از شبیه سازی در جدول (۳) لیست شده است.

در مرحله بعدی، بعد از انجام تعدادی شبیه سازی برای طول ترک های مختلف و نیروی های متعدد، دیده شد که مقدار ضریب شدت تنش با مجذور طول ترک و نیروی اعمالی نسبت دارد. این نسبت را در روابط تحلیلی ضریب شدت تنش هم می توان دید. بنابراین مقادیر به دست آمده بر در هر حالت بر مقدار نیرو و مجذور طول ترک در همان حالت تقسیم شده و در نهایت رابطه بی بعد زیر برای تمامی شبیه سازی ها به دست آمد:

اکنون با استفاده از تکنیک و رابطه معرفی شده، و با برنامه نویسی شرح داده شده محاسبات مشابه برای طول ترک ها و نیرو های مختلف مقدار ضریب شدت تنش را انجام و نتایج و مقدار خطای موجود با رابطه پیشنهادی مقایسه شده است. این مقایسه نشان دهنده صحت و جامعیت رابطه پیشنهادی است. نتایج این محاسبات در جدول (۲) ارائه شده است.

جدول (۳) ضریب شدت تنش به دست آمده از روش پیشنهادی و رابطه پوش داده شده پیشنهادی و مقدار خطای موجود

r	P N	a mm	y mm	KI Propo sed	KI Power function	% Err
۱	۲۰۰۰	۱۰	۱۰۰	۷/۷۵	۷/۹۳	-۲/۳۸
۲	۱۰۰۰	۱۰	۵۰	۷/۲۷	۶/۴۹	۱۰/۷۳
۳	۵۰۰	۱۰	۵۰	۳/۸۴	۳/۲۴	۱۵/۴۹
۴	۲۰۰۰	۲۰	۱۰۰	۱۳/۰۱	۱۱/۲۲	۱۳/۷۴
۵	۲۰۰۰	۲۰	۶۰	۱۸/۹۹	۱۶/۱۲	۱۵/۰۷
۶	۲۰۰۰	۲۰	۲۰	۲۸/۲۴	۳۵/۱۸	-۲۴/۵۸
۷	۲۰۰۰	۲۵	۵۰	۱۸/۷۶	۲۰/۵۲	-۳/۳۹
۸	۲۰۰۰	۱۰	۲۰	۲۸/۸	۲۴/۸۷	۱۳/۶۱
۹	۱۰۰۰	۵	۱۰	۱۶/۷۶	۱۴/۳۸	۱۴/۱۵

## ۲- شبیه سازی اجزای محدود

برای شبیه سازی ترک و تعیین ضریب شدت تنش از نرم افزار آباکوس استفاده شده است. این نرم افزار امکانات ویژه ای برای تحلیل تنش دارا می باشد.

با در نظر گرفتن ترک در مرکز ورق و تعیین ضریب شدت تنش، روش شبیه سازی از نظر تعداد المان ها و روش به کار گرفته شده صحت سنجی شده است. با در نظر گرفتن نمونه مورد بررسی به صورتی که در شکل نشان داده شده است و ترکی به طول ۱۰ میلیمتر و نیروی اعمالی برابر با مقدار ۲۰۰۰ نیوتن ضریب شدت تنش برای ترک مرکزی برابر با مقدار ۶/۰۴۹ به دست می آید. با مقایسه این مقدار با مقدار حاصل از رابطه تحلیلی مقدار خطایی در حدود ۱۰ درصد را نشان می دهد. این مقدار خطا نشان دهنده درستی نتایج شبیه سازی می باشد.

