فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار

شماره سی و هفتم / زمستان ۱۳۹۷

انتخاب سبد سهام چند دوره ای با استفاده از گشتاورهای مرتبه بالاتر

رضا تهرانی[۱]
سعید فلاح پور[۲]
محمدرضا رستمی[۳]
مهدی بیگلری کامی[۴]

تاریخ دریافت مقاله :۹۶/۱۲/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله :۹۷/۰۱/۰۷

چکیده :

سرمایه گذاری به عنوان یک تصمیم مالی همواره دارای دو مؤلفه ریسک و بازده بوده است که مبادله میان این دو ترکیب های گوناگون سرمایه گذاری را بوجود می آورد. تمامی تصمیمات سرمایه گذاری براساس روابط میان ریسک و بازده صورت می گیرد.

در این پژوهش سعی شده است از مدلی است برای انتخاب چند دوره ای سبد سهام استفاده شود تا بیشترین مطلوبیت را نصیب سرمایه گذاران نماید. در مدل پیشنهادی علاوه بر واریانس ازگشتاور مرتبه سوم نیز برای بهینه سازی استفاده شده است. دراین تحقیق با استفاده از داده های بازده ۵۰ شرکت بزرگ بورس اوراق بهادار تهران از لحاظ ارزش بازاری از سال های ۱۳۸۶ تا ۱۳۹۵ کوشیده است تا با در نظر گرفتن چولگی و هزینه معاملات در طی چند دوره بتواند مدلی ارائه نماید تا با مینیمم سازی واریانس تابع مطلوبیت سرمایه گذار میزان تخصیص بهینه هر دارایی را مشخص نماید.

خروجی مدل پیشنهادی با خروجی مدل مارکویتز و همچنین مدل ساده **1/N** با در نظر گرفتن ترجیحات متفاوت سرمایه گذار، توسط ابزارهای مختلف پیشنهادی ارزیابی عملکرد پرتفو، مورد مقایسه قرار گرفته شده است. نتایج بدست آمده نشان می دهد که مدل پیشنهادی نسبت به مدل های مذکور عملکرد بهتری از خود نشان داده است.

کلمات کلیدی :

انتخاب پرتفو، بهینه سازی ، چولگی، نسبت شارپ

طبقه بندی: **M20**

[۱] استاد، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران ، تهران، ایران - rtehrani@ut.ac.ir
[۲] استادیار دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران ، تهران، ایران - falahpor@ut.ac.ir
[۳] استادیار، دانشکده علوم اجتماعی، دانشگاه الزهرا، تهران، ایران - m.rostami@alzahra.ac.ir
[۴] دانشجوی دکتری مدیریت مالی، دانشگاه تهران، پردیس البرز،(نویسنده مسئول) mehdi.biglari.kami@gmail.com

۱- مقدمه :

سرمایه گذاری به عنوان یک تصمیم مالی همواره دارای دو مؤلفه ریسک و بازده بوده است که مبادله میان این دو ترکیب های گوناگون سرمایه گذاری را بوجود می آورد. سرمایه گذاران از یک طرف به دنبال بیشینه کردن عایدی خود از سرمایه گذاری هستند و از طرف دیگر، با شرایط عدم اطمینان حاکم بر بازارهای مالی مواجه اندکه عامل اخیر دستیابی به عواید سرمایه گذاری را با عدم اطمینان روبرو می سازد.

سرمایه گذارانی که علاقه مند به کسب سود بیشتر و کاهش ریسک سرمایه گذاری های خود هستند می کوشند با تشکیل سبدهای متنوع شده ریسک خود را کاهش داده یا در سطح معینی از ریسک، بیشترین بازده را کسب نمایند. ریسک و بازده دارایی های سرمایه گذاری ، بعنوان دو عنصر مهم در تصمیم گیری سرمایه گذاران بوده و اغلب در تقابل می باشند . بنابراین سرمایه گذاران بر حسب شرایط، باید دارایی هایی با بازدهی بالا و ریسک بالا بپذیرند و یا جهت اطمینان خاطر ، دارایی هایی با ریسک پایین تر انتخاب نمایند که در اینصورت به سطح کمتری از بازدهی نیز اکتفا خواهند کرد. از آنجا که، ترکیب سهام دارایی ها و تشکیل سبدی از آنها می تواند در کاهش ریسک و افزایش بازده موثر واقع شود، بنابراین سرمایه گذاران به تشکیل سبد بهینه روی آوردند.

هدف این تحقیق این می باشد که مدلی را پیشنهاد دهد که با در نظر گرفتن گشتاورهای مرتبه بالاتر و هزینه معاملات و لحاظ نمودن چند دوره ای بودن بهینه سازی، نتایج بهتری را نسبت به مدل مارکویتز و مدل ساده ارائه نماید. در این راستا با معیارهای و سنجه های مختلف به این سوال پاسخ خواهد داد که آیا مدل پیشنهادی از مدل مارکویتز و مدل ساده، کاراتر و بهینه تر می باشد.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه تحقیق :

در اوایل دهه ۱۹۵۰ هری مارکویتز ، مدل پایه پرتفولیو را بنیان نهاد . او بطور کمی نشان داد که چرا و چگونه ، پرگونه سازی سبد دارایی های سرمایه گذاری ، ریسک آن را برای سرمایه گذار کاهش می دهد . مارکویتز مفهوم پرتفولیوی کارا را معرفی نموده ، منظور از پرتفولیوی کارا ، سبدی از دارایی های مالی است که کمترین ریسک را برای یک سطح بازده و یا بیشترین بازده را برای یک سطح ریسک داشته باشد .(مارکویتز[1] ۱۹۵۲)

بر اساس مقاله های (لیلند ۱۹۹۹) بیان می شود که تئوری میانگین _ واریانس مارکویتز در مورد انتخاب سبد دارایی های مالی را نمی توان پذیرفت ، مگر آنکه فرایند بازده دارایی های مالی از توزیع نرمال پیروی کند و یا تابع مطلوبیت سرمایه گذار درجه دوم باشد و این معادل است با این مطلب که

پارامترهایی علاوه بر میانگین و واریانس مانند چولگی در تصمیم سرمایه گذار در انتخاب سبد بهینه سرمایه گذاری تحت شرایط عدم اطمینان تاثیری ندارند. مطالعاتی که در زمینه توزیع بازده دارایی های مالی در بازار سرمایه انجام شده است ، اجماع عمومی حاکی از آن است که توزیع نرمال برای نمایش بازده دارایی های مالی بخصوص در دوره های کوتاه مدت ، مناسب نیست و عدم تقارن نسبت به میانگین در بازده دارایی های مالی مشاهده می شود.(کمبل و هنسکل[۲] ۱۹۹۲)

با ادامه مطالعات محققان در زمینه بازده دارایی های مالی ، در (پراکش و دبویری[۳] ۲۰۰۱) نشان می دهند که توزیع بازده دارایی های مالی متقارن نیست و در (هاروی و سیدیکو[۴] ۱۹۹۹) با بیان تاثیر چولگی در تصمیم سرمایه گذار برای انتخاب سبد سرمایه گذاری ، فرضیه تابع مطلوبیت درجه دوم برای سرمایه گذار را رد کرده و آن را تابع توانی دانسته اند . علاوه بر این در (گری و فرنچ ۱۹۹۰) بررسی هایی بر روی بازده دارایی های مالی انجام شده است و هر یک توزیع های آماری مختلفی را برای تغییر قیمت دارایی های مالی ارائه نمودند. اکثر آنها توزیع **t** استیودنت و توزیع های ترکیبی را مناسب می دانند . با توجه به اینکه هم نرمال بودن توزیع دارایی های مالی و هم تابع مطلوبیت درجه دوم در این تحقیقات رد می شود، پس نمی توان مدل مارکویتز را در انتخاب سبد سهام پذیرفت.

