JMRA
مجله پژوهش و کاربرد در مکانیک
ISSN: 2251-7383, eISSN: 2251-7391

# تحلیل استاتیکی، دینامیکی و ارتعاش آزاد ورق متخلخل مدرج تابعی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ورق

**سعید خبری[1]، کامران عاصمی*[2]، مسعود بابایی[3]**

۱- کارشناس ارشد، فنی مهندسی، دانشگاه آزاد تهران شمال، تهران، ایران

*۲- استادیار، فنی مهندسی، دانشگاه آزاد تهران شمال، تهران، ایران، k.asemi@iau-tnb.ac.ir

۳- کارشناس ارشد، فنی مهندسی، دانشگاه ایوانکی، سمنان، ایران

**تاریخ دریافت:** ۱۳۹۹-۱۰-۱۵ **تاریخ پذیرش:** ۱۳۹۹-۱۱-۰۲

**چکیده:** در این پژوهش، پاسخ استاتیکی و دینامیکی ورق متخلخل مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفته است. دو نوع توزیع شامل توزیع غیرخطی نامتقارن و توزیع غیرخطی متقارن تخلخل در راستای ضخامت ورق در نظر گرفته‌شده است. برای تحلیل، از تئوری مرتبه اول برشی استفاده شده است. برای بیان معادلات حرکت از معادله لاگرانژ و برای حل روابط حاکم بر مسئله از روش عددی اجزا محدود و نیومارک استفاده شده و سپس تأثیر پارامترهای مختلف از جمله، ضریب تخلخل و ضریب اسکمپتون و دو نوع توزیع مختلف تخلخل، نسبت طول به ضخامت و شرایط مرزی مختلف بر توزیع خیز استاتیکی و گذرا و همچنین فرکانس‌های طبیعی ورق مورد بررسی قرارگرفته است. نتایج نشان می‌دهند که افزایش ضریب اسکمپتون همواره سبب کاهش خواهد شد، درحالی‌که افزایش ضریب تخلخل باعث افزایش جابه‌جایی خواهد شد.

**واژه‌های کلیدی:** ورق متخلخل، مدرج تابعی، روش اجزا محدود، تئوری مرتبه اول برشی، تحلیل دینامیکی، تحلیل استاتیکی، فرکانس طبیعی

## ۱. مقدمه

تحلیل رفتار استاتیکی و دینامیکی سازه‌ها یکی از مباحث کاربردی در مهندسی مکانیک است که محققین و مهندسین زیادی را به خود مشغول ساخته است. یکی از اجزا مهم سازه‌ها ورق‌ها می‌باشند که تحت بارگذاری‌های استاتیکی وعمدتاَ دینامیکی قرار دارند. کاربرد ورق‌ها در زمینه‌های مختلف از جمله هوافضا و عمران بسیار گسترده بوده است. مشخصه‌های بار از عوامل تأثیرگذار بر تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق تحت اثر بار می‌باشند. تئوری حاکم بر ورق نیز عاملی است که باعث می‌شود تحلیل رفتار ورق به گروه‌های مختلفی تقسیم شود. ازجمله این تئوری‌ها می‌توان به تئوری کلاسیک ورق و تئوری‌های مرتبه اول برشی و مرتبه بالا اشاره کرد. همچنین نوع مواد به‌کاررفته در طراحی ورق‌ها نیز حائز اهمیت هست. لذا استفاده از مواد با وزن کم و استحکام بالا موردتوجه مهندسین قرار گرفت. ازاین‌رو امروزه مواد فومی(مواد متخلخل) کاربردهای بسیار وسیعی در زمینه‌های مختلف دارند.

در دهه اخیر، دسته جدیدی از فلزات سلولی، به نام فوم فلزی با خواص مکانیکی، حرارتی، الکتریکی و صوتی جدید مانند چگالی کم و درعین‌حال سفتی بالا و عایق صوتی و حرارتی بودن در عین نفوذپذیری گاز بالا، مطرح‌شده‌اند و جذابیت بسیاری یافته‌اند. ازجمله کاربردهای عمده فوم‌های فلزی در صنایع خودرو و هوافضا هست که علت اصلی آن خاصیت جذب انرژی بسیار بالا در تنش‌های فشاری در این گروه مواد است. به دلیل کاربرد فراوان این‌گونه سازه‌ها به‌خصوص در زمینه سبک‌سازی و هوافضا، تحلیل استاتیکی و دینامیکی این‌گونه سازه‌ها در چند سال اخیر ذهن پژوهشگران را به خود جلب نموده است. تاکنون پژوهش‌های بسیاری در زمینه رفتار سازه‌های کامپوزیتی و بطور خاص سازه‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی انجام شده است، بطوری‌که اخیراً رفتار سازه‌های ساخته شده از مواد متخلخل مدرج تابعی که تخلخل در راستای ضخامت سازه متغیر است، مورد توجه محققین قرار گرفته است. بطور مثال، بسکاس [۱] با استفاده از تئوری کلاسیک، ورقهای مستطیلی نازک ساخته شده از مواد متخلخل را بر