در مرحله بعد، با تغییر مکان ترک و نزدیک نمودن آن به لبه بار گذاری شده برای هر طول ترک و نیروی اعمالی

۳- نتیجه گیری و بحث:

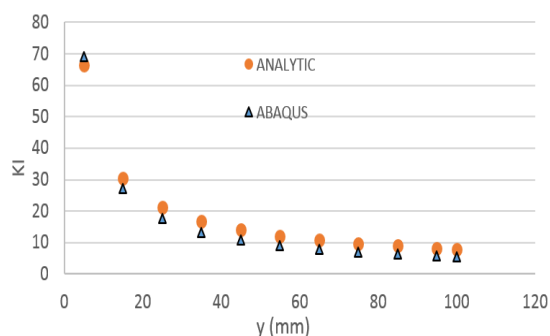
چنان که هدف این تحقیق بود، تغییرات مقدار ضریب شدت تنش با نزدیک شدن ترک به لبه بار گذاری شده در حالت اعمال نیروی متمرکز در لبه ورق توسط دو روش تحلیلی و شبیه سازی به دست آورده شد. نتایج شبیه سازی و تحلیلی تقریبا به هم نزدیک می باشند البته در هر دو روش سعی شده است نتایج با استفاده از یک تابع نمایی تقریب زده شود. در جدول (۵) ثابت های معادله به دست آمده از این دو روش به همراه هم نشان داده شده است.

جدول (۵) تغییرات ضریب شدت تنش در فواصل مختلف ترک از لبه بار گذاری شده

روش	A	B
شبیه سازی	۰/۰۴۳	۰/۸۵-
حل تحلیلی	۰/۰۳۳	۰/۷۱-

$$K_I = A \cdot y^B$$

با رسم منحنی تغییرات ضریب شدت تنش حاصل از دو روش به صورتی که در شکل (۱۱) نمایش داده شده است بهتر می توان در خصوص تفاوت این دو روش و داده های حاصله قضاوت نمود.



شکل (۱۱) رسم منحنی تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب فاصله از لبه بار گذاری شده حاصل از دو روش مورد بررسی

چنان که از داده های به دست آمده از نمودار شکل (۱۱) نیز دیده می شود، تفاوت حاصله بسیار اندک می باشد. می توان نتایج زیر را استخراج نمود:

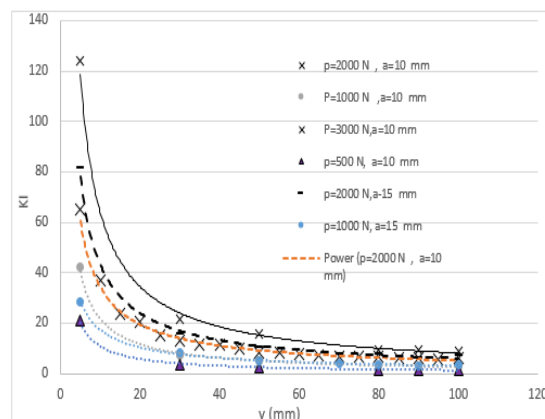
جدول (۳) تغییرات ضریب شدت تنش در فواصل مختلف ترک از لبه بار گذاری شده

تنش در نوک ترک (مگاپاسکال)	تنش در نوک ترک (مگاپاسکال)	y (mm)	y (mm)	KI (مگاپاسکال)	KI (مگاپاسکال)
۹۲	۶۶	۵۰	۱۰۰	۸/۵۴	۶/۰۵
۹۶	۷۸	۴۵	۹۵	۹/۹۴	۵/۸۱
۱۰۰	۷۰	۴۰	۹۰	۱۱/۳۴	۶/۱۶
۱۳۰	۷۴	۳۵	۸۵	۱۱/۴۹	۶/۱۴
۱۴۵	۷۵	۳۰	۸۰	۱۲/۹۲	۶/۱۳
۱۵۵	۷۵	۲۵	۷۵	۱۵/۲۸	۶/۶۶
۲۱۰	۷۵	۲۰	۷۰	۲۰/۴۰	۶/۶۲
۲۷۰	۷۹	۱۵	۶۵	۲۳/۸۵	۷/۱۱
۳۵۰	۸۳	۱۰	۶۰	۳۶/۹۶	۷/۶۰
۱۰۰۰	۸۷/۵	۵	۵۵	۶۵/۰۴	۸/۰۷

$$K_i = 0.043P\sqrt{ae}^{-0.86y} \quad (۳۰)$$

رابطه ارائه شده توسط معادله (۳۰) نتایج شبیه سازی را با خطای ماکزیمم ۱۵/۶ درصد پوش می دهد. این مقدار با شبیه سازی حالت های مختلف و تعیین ضریب شدت تنش با استفاده از شبیه سازی و معادله (۳۰) و محاسبه خطای حاصله به دست آمده است.