با رد شدن توزیع نرمال برای توزیع دارایی های مالی، با تحقیقات در این زمینه ، به تاثیر چولگی بر روی بازده دارایی های مالی پی بردند و نشان دادند که سرمایه گذاران ، دارایی هایی که چولگی دارند را در تهیه سبد سرمایه گذاری ترجیح می دهند. در (چوناچیندا و دانداپینک[۵] ۱۹۹۷) با بررسی چولگی در چهارده بازار جهانی نشان می دهد که اغلب سرمایه گذارانی که بازده اضافی کسب می کنند ، بخاطر دارایی هایی است که چولگی دارند ، بطوری که با در نظر گرفتن چولگی در تصمیم گیری سرمایه گذار، تغییرات عمده ای را در بازده حاصل از سبد موجب می شود . با تحقیقات بیشتری که در زمینه چولگی در(مورالیدهار[۶] ۱۹۹۳) انجام شد ، نشان داده اند که بازده دارایی های مالی معمولا دارای چولگی مثبت می باشد ، اما نتوانستند درباره ی توزیع بازده سبد دارایی های مالی ، چنین نتیجه ای را نشان دهند تا بتوانند از آن در تهیه سبد استفاده نمایند.

همچنین در(پراکش و چانگ[۷] ۲۰۰۳) با تحقیق بر روی بازارهای امریکا و اروپا نشان می دهد که اگر چولگی را در تهیه سبد سرمایه گذاری در نظر بگیریم ، تغییرات عمده ای در نتایج بازده سبد ایجاد می شود . لذا نباید در تشکیل سبد ، از چولگی صرف نظر نمود. اگرچه محققان زیادی در مورد تاثیر چولگی و یا به عبارتی عدم تقارن در توزیع دارایی های مالی در تشکیل سبد دلایلی را ارائه می دهند، اما در (آمادو[۸] ۱۹۹۸) با مطالعه در هشت بازار بین المللی نشان می دهد که اگر تابع توزیع دارایی ها

نرمال در نظر گرفته شود ، آنگاه در اکثر بازارها عدم تقارن دارایی های مالی را مشاهده می کنیم ، یعنی تعداد مشاهدات بیشتر از میانگین با مشاهدات کمتر از میانگین مساوی نیستند . (جابست و زینوس[۹] ۲۰۰۱) در تحقیقی نشان دادند مدل میانگین واریانس تنها برای ماکزیمم کردن مطلوبیت مورد انتظاری مناسب می باشد که تابع مطلوبیت به صورت کوادراتیک باشد در حالیکه بسیاری از توزیع بازده دم کلفت می باشد و فقط با میانگین و واریانس قابل توضیح نمی باشد.

در سال ۲۰۰۵، والتر بریک، کریستین کرستنزو اکتاو جوکونگ[۱۰] نیز از مدل میانگین- واریانس- چولگی برای اندازه‌گیری عملکرد سبد اوراق بهادار استفاده کردند. این سه محقق از مدل دوگانه[۱۱] برای ارزیابی عملکرد سبد اوراق بهادار بهره جستند. نتایج این تحقیق نیزمدل فوق را برای ارزیابی عملکرد اوراق بهادار تایید کرد.

بسیاری از تحقیقات(هاروی و سیدیکو[۱۲] ۲۰۰۰ و جوندیو و راکینگر[۱۳] ۲۰۰۳) نشان دادند که چولگی به عنوان عامل مهمی برای فرآیند انتخاب سبد سهام می باشد. (گارلینو و پدرسون ۲۰۱۳) با استفاده از تابع مطلوبیت با مرتبه دو، چارچوب چند دوره ای به انتخاب سبد بهینه سهام پرداختند و فرض کردند که تغییرات قیمت قابل پیش بینی می باشد. (هاروی و همکاران[۱۴] ۲۰۰۴) با استفاده از گشتاور های مرتبه بالا همانند کشیدگی و چولگی مدل میانگین واریانس را توسعه دادند و از بسط مرحله چهارم تیلور استفاده نمودند. (دی میگوئل و همکاران[۱۵] ۲۰۱۲) از نسبت بازده معادل اطمینان و نسبت شارپ برای ارزیابی عملکرد استراتژی های انتخاب پرتفو استفاده نمودند. (دی میگوئل و همکاران۲۰۱۳) نیز در محاسبات بیشینه سازی مطلوبیت از هزینه معاملات استفاده نمودند و هزینه معاملات را متناسب با ارزش معاملات در نظر گرفته اند و همچنین تغییرات قیمت از توزیع تصادفی مستقل تبعیت می کند.

عده ای از محققان ، جهت کاهش هزینه معاملات و رفع مشکلات ، به مسئله محدود نمودن تعداد دارایی های مالی در سبد پرداخته اند. بعنوان مثال در(سن کاران[۱۶] ۱۹۹۸) برای انتخاب سبد سرمایه گذاری ، سبد هایی را با تعداد دارایی محدود ، جهت کاهش هزینه معاملات ، در نظر می گیرد . طبق اصل پارتو همواره تعداد اندکی از دارایی های مالی ، حداکثر تاثیر را در افزایش بازده سبد دارند . در (جاکوب[۱۷] ۱۹۷۴) نشان می دهد که تعداد ۱۰-۸ دارایی مالی در سبد برای پرگونه سازی کافی بنظر می رسد و اضافه نمودن تعداد دارایی بیشتر در سبد سرمایه گذاری ، تاثیر چندانی در کاهش ریسک سبد ندارد . همچنین در (ریلی[۱۸] ۲۰۰۳) با ابراز تاثیر هزینه معاملات در سبد بیان می کند که با پرگونه سازی سبد در حدود ۱۸تا ۱۵ دارایی، ریسک سبد تا ۹۰٪ کاهش می یابد .

عده ای از محققان با مطالعه در زمینه پرگونه سازی سبد با تعداد دارایی زیاد ، مشاهده نمودند که دارایی هایی که تاثیر فوق العاده در سبد دارند ، تاثیر آنها کمرنگ می شود. لذا الگوریتمهای کارای مختلفی را برای این مسئله تحت فرضیاتی نظیر مشابه بودن ضرایب همبستگی برای همه دارایی ها و یا هزینه های معامله ثابت ارائه نمودند (فالند[19] ۱۹۷۴). در ضمن (التون و گرابر[20] ۱۹۹۵) نشان می دهد که چگونه می توان میانگین ضرایب همبستگی بین دارایی ها را بعنوان تخمینی کارا در روش انتخاب سبد استفاده نمود .