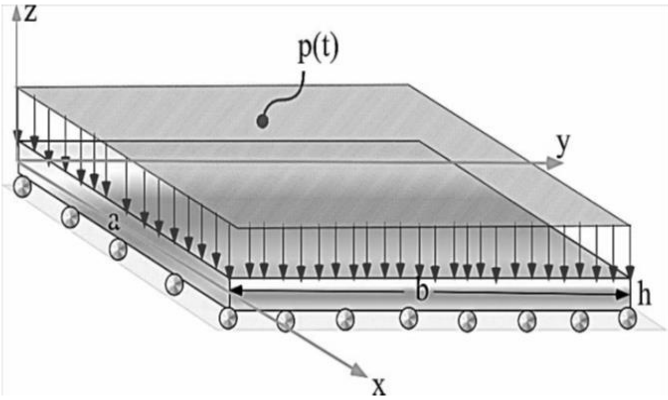
اساس تئوری بایوت بررسی نمودند. آن‌ها راه‌حل‌هایی را برای یک ورق با تکیه‌گاه ساده با استفاده از حل ناویر ارائه دادند. لکلاری و همکاران [۲] به بررسی ارتعاش یک ورق متخلخل مستطیل شکل پرداختند. آنها از اصل همیلتون برای به دست آوردن معادلات حاکم بر ورق مستطیلی استفاده کردند و از روش گلرکین برای حل معادلات حاکم بهره بردند. مگنوکی [۳] به بررسی کمانش الاستیک تیر متخلخل پرداخت. معادلات دیفرانسیلی حاکم را با توجه به اصل همیلتون به دست آورد و از روش گلرکین برای حل آن استفاده نمود. همچنین مگنوکی و بلندزی [۴] مسئله خیز متقارن محوری و کمانش صفحه گرد متخلخل را بررسی نمودند. آن‌ها همچنین [۵] یک تیر ساندویچی متشکل از هسته فوم فلزی مدرج تابعی را مورد بررسی قرار دادند و پارامترهای بی‌بعد بهینه را به‌منظور به حداکثر رساندن نیروی بحرانی کمانش و به حداقل رساندن جرم تیر بررسی نمودند. مگنوکی و دبوسکی [۶] به بررسی پایداری دینامیکی صفحه مستطیلی متخلخل که تحت نیروی محوری فشاری قرار دارند پرداختند و از اصل همیلتون برای به دست آوردن معادلات حاکم استفاده کرده و از روش گلرکین برای حل معادلات حاکم استفاده کردند. بلیکا ومگنوکی[۷] پایداری دینامیکی پوسته متخلخل را مورد مطالعه قراردادند و از اصل همیلتون و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده نمودند. آنها نتایج را برای توزیع تخلخل به‌صورت غیرخطی نامتقارن بدست آوردند. نائینی و قاسمی [۸] تحلیل خمش و کمانش صفحه متخلخل دایروی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول را موردمطالعه قراردادند و معادلات پایداری را با استفاده از اصل کارمجازی به دست آوردند و به بررسی ضریب تخلخل برخیز خمشی و بار بحرانی کمانش ورق پرداختند. مجاهدین و همکاران [۹] به بررسی پایداری حرارتی و مکانیکی صفحات دایره‌ای ساخته‌شده از مواد متخلخل مدرج تابعی اشباع همراه با لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از روش انرژی و تئوری کلاسیک ورق پرداختند. آن‌ها همچنین [۱۰] به تحلیل کمانش صفحات نازک دایره‌ای مدرج تابعی ساخته‌شده از مواد فرومغناطیسی متخلخل اشباع در میدان مغناطیسی عرضی پرداختند. آن‌ها در مطالعه بعدی خود [۱۱] به بررسی کمانش حرارتی ورق‌های دایره‌ای همراه با لایه‌های پیزوالکتریک تحت بارگذاری دمایی یکنواخت نیز پرداختند. فرزاد ابراهیمی [۱۲] به بررسی خیز و ارتعاشات آزاد ورق مدرج تابعی متخلخل بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا پرداخت و با استفاده از اصل مینیمم سازی انرژی پتانسیل، معادلات حاکم را به دست آورد و برای حل معادلات حاکم از روش اجزا محدود استفاده کرد و به بررسی ضریب تخلخل و ضریب اسکمپتون در فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شده و خیز بی‌بعد شده پرداخت. چن و یانگ [۱۳] ارتعاشات آزاد و اجباری تیر متخلخل مدرج تابعی را مورد بررسی قراردادند. آن‌ها از تئوری تیر تیموشینکو استفاده کردند و برای حل معادلات حاکم از اصل همیلتون و روش ریلی ریتز استفاده نمودند. آن‌ها [۱۴] همچنین به بررسی خمش استاتیکی و کمانش الاستیک تیرهای متخلخل مدرج تابعی پرداختند و تأثیر پارامترهای مختلف از جمله شرایط مرزی، ضریب لاغری و ضرایب تخلخل را موردبررسی قراردادند. آن‌ها در هر دو تحقیق خود، توزیع تخلخل را به دو صورت غیرخطی نامتقارن و غیرخطی متقارن درنظرگرفتند. ابراهیمی و جعفری [۱۵] ارتعاشات ترمومکانیکی تیر مدرج تابعی همراه با تخلخل را با بارگذاری دمایی مختلف مورد مطالعه قراردادند. آن‌ها همچنین تأثیر چندین پارامتر مختلف از جمله: توزیع تخلخل، شاخص جز حجمی، ضریب تخلخل و همچنین تأثیر دما بر روی فرکانس‌های طبیعی را بررسی نمودند. مجاهدین و جباری [۱۶] به کمانش ورق‌های دایره‌ای مدرج تابعی ساخته‌شده از ماده‌ی متخلخل اشباع بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا پرداختند و تاثیر پارامترهای مختلف از جمله: ضریب تخلخل، ضریب اسکمپتون و انواع توزیع تخلخل را بر روی بار کمانش بحرانی مطالعه نمودند. گله‌بان [۱۷] به بررسی ارتعاشات آزاد تیرهای نازک ساخته‌شده از مواد متخلخل اشباع پرداخت. از تئوری تیر اولر برنولی استفاده نمود و برای مدلسازی رابطه تنش- کرنش از تئوری بایوت استفاده نمود و معادلات حاکم به‌دست‌آمده را برای شرایط مرزی مختلف حل نمود و اثر ضریب تخلخل، ضریب اسکمپتون و سه توزیع مختلف تخلخل را بر روی فرکانس طبیعی بدون بعد بررسی کرد. ابراهیمی و هاشمی [۱۸] به بررسی ارتعاشات تیر دوار باریک شونده ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی متخلخل پرداخت. معادلات حرکت را با توجه به روش تبدیل دیفرانسیلی حل نمود و اثر سرعت دورانی، شاخص جز حجمی و ضریب باریک شوندگی را موردمطالعه قرارداد. چن و همکاران [۱۹] به بررسی ارتعاش آزاد غیرخطی تیر ساندویچی متخلخل مدرج تابعی بر اساس تئوری تیر تیموشینکو پرداختند و تاثیر ضریب تخلخل و توزیع مختلف تخلخل را بررسی نمودند. آن‌ها همچنین [۲۰] به بررسی کمانش مکانیکی ورق مستطیلی متخلخل اشباع مدرج تابعی همراه با لایه‌های پیزوالکتریک پرداختند و این بار تاثیر ولتاژ بر بار کمانش بحرانی را مورد مطالعه قراردادند. مجاهدین [۲۱] به بررسی کمانش مکانیکی ورق مستطیلی متخلخل اشباع مدرج تابعی تحت حرارت پرداخت. از تئوری کلاسیک ورق استفاده نمود و با توجه به مینیمم‌سازی انرژی پتانسیل کلی معادلات حرکت را به دست آورد و به بررسی ضریب اسکمپتون و ضریب تخلخل و درجه حرارت بر بار کمانش بحرانی پرداخت. قربان پور [۲۲] به بررسی ارتعاشات آزاد ورق‌های متخلخل مدرج تابعی که بر روی بستر وینکلر قرارگرفته‌اند، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم پرداخت و از