در شکل (۱۰) تغییرات ضریب شدت تنش در حالت های مختلف طول ترک و نیروی وارد بر حسب فاصله از لبه ورق یا نیروی متمرکز وارد شده، نشان داده شده است.



شکل (۱۰) تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب فاصله از لبه بار گذاری حاصل از شبیه سازی

جدول (۶) ضریب شدت تنش حاصل از رابطه پیشنهادی و شبیه سازی و درصد خطای موجود

No	a mm	P N	y mm	KI ABAQUS	KI POWER F.	% ERR
۱	۱۰	۲۰۰۰	۱۰۰	۶/۰۵	۵/۴۴	۹/۹۶
۲	۱۰	۲۰۰۰	۵۰	۸/۷۴	۹/۸۱	۱۲/۲۴
۳	۱۰	۲۰۰۰	۵	۶۵/۰۴	۶۹/۳۳	۶/۶
۴	۱۰	۳۰۰۰	۵۰	۱۵/۶۷	۱۴/۷۲	۶/۰۴
۵	۱۰	۱۰۰۰	۵	۴۰/۱۲	۳۴/۶۶	۱۳/۶
۶	۱۰	۵۰۰	۳۰	۳/۶۶	۳/۷۸	۳/۲
۷	۱۵	۲۰۰۰	۵۰	۱۰/۸۹	۱۲/۰۱	۱۰/۳
۸	۱۵	۱۰۰۰	۳۰	۸/۳۵	۹/۲۷	۱۰/۹۴
۹	۵	۲۰۰۰	۵	۵۶/۲۱	۴۹/۰۲	۱۲/۷۸

#### ۵- فهرست علائم

a	طول ترک
P	نیروی وارد بر ورق
W	پهنای ورق
B	ضخامت ورق
y	فاصله ترک از لبه بارگذاری شده
KI	ضریب شدت تنش
$\sigma_y$	تنش عمودی
$\sigma_x$	تنش افقی

#### مراجع

- [1] Da Vincil. L., Fracture Mechanic, *Biblioteca Ambrosiana*, 1894, Vol. 54.
- [2] Galilei G., *Dialogues concerning two new sciences*, Evanston, University of Illinois Press, pp. 35-78.
- [3] Griffith A.A., The phenomena of Ruture and Flow In Solid, *Phil Trans. Royal Soc.*, 221, 1921, pp. 163-167.
- [4] Anderson T.L, Fracture Mechanics, CRC Press 1994.
- [5] Inglis C.E., Stresses In A Plate Due To The Presence Of Cracks And Sharp Corners,

۱- ضرایب به دست آمده از شبیه سازی برای نقاط دور از لبه بار گذاری شده مقادیر کمتری را نتیجه می دهند در صورتی که مقادیر به دست آمده از تحلیل برای نقاط دور از لبه مقادیری بیشتر را نشان می دهد.

۲- در نقاط بسیار نزدیک به لبه بار گذاری شده (۵ میلیمتر و نزدیک تر) شبیه سازی مقادیر بیشتری را نتیجه می دهد.

۳- با توجه به این که شبیه سازی به درستی انجام شده است و روش شبیه سازی صحت سنجی شد و همچنین، همگرایی مسئله مورد تایید قرار گرفته است، نتایج حاصل از شبیه سازی اعتبار بیشتری دارد.

۴- روش تحلیلی با توجه به تقریبی بودن تابع توزیع تنش، مقداری خطا دارد اما نزدیکی داده های حاصل از این روش نشان دهنده این است که اعداد و ارقام به دست آمده از شبیه سازی قابل استناد می باشد.