تمرکز اصلی تئوری نوین پرتفو روی چارچوب میانگین واریانس با فرض اینکه سرمایه گذار عقلایی تصمیم می گیرد و تابع مطلوبیت نیز کوادراتیک است، می باشد. (مرتون[21] ۱۹۶۹) و (کمپل و ویکرا[22] ۲۰۰۲) در پژوهشهایی تاکید کردند که سرمایه گذار عقلایی انتخاب سبد سهامش را بر مبنای چارچوب تک دوره ای انجام می دهد. اما(گرینولد[23] ۲۰۰۶) و (انگل و فرستنبرگ[24] ۲۰۰۷) در پژوهش هایشان به این نتیجه رسیدند که اغلب سرمایه گذاران عقلایی دوره های بیشتری را در نظر می گیرند و در تصمیم گیری برای انتخاب سبد سرمایه گذاری از چارچوب چند دوره ای استفاده می کنند.

سرمایه‌گذاری به روش پویا در مقایسه با روش ایستا پیچیده‌تر و توسعه‌یافته‌تر می‌باشد و در تحقیقات اخیر عمدتا از روش پویا در مدل‌سازی تابع هدف مساله استفاده شده است اگرچه برخی از تحقیقات از روش ایستا بهره گرفته‌اند. (بات و دنگ[25] ۲۰۱۲) از روش ایستا در اتخاذ تصمیمات سرمایه‌گذاری استفاده نمودند. (آنتولین و همکاران[26] ۲۰۱۰) امکان تغییر سرمایه‌گذاری طی زمان را فراهم آوردند اما از یک فرمول از پیش تعریف شده برای دوره شروع استفاده نموده و از نمودار توام بازده و ریسک استفاده نمودند.

در این پژوهش نیز مدلی ارائه می شود که از اکثر پارامترهایی که در پیشینه تحقیق بیان شده است استفاده می کند تا مدل از جامعیت مطلوب برخوردار شود. در این راستا از مدل چند دوره ای استفاده شده است که هزینه معاملات را در نظر می گیرد و از آن مهمتر، چولگی به عنوان یک پارامتر تاثیر گذار لحاظ گردیده است.بعد از نهایی شدن مدل، این مدل نیز توسط برنامه ریزی پویا حل شده است.

گارلینو و پدرسون در سال ۲۰۱۳ بر روی انتخاب چند دوره ای سبد سهام تحقیق نمودند و هزینه معاملات را نیز در نظر گرفته اند. در این مقاله از گشتاور مرتبه سوم نیز علاوه بر میانگین و واریانس استفاده شده است. در این تحقیق نیز از فرمول تابع مطلوبیت این تحقیق استفاده شده است.

۳- روش شناسی تحقیق :

در این قسمت به فرضیات پژوهش و سه روش بهینه سازی سبد سهام مورد استفاده در این پژوهش اشاره خواهد شد و هرکدام از مدل ها به طور مناسب تشریح خواهد شد و همچنین به ابزارهای مورد استفاده برای ارزیابی عملکرد این روش ها نیز اشاره خواهد شد.

۳-۱. فرضیات پژوهش :

فرضیه اصلی این تحقیق این است که مدل پیشنهادی که پارامتر چولگی را علاوه بر واریانس در نظر گرفته است در انتخاب سبد بهینه سهام چند دوره ای نتایج بهتری نسبت به مدل مارکویتز و مدل ساده می دهد.

۳-۲. پرتفوی متنوع با وزن های مساوی از سهام :

پرتفوی متنوع با وزن های برابر با قانون **1/N** اشاره می کند. این به این معنی می باشد که فرمولی مشخص می شود که وزن هر دارایی در پرتفوی با دارایی دیگر برابر باشد.

اگر چه این روش، راه آسانی برای محاسبه وزن هر دارایی در پرتفو به نظر می رسد ولی با توجه به تغییر مداوم قیمت ها و تغییر در ارزش دارایی نیاز به محاسبه دوباره میزان تخصیص در پرتفو خواهید شد تا پرتفویی با وزن برابر تشکیل شود.

۳-۳. مدل مارکویتز(میانگین- واریانس) :

در مدل مارکویتز دارایی ها با مشخصه های میانگین بازده دارایی ها و ریسک آنها تعریف می شوند . مارکویتز در تحلیل سبد سرمایه گذاری ، بازده منتظره یک سبد را بصورت میانگین موزون بازده دارایی های منفرد بیان می کند که بدین صورت محاسبه می شود :

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} W_i * E(R_i)$$

$$E(R_i) = \sum_{j=1}^{m} p_j (PR_j)$$

بطوریکه :

$E(R_p)$ - بازده منتظره سبد دارایی های مالی

PR_j - نرخ بازده دارایی i در دوره j

P_j - احتمال وقوع نرخ بازده دارایی PR_j

W_i - نسبت مبلغ سرمایه گذاری در دارایی i

$E(R_i)$ - بازده منتظره دارایی i

n - تعداد دارایی های مختلف

m - تعداد دوره

مشخصه دیگر مدل پایه سبد سرمایه گذاری ، عبارتست از ریسک سبد دارایی ها ؛ در مدل مارکویتز، ریسک سبد سرمایه گذاری با واریانس بازده سبد اندازه گرفته می شود . ریسک سبد دارایی های مالی، تابع ریسک دارایی های منفرد و کوواریانس بین بازده دارایی های منفرد است . ریسک سبد بر حسب واریانس به صورت زیر بیان می شود :

$$VAR(R_P) = \sum_{i=1}^{n} W_i{}^2 VAR(R_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, i \neq j}^{n} W_i W_j COV(R_i, R_j)$$

بطوریکه:

$VAR(R_P)$ - واریانس بازده سبد دارایی ها

$VAR(R_i)$ - واریانس بازده دارایی i

$COV(R_i, R_j)$ - کوواریانس بین بازده های i و j

W_i - نسبت مبلغ سرمایه گذاری در دارایی i

با تعریف بازده و ریسک سبد دارایی های مالی ، حال می توانیم سبد های کارای مدل مارکویتز را بدین صورت بدست آوریم ؛ به ازای بازده معین ، ترکیب های مختلف از دارایی ها که بازده مدنظر سبد را تولید می کنند ، ترکیبی که کمترین ریسک را دارد ، بعنوان سبد کارا انتخاب می شود . بدین ترتیب به ازای بازده های مختلف ، سبدهای کارای مختلفی را بدست می آوریم ، به مجموعه این سبدهای کارا، مجموعه کارا نامند که بر اساس مدل مارکویتز بدست می آیند .