روش مربعات دیفرانسیلی برای حل معادلات حاکم استفاده کرد و تأثیر ضریب تخلخل بر روی فرکانس طبیعی را بررسی کرد. ازهر [۲۳] به ارتعاشات آزاد تیر مدرج تابعی همراه با تخلخل بر اساس تئوری تیر اولر برنولی و تیموشینکو پرداخت و از روش انتقال ماتریس استفاده کرده و تأثیر پارامترهای مختلف از جمله جز حجمی تخلخل، شرایط مرزی و ضرایب لاغری مختلف را مورد بررسی قراردادند و نشان دادند که با افزایش جز حجمی تخلخل فرکانس طبیعی افزایش پیدا خواهد کرد. فودا [۲۴] خمش، کمانش و ارتعاشات تیر مدرج تابعی همراه با تخلخل را با استفاده از روش اجزای محدود مورد مطالعه و بررسی قرارداد. وی از تئوری اویلر برنولی استفاده کرد و معادلات حاکم بر مسئله را با استفاده از اصل همیلتون به دست آورد و برای حل معادلات از روش اجزای محدود استفاده کرد. مجاهدین [۲۵] به تجزیه وتحلیل حرارتی تیر متخلخل مدرج تابعی پرداخت و تیر را تحت بارگذاری حرارتی مختلف قرارداد و از تئوری تیر تیموشینکو استفاده کرد و درنهایت تأثیر پارامترهای مختلف ازجمله ضریب تخلخل، ضریب اسکمپتون و ضخامت تیر را بر روی خیز تیر مورد مطالعه قرارداد. هایشان تانگ [۲۶] به تحلیل کمانش تیر متخلخل مدرج تابعی دوجهته پرداختند و از تئوری تیر اولر برنولی استفاده نمودند و با استفاده از اصل مینیمم سازی انرژی پتانسیل کلی، معادلات حرکت را به دست آورد و از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته برای حل آن استفاده نمود. چن ویانگ [۲۷] به بررسی ارتعاشات آزاد و کمانش الاستیک تیرهای متخلخل مدرج تابعی تقویت‌شده با نانوورق‌های گرافن پرداختند. از تئوری تیر تیموشینکو استفاده کردند و با استفاده از اصل همیلتون معادلات حاکم بر مسئله رو به دست آورده و برای حل معادلات حاکم از روش ریلی ریتز استفاده نمودند. لی و هانگ [۲۸] به بررسی دینامیکی تیر و قاب ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی متخلخل پرداختند. با استفاده از اصل همیلتون معادلات حاکم را به دست آورده و برای حل معادلات حاکم از روش اجزا محدود استفاده کردند. از هردو تئوری اولر برنولی و تیموشینکو برای تیرها استفاده و در انتها نتایج دو تئوری را با هم مقایسه کردند و نتایج را برای بارگذاری‌های مختلف ازجمله بارگذاری با بار ثابت متمرکز و همچنین بارگذاری با سرعت‌های ثابت مختلف به دست آورده و مقایسه کردند. بابایی وهمکاران به بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری ورق‌های حلقوی و پانل‌های استوانه‌ای [۲۹] و تیر ضخیم [۳۰] ساخته‌شده از مواد متخلخل مدرج تابعی اشباع پرداختند و از روش اجزا محدود وریلی ریتز برای حل معادلات حاکم استفاده نمودند. در پژوهشی دیگر، بابایی وهمکاران [۳۱] به بررسی رفتار استاتیکی وارتعاشات ازاد ورق های حلقوی بیضی شکل ساخته شده از مواد متخلخل اشباع با استقاده از تئوری الاستیسیته ۳ بعدی وروش اجزا محدود پرداختند. همچنین آنها به بررسی رفتار استاتیکی [۳۲] و دینامیکی [۳۳] مخروط های ناقص مدورساخته شده از متخلخل مدرج تابعی اشباع براساس تئوری الاستیسیته دوبعدی متقارن محوری وروش اجزا محدود پرداختند. عاصمی وهمکاران [۳۴] به بررسی تحلیلی استاتیکی، ارتعاشات آزاد و دینامیکی ورق های حلقوی متخلخل تقویت شده با گرافن براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش اجزا محدود پرداختند. کمانش تیر ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی اشباع براساس تغییر شکل برشی مرتبه بالا وروش اجزا محدود توسط بابایی وهمکاران [۳۵] انجام شد. جمشیدی وارغوانی [۳۶] به بهینه سازی چند هدفه توزیع تخلخل در تیر فلزی گیردار برای بهبود رفتارهای کمانش و ارتعاش سازه پرداختند. هدف این روش غیر یکنواخت کردن توزیع تخلخل در سازه به منظور کاهش وزن و بهبود خواص می‌باشد بطوری‌که اگر این توزیع تخلخل به صورتی بهینه و متناسب با نیاز ایجاد شود می تواند باعث کاهش وزن و افزایش استحکام گردد. ونگ وتنگ [۳۷] به بررسی دینامیکی ورق های متخلخل دایروی و حلقوی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداختند. با استفاده از اصل همیلتون معادلات حاکم بدست آمده و از روش سری‌های تعمیم یافته برای حل معادلات حاکم بهره برده شد و تاثیر ضریب تخلخل و نوع توزیع تخلخل بر پاسخ اجباری ورق های دایره ای و حلقوی مورد مطالعه قرار گرفت. ونگ و زو [۳۸] به بررسی ارتعاشات ورق متخلخل مستطیلی با استفاده از تئوری الاستیسیته سه بعدی با شرایط مرزی مختلف پرداخت. از اصل مینیمم سازی انرژی برای بدست آوردن معادلات حاکم استفاده شد و با استفاده از معادلات لاگرانژ و سری فوریه معادلات حاکم را حل کردند و به تاثیر ضریب تخلخل و نوع توزیع تخلخل بر پاسخ اجباری ورق مستطیلی پرداخته شد.