بنابراین، می توان تابع زیر را برای تعیین ضریب شدت تنش در ترک های غیر مرکزی در ترک های لبه ای و کناری، برای این نوع مسائل با اطمینان ارائه داد:

$$K_I = 0.043P\sqrt{ae}^{-0.86y} \quad (31)$$

که در آن نیرو و طول ترک بر حسب میلیمتر قرار داده می شوند. چنان که برای حالت های مختلف بار گذاری و طول ترک، با استفاده از شبیه سازی و رابطه پیشنهادی مقادیر را تعیین نماییم جدولی مطابق با جدول (۶) به دست می آید. این جدول درصد خطای حاصل از رابطه پیشنهادی و شبیه سازی را ارائه می دهد.

چنان که دیده می شود، خطای موجود در بدترین حالت برابر با مقدار ۱۳ درصد می باشد. این خطا در حقیقت تفاوتی است که میان رابطه نهایی پیشنهادی (معادله (۳۱)) و شبیه سازی روی داده است.

- meshing, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 46, 1999, pp.131-150.
- [21] Hang N., Sukumar N., Prevosl J.H., Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part II: Numerical application, *International Journal of Solid And Structure*, Vol. 40, 2003, pp.7539-7552.
- [22] Retore J., Gravoult A., Morestin F., Combescure A., Estimation of mixed-mode stress intensity factors using digital image correlation and an interaction integral, *International Journal of Fracture*, Vol. 132, pp. 65-79.
- [23] Perez N., *Fracture Mechanic*, Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [24] Sadd H.R., *Theory of Elasticity*, Kingstone, 2005.
- Transactions of The Institute of Naval Architects*, Vol. 55, 1913, pp. 219-241.
- [6] Irwin G.R., *Fracture Dynamics, fracture of metals*, American society for metals, Cleveland, 1948, pp. 147-166.
- [7] Orowan E., *Fracture of solids, reports on progress in physics*, Vol. 7, 1948, pp.185-232.
- [8] Mott N.F., *Fracture of Metals: Theoretical Considerations*, *Engineering*, Vol. 165, 1948, pp.16-18.
- [9] Irwin G.E., Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminum alloys, *sagamore research conference proceeding*, Vol. 2, 1956, pp. 289-305.
- [10] Westergaard H.M., Bearing pressures and cracks, *journal of applied mechanics*, Vol. 6, 1939, pp. 49-53.
- [11] Irwin G.R., *Fracture Dynamics, fracture of metals*, American society for metals, 1948, pp.147-166.
- [12] Williams M.L., on the stress distribution at the base of a stationary crack, *journal of applied mechanics*, 24, 1957, pp.109-114.
- [13] Wells A.A., The condition of fast fracture in aluminum alloys with particular reference to comet failures, *British welding research association report*, April 1955, pp. 76.
- [14] Winne D.H., Wundt B.M. Application of the Griffith-Irwin theory of crack propagation to the bursting behavior of disks, including analytical and experimental studies, *Transactions of the American society of mechanical engineers*, Vol. 80, 1958, pp. 1643-1655.
- [15] Paris P.C., A rational analytic theory of fatigue”, *the trend in engineering*, Vol. 13, 1961, pp. 9-14.
- [16] Wells A.A., Unstable crack propagation in metals: cleavage and fast fracture. *Proc Crack Propagation Symposium*, Vol. 1, 1961, pp. 84.
- [17] Rice JR, Rosengren GF, Plane strain deformation near a crack tip in a power law hardening materials. *Journal of Mechanical Physic Solids*, Vol. 16, 1968, pp. 1–12.
- [18] Oliver J., Continuum Modeling of Strong Discontinuities in Mechanics, *International journal for numerical methods in engineering* Vol. 17, 1995, pp. 49-61.
- [19] Rashid MM., The Arbitrary local mesh refinement method, *An computer method in applied Mechanics and Engineering*, Vol. 5, 1995, pp.45-58.
- [20] Moes N., Dolbow J., Belytschko T., A finite element method for crack growth without re-