به صورت کلی مدل میانگین- واریانس به صورت زیر تعریف می شود:

$$\min_{w} \; w'\Sigma w$$
$$s.t: \; w'\mu \geq \mu_0$$
$$w'\iota = 1, \;\; \iota' = [1,1,...,1]$$

$w = (w_1, w_2, ..., w_n)'$ بردار وزن دارایی های ریسکی

Σ ماتریس کواریانس دارایی ها

$\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_N)'$ بردار بازده مورد انتظار

تابع بیشینه سازی مطلوبیت به صورت زیر می باشد:

$$\max_{w} \ (\mathrm{w}'\mu - \frac{\lambda}{2} w'\Sigma w)$$
$$s.t:$$
$$\mathrm{w}'\iota = 1, \ \iota' = [1,1,...,1]$$

λ ضریب ریسک گریزی فرد

۳-۴. مدل پرتفوی واریانس- چولگی :

در این مدل فرض شده است که تغییرات قیمت با اختلاف بازده با بازده بدون ریسک مستقل می باشند وتوزیع مستقل با بردار میانگینμ و بردار $\sum$ نیز به عنوان ماتریس کواریانس در نظر گرفته شده است. واریانس تابع مطلوبیت نهایی سرمایه گذار به صورت زیر خواهد شد:

$$Var(U(W)) = E[(U(W) - E[U(W)])^2] = E[U^2(W)] - E[U(W)]^2$$

در اینجا به این دلیل واریانس تابع مطلوبیت نهایی را مینیمم خواهیم کرد چون متنوع سازی پرتفو کاراتر خواهد شد. این مسئله می تواند به متنوع سازی پرتفو کمک شایانی نماید از آنجا که رفتار حدی وزن ها می تواند تخمین گشتاور اول نمونه را شفاف تر نماید این در صورتی می باشد که این موضوع در تحلیل ها نهفته بوده است.

$$E[U(W)]2 = \mu(i)$$
$$\mu = E(W)$$

تابع مطلوبیت سرمایه گذار توسط گشتاور مرتبه دوم تخمین زده خواهد شد:

$$Var(U(W)) = E[(U(W) - E[U(W)])^2] = E[U(W)^2] - E[U(W)]^2$$
$$Var(U(W)) = [(U^{(1)}(\mu))^2]\mu^{(2)} + U^{(1)}(\mu)\,U^{(2)}(\mu)\mu^{(3)} + \frac{1}{4}(U^{(2)}(\mu))^2\mu^{(4)} - \frac{1}{4}(U^{(2)}(\mu))^2(\mu^{(2)})^2$$

فرض می شود که ریسک گریزی سرمایه گذار تقریبا ثابت است و ضریب ریسک گریزی سرمایه گذار نیز با λ نشان داده شده است.

$$\boldsymbol{U(W) = \frac{W^{1-\lambda}}{1-\lambda}}$$

حال گشتاور های مرتبه بالاتر بدین صورت در نظر گرفته می شود:

$$U^{(1)}(W) = 1$$
$$U^{(2)}(W) = -\lambda$$
$$U^{(3)}(W) = \lambda(\lambda + 1)$$
$$U^{(3)}(W) = -\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

اکنون می توان مسئله بهینه سازی برای مینیمم کردن واریانس مطلوبیت را بصورت زیر نوشت:

$$\mu^{(2)} - \frac{(\lambda)^2}{4}(\mu^{(2)})^2 + \lambda\mu^{(3)} + \frac{(\lambda)^2}{4}(\mu^{(4)})$$

۳-۵. انتخاب پرتفوی چند دوره ای :

در این تحقیق روی انتخاب سبد سهام چند دوره ای با فرض وجود هزینه معاملات مطالعه شده است. هدف این کار تعریف و توصیف مدل انتخاب سبد سهام با بهترین پرتفو در مقابل پرتفویی که براساس مدل مارکویتز و مدل ساده وزن دهی می باشد که در چارچوب چند دوره ای واریانس تابع مطلوبیت را مینیمم خواهد کرد. در این تحقیق از فرمول گارلینو و پدرسون ۲۰۱۳ برای انتخاب پرتفوی چند دوره ای بهینه با توجه به مینیمم کردن واریانس تابع مطلوبیت سرمایه گذار استفاده شده است.

تفاوت مدل پیشنهادی با مدل گارلینو پدرسون در این می باشد که در مل پیشنهادی سرمایه گذار مطلوبیت ثروت نهایی خود تحت ریسک گریزی ثابت را با با مینیمم کردن واریانس تابع مطلوبیت بدست می آورد در حالیکه در مدل گارلینو و پدرسون بر پایه ماکزیمم کردن مطلوبیت انتظاری می باشد. در هردو مدل تغییرات قیمت قابل پیشبینی و بیشتر از نرخ بدون ریسک می باشند.

در چارچوب میانگین- واریانس کلاسیک، یک سرمایه گذار تلاش می کند تا تنها درآمد فردا را ماکزیمم نماید و به درآمد های آینده توجهی نمی کند. اما در موقعیت واقعی یک شخص ممکن است بخواهد که مطلوبیت انتظاری ثروتش را درآینده حداکثر نماید.

تابع مطلوبیت سرمایه گذار برای مسئله چند دوره ای طی مدت $(t + \tau)$ با N دارایی ریسکی در زمان های $(t, t + 1, ..., t + \tau - 1)$ به صورت زیر فرموله خواهد شد(ساهلیا و هانسن ۲۰۰۹) :

$$V(\tau\ ,\ W_t, z_t) = \max_{\{x_s\}_{s=t}^{s=t+\tau-1}} E_t[U(W_{t+\tau})]$$
$$= \max_{x_t} E_t \left[\max_{\{x_s\}_{s=t}^{s=t+\tau-1}} E_{t+1}[U(W_{t+\tau})] \right]$$
$$= \max_{x_t} E_t \left[V(\tau\ -\ 1, W_t(x_t{}'r_{t+1} + R_t^f), z_t) \right]$$

در فرمول بالا، **(τ)** افق سرمایه گذاری، **(V (τ , Wt, zt))** مطلوبیت انتظاری سرمایه گذار در زمان **(t)**، با شرایط اختیاری **(zt)**، برای ثروت نهایی **(Wt+τ)** در **(τ)** پریود آینده را نشان می دهد. معادله اخیر، معادله بلمن نامیده می شود. این مسئله می تواند با مشتق مرتبه اول حل شود.

اخیرا پرتفوی چند دوره ای توسط گارلینو و پدرسون در سال ۲۰۱۳ پیشنهاد شد. آنها **(N)** دارایی را در زمان **(t ∈ {. . . , − 1, 0, 1, . . .})** در نظر گرفته اند و تغییرات قیمت سهام بیشتر از نرخ بدون ریسک **(pt+1 − (1 + Rf)pt)** و بین زمان **(t)** و **(t + 1)** و همچنین قابل پیش بینی می باشند.

در مدل گارلینو و پدرسون معامله هزینه بر و هزینه معاملات **(TC)** کوادراتیک طبق زیر می باشد:

$$TC(\Delta x_t) = \frac{1}{2}\Delta x_t{}'\Lambda\Delta x_t$$

در فرمول بالا **(Λ)** پارامتر هزینه معاملات می باشد که فرض می کند که هزینه معاملات متناسب با ماتریس کواریانس می باشد به نحوی که اگر **γ** عدد اسکالر باشد انگاه : **Λ = γΣ**

همچنین **(Δxt = xt − xt−1)** سهام معامله شده در زمان **(t)** می باشد.

تابع هدف معاملات داینامیک سرمایه‌گذار جهت حداکثر سازی ارزش حال همه بازده های اضافی آینده به صورت زیر می باشد:

$$\max_{x_0, x_1, \ldots} E_0 \left[\sum_t (1-\rho)^{t+1} (x'_t r_{t+1} - \frac{\lambda}{2} x'_t \sum x_t) - \frac{(1-\rho)^t}{2} \Delta x_t{}' \Lambda \Delta x_t \right]$$

در فرمول بالا **ρ ∈ (0, 1)** فاکتور تنزیل می باشد و **λ** نیز پارامتر ریسک گریزی سرمایه گذار می باشد.