مروری بر پژوهش های انجام شده نشان می‌دهد که تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق مستطیلی ساخته شده از مواد متخلخل مدرج تابعی اشباع شده بررسی نشده است. همچنین در اکثر پژوهش‌ها از قانون ساده هوک برای مدل سازی ورق متخلخل استفاده شده است. دراین تحقیق، تحلیل استاتیکی و دینامیکی ورق متلخل مدرج تابعی اشباع شده براساس تئوری پروالاستیسیته بایوت انجام می‌شود. در تئوری بایوت، افزایش فشار منافذ باعث اتساع حفره‌ها می‌شود و همچنین فشردن حفره‌ها باعث افزایش فشار آنها می‌شود. برای مدلسازی از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش لاگرانژ برای بدست اوردن معادلات حاکم استفاده می‌شود و با استفاده ازروش اجزا محدود معادلات حاکم حل خواهد شد. و در نهایت به بررسی اثر ضریب تخلخل، ضریب اسکمپتون و توزیع مختلف تخلخل بر روی فرکانس‌های طبیعی و همچنین رفتار استاتیکی و دینامیکی ورق خواهیم پرداخت.

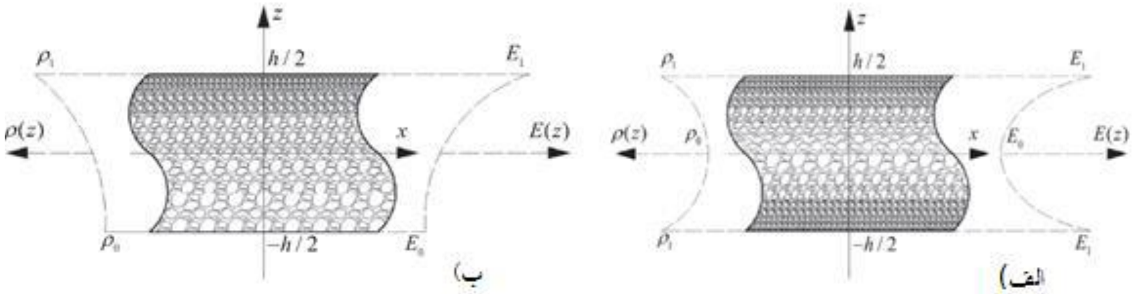
**۲- تعریف هندسه مساله و معادلات حاکم:**

ورقی مستطیل شکل ساخته شده از مواد متخلخل به طول a، پهنای b وضخامت h را در نظر بگیرید. خواص مکانیکی در راستای ضخامت ورق متغیر تعریف شده است (شکل(۱)).




شکل ۱ورق متخلخل مدرج تابعی

خواص مکانیکی مواد متخلخل در راستای ضخامت تغییر خواهند کرد دو نوع مختلف توزیع در راستای ضخامت ورق متخلخل در شکل (۲) نشان داده شده است.