۶-۳. انتخاب چند دوره ای سبد سهام با مینیمم کردن واریانس تابع مطلوبیت:

با توجه به مدل زیر، واریانس تابع هدف در هر دوره مینیمم خواهد شد به طریقی که در نهایت تابع هدف سرمایه‌گذار برابر با ارزش حال همه ریسک ها و هزینه معاملاتی باشد. در این مدل فرض شده است

که واریانس هزینه معاملات متناسب با واریانس کوادراتیک معاملات هر دوره می باشد. در این صورت تابع هدف به صورت زیر خواهد بود:

$$\min_{S_0,S_1,\dots} E_0\left[\sum_t (1-\rho)^{t+1}(S_t-(\frac{\lambda}{2})^2 S_t'S_t)+\frac{(1-\rho)^t}{2}\Delta S_t'\Lambda\Delta S_t\right]$$

$$\text{where}, S_t = x'_t\Sigma\, x_t$$

مدل بالا یک مسئله برنامه ریزی پویا می باشد که این مدل با معرفی یک تابع ارزش برای معادله بلمن حل خواهد شد. معادله بلمن بصورت زیر می تواند نوشته شود:

$$V(S_t)=\min_{S_t}\left[(1-\rho)(S_t-(\frac{\lambda}{2})^2 S_t'S_t+E_t[V(S_t)])+\frac{\gamma}{2}\Delta S_t'\Sigma\Delta S_t\right]$$

این مدل جواب منحصر به فرد دارد.

۳-۷. ابزار های ارزیابی عملکرد پرتفوی:

در این بخش از تحقیق در مورد مجموعه ای از ابزارهای ارزیابی عملکرد پرتفوی بحث می شود که بعد از اینکه خروجی های مدل مشخص گردید با دیگر روش ها مورد مقایسه قرار گیرد.

در این تحقیق سه ابزار مهم و کارا در ارزیابی پرتفو ها معرفی می شوند که معمولا سنجه خوبی برای عملکرد پرتفوها می باشند.

۱-۷-۳. نسبت شارپ(SR):

نسبت شارپ یک راه ساده و عمومی برای مقایسه بازده پرتفو هایی است که از استراتژی های مختلفی بدست آمده اند. این ابزار خصوصا زمانی بیشتر کاربرد دارد که بخواهیم واریانس و بازده را همزمان به عنوان دو عنصر اصلی در ارزیابی عملکرد پرتفو مورد استفاده قرار دهیم.

عموماً، هرچه مقدار نسبت شارپ بالاتر باشد، بازده تعدیل شده نسبت به ریسک نیز از جذابیت بالاتری برخوردار خواهد بود. نسبت شارپ همچنین می‌تواند به توضیح اینکه آیا بازده اضافی پرتفوی به خاطر تصمیمات هوشمندانه سرمایه گذاری بوده و یا درنتیجه ریسک اضافی، کمک کند. **rp** بازده پرتفوی و **rf** نرخ بازده بدن ریسک و **σp** نیز انحراف معیار پرتفو می باشد.

$$\mathbf{SRp}=\frac{r_p-r_f}{\sigma_p}$$

۲-۷-۳. بازده معادل اطمینان(CE):

بازده معادل اطمینان، نرخ بازده مشخصی می باشد با مطلوبیتی که برابر با بازده انتظاری می باشد و ریسک نیز برای آن درنظر گرفته می شود. بسیاری از سرمایه گذارن ریسک گریز هستند و مدیران پرتفو باید به آنها پیشنهاد بازده بیشتر از بازده انتظاری بدهند تا آنها را متقاعد به سرمایه گذاری نمایند. این بستگی به آستانه تحمل ریسک هر سرمایه گذار دارد تا با بازده معادل اطمینان هر پرتفو اقدام به سرمایه گذاری در آن پرتفو نماید. این ابزار بسیار شبیه مطلوبیت سرمایه گذار می باشد و این موضوع باعث شده است که این ابزار از انحراف از تصمیم گیری درست سرمایه گذار جلوگیری نماید و ترجیحات سرمایه گذار در مورد انتخاب پرتفو و عملکرد آن را لحاظ نماید.(تو و زو ۲۰۱۱)

$$CEQ = \hat{r} - \frac{\lambda}{2}\hat{\sigma}^2$$

r به عنوان بازده مورد انتظار و $\boldsymbol{\sigma^2}$ به عنوان واریانس انتظاری و همچنین $\boldsymbol{\lambda}$ نیز پارامتر ریسک گریزی سرمایه گذار می باشد.

۳-۷-۳. شارپ تعدیل شده با چولگی (ASSR):

اغلب این ایراد به نسبت شارپ وارد می شود که علی رغم در نظرگرفتن واریانس پرتفو، پارامترهایی همچون کشیدگی و چولگی را در نظر نمی گیرد که به نوعی این پارامتر ها مهم تلقی می گردند و عدم لحاظ کردن این پارامتر ها در ارزیابی عملکرد ممکن است در تصمیم گیری سرمایه گذاران اثرگذار باشد و مدلی که برای پرتفو در نظر گرفته شده است به طور مناسب ارزیابی نخواهد شد.(زاکامولین و کوکباکر ۲۰۰۹)

با توجه به موارد ذکر شده نیاز به تعدیل نسبت شارپ با در نظر گرفتن پارامترهای همانند چولگی شده است. در زیر نسبت شارپ تعدیل شده با چولگی آورده شده است:

$$ASSR = \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{1 + (\frac{\lambda(\lambda+1)}{6})\frac{s}{3}(\frac{\mu}{\sigma})}$$

که در فرمول بالا $\boldsymbol{\mu}$ به عنوان بازده، $\boldsymbol{\sigma}$ انحراف معیار، **s** چولگی، $\boldsymbol{\lambda}$ نیز بیانگر ضریب ریسک گریزی سرمایه گذار می باشد. هرچه این نسبت بیشتر باشد پرتفو عملکرد بهتری دارد.

۴- یافته های پژوهش :

در این تحقیق از داده های ۵۰ دارایی سهام انتخاب شده در بورس اوراق بهادار تهران از سال ۱۳۸۶ لغایت ۱۳۹۵ استفاده شده است، این داده ها از بورس اوراق بهادار تهران ، سایت شرکت فناوری اطلاعات بورس و نرم افزار رهاورد نوین استخراج گردیده است. داده های مورد استفاده با توجه به دوره گزارش داده ها فرکانس های مختلفی دارند لذا به منظور همگن سازی آن ها به صورت یکنواخت همگی به داده های ماهانه تبدیل شده اند، برای انتخاب سهام، ۵۰ شرکتی انتخاب شده است که در پایان سال ۹۵ بیشترین ارزش بازاری را در بازار بورس تهران داشته اند. با توجه به اینکه برای این تحقیق به داده های ماهانه ۱۰ سال گذشته نیاز داشته است لذا شرکت هایی انتخاب شده اند که بیشترین ارزش در پایان سال ۹۵ را داشته و همچنین قبل از سال ۱۳۸۶ در بازار سرمایه تهران پذیرش شده اند.