شکل2 دو نوع توزیع متفاوت تخلخل در راستای ضخامت ورق الف)توزیع غیر خطی متقارن ب)توزیع غیر خطی نامتقارن متخلخل

الف)توزیع غیر خطی متقارن تخلخل: روابط بین مدول الاستیسیته، مدول برشی و چگالی در راستای ضخامت برای توزیع غیر خطی متقارن در زیر آمده است [31-33]:

$$E(z) = E_1[1 - e_0 \cos(\frac{\pi z}{h})]$$
$$G(z) = G_1[1 - e_0 \cos(\frac{\pi z}{h})]$$
$$\rho(z) = \rho_1[1 - e_m \cos(\frac{\pi z}{h})] \qquad (۱)$$

ب)توزیع غیر خطی نامتقارن تخلخل: روابط بین مدول الاستیسیته، مدول برشی وچگالی در راستای ضخامت برای توزیع غیر خطی نامتقارن در زیر آمده است[34]:

$$E(z) = E_1[1 - e_0 \cos((\frac{\pi}{2h})(z + \frac{h}{2})]$$
$$G(z) = G_1[1 - e_0 \cos((\frac{\pi}{2h})(z + \frac{h}{2})]$$
$$\rho(z) = \rho_1[1 - e_m \cos((\frac{\pi}{2h})(z + \frac{h}{2})] \qquad (۲)$$

$$e_0 = 1 - \frac{G_0}{G_1} = 1 - \frac{E_0}{E_1} \qquad (۳)$$
$$e_{m=1-\sqrt{1-e_0}}$$

در روابط فوق $e_0$ ضریب تخلخل می‌باشد که مقداری بین صفر و یک دارد ($0 < e_0 < 1$) وهمان‌طور که در شکل قابل مشاهده است، برای توزیع غیر خطی نامتقارن $E_1$ و$G_1$ و $\rho_1$ به ترتیب مدول یانگ، مدول برشی و چگالی برای سطح بالایی ورق و$E_0$ و$G_0$ و$\rho_0$ به ترتیب مدول یانگ، مدول برشی و چگالی برای سطح پایینی ورق هستند.

میدان جابه جایی در نظر گرفته شده برای این مساله بر اساس تئوری برشی مرتبه اول به صورت زیر می‌باشد:

(۴)

$$u(x,y,z,t) = u_{0(x,y)} + z\theta_x(x,y,t)$$
$$v(x,y,z,t) = v_{0(x,y)} + z\theta_y(x,y,t)$$
$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t)$$

که در روابط فوق، u، v، w، به ترتیب مولفه های جابه‌جایی ورق در راستاهای x، y، z بوده و$\theta_x$،$\theta_y$ توابع چرخش صفحه میانی در جهتx، y و توابع$u_0$،$v_0$، $w_0$ جابه‌جایی‌های صفحه میانی در راستاهایx، y، z و همچنین t نشان‌دهنده زمان می‌باشد. با فرض خطی بودن کرنش، روابط بین کرنش‌ها و جابه‌جایی‌های ورق عبارتست از:

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \qquad (۵)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \qquad (۶)$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z\frac{\partial \theta_y}{\partial y}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + z(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x})$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y$$

روابط تنش-کرنش برای سازه ساخته شده از مواد متخلخل طبق رابطه ساختاری پروالاستیک بایوت بصورت زیر است:

$$\sigma_{i\,j} = 2G\varepsilon_{i\,j} + \lambda\varepsilon_{k\,k}\delta_{i\,j} - \rho\alpha\delta_{i\,j} \qquad (۷)$$

که در آن $\delta_{i\,j}$ دلتای کرونکر می‌باشد .

(۸)

$$\rho = M(\zeta - \alpha\varepsilon_{k\,k})$$
$$M = \frac{2G(\nu_u - \nu)}{\alpha^2(1-2\nu_u)(1-2\nu)}$$
$$\nu_u = \frac{\nu + \alpha\beta(1-2\nu)/3}{1 - \alpha\beta(1-2\nu)/3}$$

که $\rho$ فشار سیال داخل حفرات، M مدول بایوت، G(z) مدول برشی و $\nu_u$ ضریب پواسون در حالتی که از حفرات، سیال خارج نمی‌شود (تخلیه نشده) است. که$0.5 < \nu_u < \nu$ است و$\alpha$ ضریب بایوت تنش موثر است که $0 < \alpha < 1$ است.$\varepsilon$ کرنش حجمی و $\xi$ تغیرات در محتوای حجم سیال است.

نسبت پواسون در حالت کلی به صورت نسبت کرنش عرضی به کرنش طولی (محوری)تعریف می‌شود. بطور کلی، تغییر شکل در حالت‌های تخلیه شده و تخلیه نشده‌ی مواد متخلخل متفاوت است، پس برای معرفی این پارامتر در مواد متخلخل تفاوت قائل بوده و می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\nu = \frac{\varepsilon_{jj}}{\varepsilon_{ii}} | \sigma_{ii} = 0, \rho = 0, i \neq j \qquad (۹)$$

$$\nu_u = \frac{\varepsilon_{jj}}{\varepsilon_{ii}} | \sigma_{ii} = 0, \zeta = 0, i \neq j$$

ضریب بایوت ($\alpha$) تاثیر تخلخل بر رفتار ماده متخلخل بدون سیال را تعریف می‌کند و بیانگر این است که دراثر ایجاد تخلخل، مقاومت بدنه چند درصد تغییر می‌کند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha = 1 - \frac{k}{k_s} \qquad (۱۰)$$

$k_s$ مدول بالک ماده همسانگرد همگن می‌باشد . مدول بالک نیز تراکم پذیری یک ماده را نشان می‌دهد. رابطه‌ی مدول بالک با مدول برشی به صورت زیر می‌باشد :

$$k = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \qquad (۱۱)$$

$$ku = \frac{2(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} G$$

ضریب اسکمپتون پارامتر بی‌بعد بسیار مهمی برای توصیف تاثیر سیال درون حفرات بر رفتار ماده‌ی متخلخل در حالت تخلیه نشده $\zeta = 0$ می‌باشد و به صورت نسبت فشار حفره به تنش حجمی کل جسم می‌باشد.

$$\beta = \frac{d\rho}{d\sigma} | (\xi = 0) = \frac{1}{1 + e_0(\frac{c_p}{c_s})} = \frac{k_u - k}{\alpha k_u} \qquad (۱۲)$$

که در آن $k_u$ مدول بالک حالت تخلیه نشده، k مدول بالک حالت تخلیه شده ، $c_p$ تراکم‌پذیری سیال درون حفره و $c_s$ تراکم‌پذیری جامد هستند. این ضریب همچنین تاثیر تراکم‌پذیری سیال بر روی مدول الاستیک و تراکم پذیری کل ماده متخلخل را نشان می‌دهد.

با توجه به قانون هوک در این حالت فرم روابط کلی تنش و کرنش چنین می‌باشد:

$$\sigma = D\varepsilon \qquad (۱۳)$$

و در نهایت با در نظر گرفتن حالت تنش صفحه ای برای ورق مورد نظر روابط تنش – کرنش را می توان به شکل زیر نوشت:

(۱۴)

$$\sigma_{xx} = \frac{E(z)}{(1-v^2)}(\varepsilon_{xx} + v\varepsilon_{yy}) + \alpha^2 M(\varepsilon_{xx})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E(z)}{(1-v^2)}(\varepsilon_{yy} + v\varepsilon_{xx}) + \alpha^2 M(\varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{xy} = G(z)\gamma_{xy}$$

$$\sigma_{xz} = KG(z)\gamma_{xz}$$

$$\sigma_{yz} = KG(z)\gamma_{yz}$$

## ۳- فرم ماتریسی معادلات حاکم

### ۳-۱ فرم ماتریسی روابط کرنش – تغییر مکان

بردار جابجایی بصورت ماتریسی عبارتست از :

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} w \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ v_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = [z][\bar{U}] \qquad (۱۵)$$

که در آن:

(۱۶)

$$\left[\overline{U}\right] = \begin{bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ v_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \quad [z] = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,Z\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,Z \end{bmatrix},$$

$\overline{U}$ بردار تغییر مکان گره ای است.

بازنویسی روابط (۶) به صورت ماتریسی منجر به روابط زیر خواهد شد:

(۱۷)

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

که می توان رابطه فوق را به صورت زیر نیز نوشت:

(۱۸)

$$[\varepsilon] = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^m{}_{xx} \\ \varepsilon^m{}_{yy} \\ \gamma^m{}_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon^f{}_{xx} \\ \varepsilon^f{}_{yy} \\ \gamma^f{}_{xy} \end{Bmatrix}$$

که در آن :

(۱۹)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^f{}_{xx} \\ \varepsilon^f{}_{yy} \\ \gamma^f{}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{bmatrix} = \left[Z_f\right][\overline{\varepsilon}]$$

(۲۰)

$$\left[z_f\right] = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

همچنین می‌توان ماتریس $[\overline{\varepsilon}]$ را بصورت زیر نیز بازنویسی نمود:

(۲۱)

$$[\overline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} 0\,0\,0\,\dfrac{\partial}{\partial x}\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,\dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0\,0\,0\,\dfrac{\partial}{\partial y}\,\dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ v_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \left[d_f\right]\left[\overline{U}\right]$$

که در آن:

(۲۲)

$$d_f = \begin{bmatrix} 0\,0\,0\,\dfrac{\partial}{\partial x}\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,\dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0\,0\,0\,\dfrac{\partial}{\partial y}\,\dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

با جایگذاری معادله (۲۱) در (۱۹)، برای فرم ماتریسی کرنش داریم:

(۲۳)

$$[\varepsilon] = \left[z_f\right]\left[d_f\right]\left[\overline{U}\right]$$

به همین ترتیب فرم ماتریسی روابط کرنش- تغییر مکان لایه میانی به صورت بدست می‌آید:

(۲۴)

$$\begin{bmatrix} {\varepsilon^m}_{xx} \\ {\varepsilon^m}_{yy} \\ {\gamma^m}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} = [Z_m][\bar{\varepsilon}]$$

$$[z_m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین :

$$[\varepsilon] = [z_m][\bar{\varepsilon}]$$ (۲۵)

حالا مجددا ماتریس $[\bar{\varepsilon}]$ را بازنویسی می‌کنیم :

(۲۶)

$$[\bar{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ v_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = [d_m][\bar{U}]$$

که در آن:

(۲۷)

$$d_m = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با جایگذاری معادله (۲۶) در (۲۵) برای فرم ماتریسی کرنش داریم :

$$[\varepsilon] = [z_m][d_m][\bar{U}]$$ (۲۸)

به همین ترتیب فرم ماتریسی روابط کرنش – تغییر مکان برشی بصورت زیر می‌شود:

(۲۹)

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{bmatrix}$$

(۳۰)

$$[Z_c] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [\bar{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon] = [z_c][\bar{\varepsilon}]$$ (۳۱)