۴-۱. نتایج مدل ها :

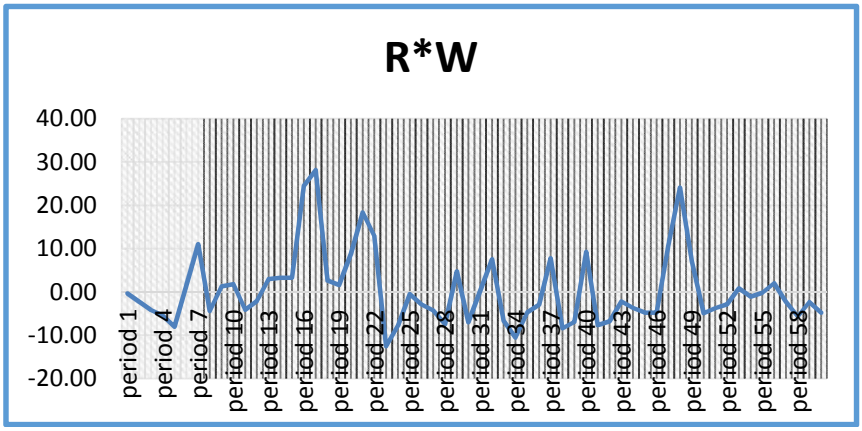
در این تحقیق بهینه سازی سبد سهام به سه روش انجام می پذیرد و نتایج مدل ها باهم مقایسه خواهند شد:

روش اول: مدل تخصیص ساده **1/N**

در این روش وزن هر سهام به نسبت مساوی با دیگر سهام به آن تخصیص پیدا می کند.

ارزیابی عملکرد مدل تخصیص ساده **1/N** با ابزار های اندازه گیری:

در نمودار زیر بازده پرتفوی متشکل از ۵۰ شرکت توسط مدل **1/N** در ۶۰ دوره آینده آورده شده است:



نمودار ۱. بازده پرتفوهای ۶۰ دوره با استفاده از روش 1/N

جدول ۱. جدول نتایج ابزار های ارزیابی عملکرد با استفاده از روش 1/N

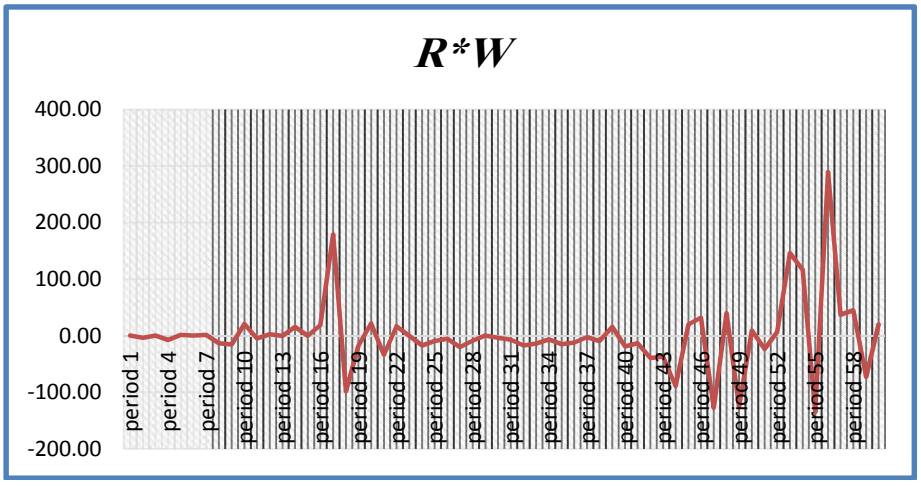
Ratio	Sharp	CEQ	ASSR
λ =1	0.0481	0.0005	0.0483
λ =3	0.0481	-0.0066	0.0492

منبع: نتایج تحقیق با استفاده از نرم افزار متلب

همانطور که از نمودار ۱ بر می‌آید بازده دوره های تست از نوسان بسیاری برخوردارند و متاثر از شوک های بازار سرمایه بوده است. در جدول ۱ هم با ضریب ریسک گریزی ها متفاوت مشاهده می شود خروجی مدل و نتایج با استفاده از سه معیار ارزیابی مذکور در حد مطلوب نمی باشد.

روش دوم: مدل مارکویتز

ارزیابی عملکرد مدل مارکویتز با ابزار های اندازه گیری:



نمودار۲. بازده پرتفوهای ۶۰ دوره با استفاده از مدل مارکویتز

جدول ۲. جدول نتایج ابزار های ارزیابی عملکرد با استفاده از مدل مارکویتز

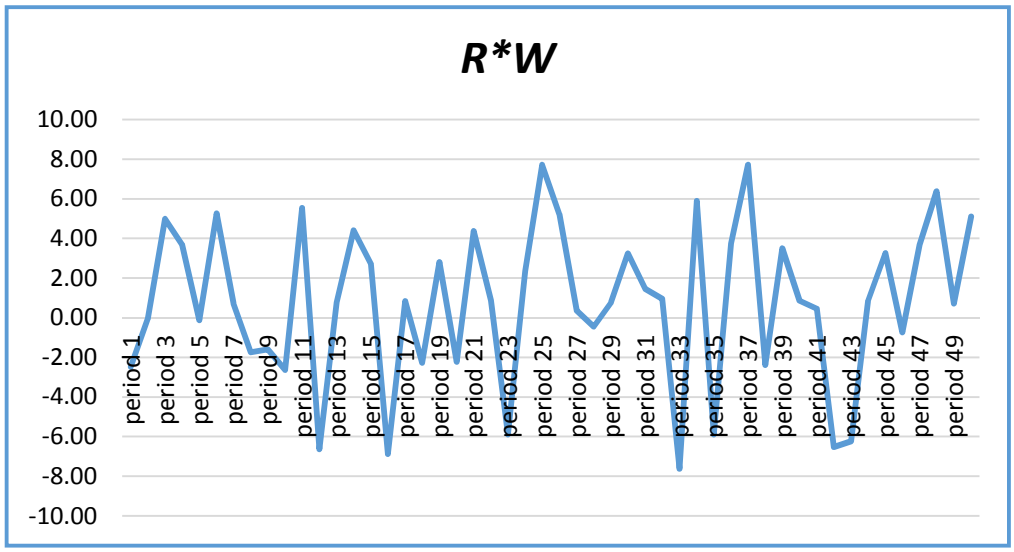
Ratio	Sharp	CEQ	ASSR
λ =1	0.1547	-13.2090	0.1638
λ =3	0.1547	-41.2660	0.2033

منبع: نتایج تحقیق با استفاده از نرم افزار متلب

نمودار ۲ نشان می دهد بازده دوره های تست، دارای نوسان بسیار بالایی هستند و واریانس بازده پرتفو ها در طی دوره ها نامناسب می باشد. مطابق جدول شماره ۲، نوسان بالا موجب شده است که کارایی این مدل به طور چشمگیری کاهش یابد و نتایج مطلوبی از خود ارائه نکند.