(۳۲)

$$d_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0\,0\,1\,0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0\,0\,0\,1 \end{bmatrix}_c \begin{bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ v_0 \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = [d_c][\bar{U}] \quad (۳۳)$$

$$[\varepsilon] = [z_c][d_c][\bar{U}] \quad (۳۴)$$

### ۲-۳ فرم ماتریسی روابط تنش –کرنش

با توجه به رابطه (۱۳)، قانون هوک و با بازنویسی روابط کلی تنش –کرنش به صورت ماتریسی داریم:

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] = [D][z][d][\bar{U}] \quad (۳۵)$$

که در آن ماتریس های $[\sigma]$ و $[\varepsilon]$ و $[D]$ عبارتند از :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} & \sigma_{yz}\end{bmatrix}^T \quad (۳۶)$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz}\end{bmatrix}^T$$

(۳۷)

$$[D]_f = \frac{E(z)}{1-v^2}\begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} + M\alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[D]_c = \begin{bmatrix} KG(z) & 0 \\ 0 & KG(z) \end{bmatrix}$$

### ۳-۳ تقریب میدان جابجایی

در این مسئله فرض می‌شود، هر المان از ورق دارای ۲۰ درجه آزادی می‌باشد. در صورتی که $Q^{(e)}$ ماتریس درجات آزادی المان ورق در نظر گرفته شود و $N(\zeta,\eta)$ ماتریس توابع شکل باشد .در این صورت تقریب جابه جایی در هر المان مربعی شکل چهار گرهی خطی از ورق به شکل زیر می‌باشد :

$$[\bar{U}]^{(e)} = [N(\zeta,\eta)][Q]^{(e)} \quad (۳۸)$$

$[Q^e]$ بردار جابه‌جایی‌های گره‌ای المان است که شامل $u_0, v_0 w, \theta_x, \theta_y$ است.

میدان جابجایی توسط توابع شکل بصورت زیر تقریب زده می‌شوند:

(۳۹)

$$w = \sum_{i=1}^{n} N_i w_i$$

$$u_0 = \sum_{i=1}^{n} N_i(\zeta,\eta) u_{0i}$$

$$v_0 = \sum_{i=1}^{n} N_i(\zeta,\eta) v_{0i}$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^{n} N_i(\zeta,\eta) \theta_{xi}$$

$$\theta_y = \sum_{i=1}^{n} N_i(\zeta,\eta) \theta_{yi}$$

که در روابط فوق توابع شکل$N_i$ برای یک المان چهارگوش است. این المان توسط چهارگره در مختصات طبیعی $(\zeta,\eta)$ تعریف شده است . می توان با توجه به رابطه (۳۸)، کرنش را بر حسب توابع شکل بازنویسی کرد :

$$[\varepsilon] = [z][d][N][Q] \quad (۴۰)$$

در صورتی که ماتریس B مطابق با رابطه زیر بیانگر مشتق ماتریس توابع شکل بر حسب x,y باشد، داریم :

$$[B]=[d][N] \tag{۴۱}$$

$$[\bar{\varepsilon}]=[B][Q^{(e)}] \tag{۴۲}$$

$$[\varepsilon]=[z][B][Q^{(e)}] \tag{۴۳}$$

فرم دیگر رابطه (۳۵) بر حسب توابع شکل به فرم زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix}=[D_f][Z][B_f][Q^{(e)}]+[D_f][I][B_m][Q^{(e)}] \tag{۴۴}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{bmatrix}=[D_c][I][B_c][Q^{(e)}]$$

.

## ۴ بدست آوردن فرم المان محدود مساله

### ۴-۱ فرم ماتریس انرژی جنبشی سیستم

از رابطه انرژی جنبشی برای هر المان داریم:

$$\begin{aligned}T^{(e)}&=\frac{1}{2}\iiint \dot{\bar{u}}^T\rho(z)\dot{\bar{u}}dv\\ &=\frac{1}{2}\iiint \dot{\bar{u}}^T\rho(z)\dot{\bar{u}}dxdydz\\ &=\frac{1}{2}\iiint [\dot{\bar{U}}]^T[z]^T\rho(z)[z][\dot{\bar{U}}]dxdy\,dz\\ &=\frac{1}{2}\iiint [\dot{\bar{U}}]^T(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}[z]^T\rho(z)[z]dz)[\dot{\bar{U}}]dxdy\\ &=\frac{1}{2}\int_0^b\int_0^a[\dot{Q}^e]^T[N]^T[\bar{z}][N][\dot{Q}^e]dxdy\end{aligned} \tag{۴۵}$$

که در آن:

$$[\bar{z}]=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}[z]^T\rho(z)[z]dz \tag{۴۶}$$

در رابطه ۴۵، ماتریس جرم برای هر المان ورق $[M^{(e)}]$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$[M^{(e)}]=\int_0^b\int_0^a[N]^T[\bar{z}][N]dxdy \tag{۴۷}$$

بعد از برهم نهی[1] ماتریس‌های جرم هر المان $[M^{(e)}]$، فرم ماتریسی انرژی جنبشی کل سیستم بصورت زیر بدیست می‌آید:

$$T=\frac{1}{2}[\dot{Q}]^T[M][\dot{Q}] \tag{۴۸}$$

### ۴-۲ فرم ماتریسی انرژی پتانسیل سیستم

انرژی پتانسیل سیستم برای هر المان ورق عبارتست از:

$$U^{(e)}=\frac{1}{2}\iiint \varepsilon^T\sigma dv=\frac{1}{2}\iiint \varepsilon^T\sigma+\gamma^T\tau\,dv \tag{۴۹}$$

[1] Assembling(The element Matrices)