روش سوم: مدل پیشنهادی

ارزیابی عملکرد مدل پیشنهادی با ابزار های اندازه گیری:



نمودار ۳. بازده پرتفوهای ۶۰ دوره با استفاده از مدل پیشنهادی

جدول ۳. جدول نتایج ابزار های ارزیابی عملکرد با استفاده از مدل پیشنهادی

Ratio	Sharp	CEQ	ASSR
$\lambda = 1$	0.1994	0.0055	0.2008
$\lambda = 3$	0.1994	0.0046	0.2078

منبع: نتایج تحقیق با استفاده از نرم افزار متلب

نمودار۳ نشان می دهد بازده دوره های تست، از نوسان پذیری کمتری برخوردار هستند و واریانس بازده پرتفو ها در طی دوره ها مطلوب می باشد. با توجه به جدول شماره ۳، نتایجی که از این مدل بدست آمده اند نسبتا مطلوب می باشند و مدل، با کنترل واریانس توانسته است در سه معیار مذکور در حد مطلوب عمل نماید.

۴-۲. مقایسه مدل ها :

در جدول زیر نتایج ارزیابی عملکرد مدل های ساده، مارکویتز و پیشنهادی، توسط سه ابزار در جدول۴ آورده شده است.

جدول ۴. مقایسه نتایج ابزار های ارزیابی عملکرد با استفاده از مدل ساده، مارکویتز و مدل پیشنهادی

Measurement Models	λ= 1			λ= 3		
	Naive	Novel	Markowitz	Naive	Novel	Markowitz
Sharp Ratio	0.0481	0.1994	0.1547	0.0481	0.1994	0.1547
Certainty Equvalent Return	0.0005	0.0055	-13.2090	-0.0066	0.0046	-41.2660
Adjusted for Skewness Sharp Ratio	0.0483	0.2008	0.1638	0.0492	0.2078	0.2033

منبع: نتایج تحقیق با استفاده از نرم افزار متلب

مطابق جدول ۴ ، نتایج نسبت شارپ در مدل پیشنهادی ، برابر ۰,۱۹۹۴ می باشد این در حالی است که نسبت شارپ در مدل مارکویتز و ساده به ترتیب معادل ۰,۱۵۴۷ و ۰,۴۸۱می باشد که نشان می دهد با توجه به نسبت شارپ مدل پیشنهادی، مدل بهتری نسبت به مدل مارکویتز و ساده می باشد.

نسبت بازده معادل اطمینان در مدل پیشنهادی با ضریب ریسک گریزی ۱، برابر ۰,۰۰۵۵ می باشد و همین نسبت در مدل مارکویتز و ساده با ضریب ریسک گریزی ۱،به ترتیب معادل ۱۳,۲۰۹- و ۰,۰۰۰۵ می باشد. همچنین نسبت بازده معادل اطمینان در مدل پیشنهادی با ضریب ریسک گریزی ۳، برابر ۰,۰۰۴۶ می باشد و همین نسبت در مدل مارکویتز و ساده با ضریب ریسک گریزی ۳، به ترتیب معادل ۴۱,۲۶۶- و ۰,۰۰۶۶ می باشد. در مجموع نتایج این نسبت نشان می دهد مدل پیشنهادی و سپس مدل ساده نتایج بهتری از خود نشان داده اند.

نسبت شارپ تعدیل شده با چولگی در مدل پیشنهادی با ضریب ریسک گریزی ۱، برابر ۰,۲۰۰۸ می باشد و همین نسبت در مدل مارکویتز و ساده با ضریب ریسک گریزی ۱، به ترتیب معادل ۰,۱۶۳۸ و ۰,۰۴۸۳ می باشد. همچنین نسبت بازده معادل اطمینان در مدل پیشنهادی با ضریب ریسک گریزی ۳، برابر ۰,۲۰۷۸ می باشد و همین نسبت در مدل مارکویتز و ساده با ضریب ریسک گریزی ۳، به ترتیب معادل ۰,۲۰۳۳ و۰,۰۴۹۲ می باشد.

نتایج این معیارها نشان می دهد مدل پیشنهادی عملکرد بالاتری از خود نسبت به مدل مارکویتز و ساده نشان داده است. یک از دلایل مهم این امر کنترل نوسان پرتفو بوده است که توسط آن، پرتفو در

طی دوره های مختلف با ثبات بیشتری، توانسته است بازده بالایی را کسب نماید و سود بیشتری را نصیب سرمایه گذاران نماید.

در مجموع با نتایج گرفته شده از مدل ها، حاکی از این موضوع می باشد که مدل پیشنهادی نتایج مطلوبی نسبت به مدل مارکویتز و مدل ساده ارئه داده است. در این راستا فرضیه تحقیق که با ابزار های ارزیابی عملکرد مورد سنجش قرار گرفته است به این موضوع اشاره دارد که مطابق نتایج بدست آمده، فرضیه تحقیق ، مبنی بر کاراتر بودن مدل پیشنهادی نسبت به دو مدل دیگر، مورد تایید قرار گرفته است.

۵- نتیجه‌گیری :

در مشارکت فعال افراد جامعه در بازارهای سرمایه، عمده ترین مساله که هریک از سرمایه گذاران با آن مواجه هستند، تصمیم گیری برای انتخاب اوراق بهادار و دارایی های مناسب برای سرمایه گذاری و تشکیل سبد سهام است. از این رو تلاشهای گسترده ای در بین محققان سرمایه گذاری در جهت ارائه روشهایی در جهت بررسی و تحلیل سهام در بازارهای مالی و بهبود این روشها در دنیا صورت می گیرد. تلاش در جهت بهبود روشهای تجزیه وتحلیل سهام به ویژه در بازارهایی که شمار سهام در آنها بسیار بالاست، منجر به پدید آمدن روشهای نوینی گردیده که در کنار روشهای گذشته درصدد یافتن پاسخی برای میل به حداکثر سازی مطلوبیت فرد در بازارهای مالی می باشند.

با توجه به اهمیت سرمایه گذاری مناسب در بازار سرمایه و کسب بازده مناسب، همواره تخصیص بهینه سبد سرمایه گذاری بسیار مهم تلقی می شود. در طی سالیان دراز، از روش ها و مدل های مختلفی برای این امر استفاده شده است. در این تحقیق نیز تلاش شده است تا مدلی ارئه شود تا بتواند این تخصیص را به نحو مطلوب انجام دهد تا برای سرمایه گذاران بازده مناسبی را به ارمغان آورد. در این راستا به دلیل اینکه در واقعیت هزینه معاملات نیز وجود دارد باید سرمایه گذاری در هر سهام به گونه ای باشد که در دوره های بعد نیز با توجه به هزینه های نقل و انتقال سهام، بازده مناسبی را کسب نماید. لذا در این تحقیق مدل چند دوره ای ارائه شده است تا با در نظر گرفتن هزینه معاملات ثروت سهامدار حداکثر شود. برای توضیح دهندگی بیشتر مدل از گشتاور مرتبه بالاتر نیز استفاده شده است. به همین روی از گشتاور مرتبه سوم که چولگی نام دارد برای قدرت بیشتر مدل علاوه بر واریانس به عنوان گشتاور دوم استفاده شده است. برای این مدل سعی شده است واریانس تابع مطلوبیت چند دوره ای نیز حداقل شود چراکه با کنترل نوسان می توان نتایج بهتری از مدل استخراج نمود.

با توجه به نتایج حاصل از مدل ها و استفاده از ابزار های ارزیابی عملکرد پرتفوی، مدل پیشنهادی عملکرد بهتری نسبت به مدل ساده و مدل مارکویتز داشته است. در انتها برای مطالعات آتی پیشنهاد می گردد از گشتاور چهارم نیز برای توسعه مدل و توضیح دهندگی بهتر مدل با واقعیت استفاده گردد.

۶-فهرست منابع :

۱) اسلامی بیدگلی، غلامرضا، تهرانی، رضا، شیرازیان، زهرا. بررسی رابطه میان عملکرد شرکت های سرمایه گذاری براساس سه شاخص ترینر، جنسن و شارپ با اندازه و نقد شوندگی آن ها . ۱۳۸۴. تحقیقات مالی. ۱۹،۲۴-۳

2) Campbell J Y, Viceira L M. Consumption and Portfolio Decisions When Expected Returns Are Time Varying. Quarterly Journal of Economics, 1999, 114(2).

3) Campbell J Y, Viceira L M. Strategic asset allocation: portfolio choice for long-term investors. Oxford University Press, 2002.

4) Constantinides G M. Multiperiod consumption and investment behavior with convex transactions costs. Management Science, 1979, 25(11):1127–1137.

5) DeMiguel V, Garlappi L, Uppal R. Optimal versus naive diversification: How inefficient is the ۱/N portfolio strategy? Review of Financial Studies, ۲۰۰۹, ۲۲(۵):۱۹۱۵–۱۹۵۳

6) DeMiguel V, Mei X, Nogales F J. Multiperiod Portfolio Optimization with General Transaction Costs. Available at SSRN 2295345, 2013.

7) DeMiguel V, Nogales F J, Uppal R. Stock return serial dependence and out-of-sample portfolio performance. Review of Financial Studies, 2014, page hhu002.

8) DeMiguel V, Plyakha Y, Uppal R, et al. Improving portfolio selection using option-implied volatility and skewness. Journal of Financial and Quantitative Analysis, ۲۰۱۲, pages ۱–۵۷

9) DeMiguel V, Uppal R. Portfolio investment with the exact tax basis via nonlinear programming. Management Science, 2005, 51(2):277–290.

10) Elton E J, Gruber M J. Estimating the dependence structure of share prices—implications for port-folio selection. The Journal of Finance, 1973, 28(5):1203–1232.

11) Engle R F, Ferstenberg R. Execution Risk. The Journal of Portfolio Management, 2007, 33(2):34–44.

12) Gârleanu N, Pedersen L H. Dynamic trading with predictable returns and transaction costs. The Journal of Finance, 2013, 68(6):2309–2340.

13) Goetzmann W, Ingersoll J, Spiegel M I, et al. Sharpening sharpe ratios. Technical report, National bureau of economic research, 2002.

14) GREEN R C, Hollifield B. When Will Mean-Variance Efficient Portfolios Be Well Diversified? The Journal of Finance, ۱۹۹۲, ۴۷(۵):۱۷۸۵–.۱۸۰۹

15) Grinold R. A dynamic model of portfolio management. Journal of Investment Management, 2006, 4(2):5.

16) Harvey C R, Liechty J, Liechty MW, et al. Portfolio selection with higher moments. Duke University FRPS۱۲۳-۰۴, .۲۰۰۴

17) Harvey C R, Siddique A. Conditional skewness in asset pricing tests. The Journal of Finance, 2000, 55(3):1263–1295.

18) Jensen M C. Risk, the pricing of capital assets, and the evaluation of investment portfolios. Journal of business, 1969, pages 167–247.

19) Jondeau E, Rockinger M. Conditional volatility, skewness, and kurtosis: existence, persistence, and comovements. Journal of Economic Dynamics and Control, ۲۰۰۳, ۲۷(۱۰):۱۶۹۹–.۱۷۳۷

20) Jorion P. International portfolio diversification with estimation risk. Journal of Business, ۱۹۸۵, pages ۲۵۹–.۲۷۸

21) Kim T H, White H. On more robust estimation of skewness and kurtosis. Finance Research Letters, ۲۰۰۴, ۱(۱):۵۶–.۷۳

22) Kirby C, Ostdiek B. It's all in the timing: simple active portfolio strategies that outperform naive diversification. Journal of Financial and Quantitative Analysis, ۲۰۱۲, ۴۷(۰۲):۴۳۷–.۴۶۷

23) Ledoit O, Wolf M. Honey, I shrunk the sample covariance matrix. The Journal of Portfolio Man-agement, ۲۰۰۴, ۳۰(۴):۱۱۰–.۱۱۹

24) Leland H E. Beyond Mean-Variance: Performance Measurement in a Nonsymmetrical World (cor-rected). Financial analysts journal, 1999, 55(1):27–36.

25) Liu H. Optimal consumption and investment with transaction costs and multiple risky assets. The Journal of Finance, 2004, 59(1):289–338.

26) Markowitz H. Portfolio selection. The journal of finance, ۱۹۵۲, ۷(۱):۷۷–.۹۱

27) Merton R C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. The review of Economics and Statistics, 1969, pages 247–257.

28) Merton R C.On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. Journal of financial economics, ۱۹۸۰, ۸(۴):۳۲۳–.۳۶۱

29) Savage L J. The foundations of statistics. New York(۲nd ed. ۱۹۷۲): Courier Corporation, .۱۹۵۴

30) Sharpe W F. A simplified model for portfolio analysis. Management science, ۱۹۶۳, ۹(۲):۲۷۷–.۲۹۳

31) Sharpe W F. Mutual fund performance. Journal of business, 1966, pages 119–138.

32) Treynor J L. How to rate management of investment funds. Harvard business review, 1965, 43(1):63–

33) Tu J, Zhou G. Markowitz meets Talmud: A combination of sophisticated and naive diversification strategies. Journal of Financial Economics, ۲۰۱۱, ۹۹(۱):۲۰۴–.۲۱۵

34) Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. Journal of Risk and Uncertainty, 1992, 5(4):297–323.

35) Von Neumann J, Morgenstern O. Theory of games and economic behavior. .۱۹۴۴

36) Zakamouline V, Koekebakker S. Portfolio performance evaluation with generalized Sharpe ratios: Beyond the mean and variance. Journal of Banking & Finance, 2009, 33(7):1242–1254.

یادداشت ها

۱ Markowitz,H
۲Cambell,J.Y. , Hentschel,L
۳ Prakash,A.J.,deBoyrie
۴ Harvey,C.R.,Siddique,A
۵Chunhachinda,P. , Dandapanic,K.
۶ Muralidhar,K
۷ Parkash,A.J. , Chang,C.H
۸ Amado,P
۹ Jobst & Zenios
۱۰ Walter Briec, Kristiaan Kerstens & Octave Jokung
۱۱ Dual approach
۱۲Harvey & Siddique
۱۳Jondeau & Rockinger
۱۴ Harvey et al
۱۵ DeMiguel et al
۱۶ Sankaran
۱۷ Jacob,N
۱۸ Reilly
۱۹ Faaland,B.H
۲۰ Elton,E.J.,Gruber ,M.J.
۲۱ Merton
۲۲ Campbell & Viceira
۲۳ Grinold
۲۴ Engle & Ferstenberg
۲۵ Butt and Deng
۲۶ Antolin et al.