در نتیجه می توان رابطه (۳۳) را به طور زیر ساده کرد:

$$\varepsilon = [z_m][B_m][Q] + [z_f][B_f][Q] \tag{۵۰}$$

حال انرژی های پتانسیل $U^{(e)}$ را بسط می‌دهیم:

$$U = \frac{1}{2}\int_A Q^T \int_z [{B_m}^T Z^T{}_m D Z_m B_m + {B_m}^T Z^T{}_m D Z_f B_f + {B_f}^T {Z_f}^T D Z_m B_m + {B_f}^T {Z_f}^T D Z_f B_f] dzQdA + \frac{1}{2}\int_A Q^T \int_z [{B_c}^T {Z_c}^T D_c Z_c B_c] dzQdA \tag{۵۱}$$

$$D = D_1 + D_2 = \frac{E(z)}{1-v^2}\begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-v}{2} \end{bmatrix} + M\alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۵۲}$$

حال ماتریس سفتی هر المان به اجزای زیر تجزیه می‌شود:

$$K^{(e)} = {K_{mm}}^{(e)} + {K_{mf}}^{(e)} + {K_{fm}}^{(e)} + {K_{ff}}^{(e)} + {K_{cc}}^{(e)} \tag{۵۳}$$

که در آن ${K_{mm}}^{(e)}$ جز غشایی از ماتریس سفتی، ${K_{mf}}^{(e)}$و ${K_{fm}}^{(e)}$ اجزای تزویج غشایی – خمشی و ${K_{ff}}^{(e)}$ جز خمشی و ${K_{cc}}^{(e)}$ جز برشی به صورت زیر هستند :

$$\begin{aligned}
{k_{mm}}^{(e)} &= \int_A {B_m}^T {Z_m}^T D_1 Z_m B_m + {B_m}^T {Z_m}^T D_2 Z_m B_m \, dA \\
{k_{mf}}^{(e)} &= \int_A {B_m}^T {Z_m}^T D_1 Z_f B_f + {B_m}^T {Z_m}^T D_2 Z_f B_f \, dA \\
{k_{fm}}^{(e)} &= \int_A {B_f}^T {Z_f}^T D_1 Z_m B_m + {B_f}^T {Z_f}^T D_2 Z_m B_m \, dA \\
{k_{ff}}^{(e)} &= \int_A {B_f}^T {Z_f}^T D_1 Z_f B_f + {B_f}^T {Z_f}^T D_2 Z_f B_f \, dA \\
{k_{cc}}^{(e)} &= \int_A {B_c}^T {Z_c}^T D_c Z_c B_c \, dA
\end{aligned} \tag{۵۴}$$

که دامنه تغییرات z از-h/2 تا h/2 می‌باشد.

بعد از برهم نهی ماتریس‌های سفتی برای هر المان ورق$[k^e]$ فرم ماتریسی انرژی پتانسیل سیستم بصورت زیر می‌شود:

$$U = \frac{1}{2}[Q]^T[k][Q] \tag{۵۵}$$

### ۳-۴ فرم ماتریسی کار مجازی نیرو های غیر پایستار سیستم

در صورتی که $P(t)$ نیروی عرضی گسترده خارجی وارده بر ورق و w مقدار جابه‌جایی در راستای z باشد. در این صورت کار انجام شده ،به شکل زیر تعریف می‌شود :

$$\{f\} = p(t)[1\ 0\ 0\ 0\ 0] \tag{۵۶}$$

$$w_f^{(e)} = \frac{1}{2}\iint f\, w\, dA = \frac{1}{2}\iint f\, w\, dxdy = \frac{1}{2}[Q^e]^T\left(\int_0^b\int_0^a \left[\overline{N}\right]^T \{f\} dxdy\right) \tag{۵۷}$$

با توجه به اینکه نیرو در راستای عرضی به ورق اثر می‌کند . بنابراین ماتریس توابع شکل $\left[\overline{N}\right]$ به صورت زیر در نظر گرفته خواهد شد.

$$\left[\overline{N}\right] = \begin{bmatrix} N_1\ 0\ 0\ 0\ 0\ N_2\ 0\ 0\ 0\ 0\ N_3\ 0\ 0\ 0\ 0\ N_4\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{bmatrix} \tag{۵۸}$$

در معادله فوق عبارت داخل پرانتز را ماتریس نیروی خارجی برای هر المان می‌نامیم:

$$\{F^{(e)}\}=\int_0^b\int_0^a\left[\overline{N}\right]^T\{f\}dxdy \tag{۵۹}$$

بعد از برهم نهی ماتریس‌های نیروی خارجی برای هر المان ورق $\{F^{(e)}\}$ فرم ماتریسی کار مجازی کل بصورت زیر بدست می‌آید:

$$[w_f]=\frac{1}{2}[Q^e]^T\{F\} \tag{۶۰}$$

**۴-۵ فرم ماتریسی معادلات لاگرانژ**

در صورتی که مطابق با معادله لاگرانژ $U$و$T$ انرژی جنبشی و کرنش سیستم به ترتیب در معادلات (۴۵) و (۵۱) باشند، طبق معادلات لاگرانژ خواهیم داشت:

(۶۱)

$$\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}}\right)\right\}=[M][\ddot{Q}]$$
$$\left\{\frac{\partial U}{\partial Q}\right\}=[k][Q]$$

بنابراین معادلات حرکت به فرم ماتریسی زیر می‌باشد:

$$[M][\ddot{Q}]+[k][Q]=\{F\} \tag{۶۲}$$

سرانجام برای تحلیل دینامیکی از روش نیومارک برای حل معادله حاکم در زمان استفاده می‌شود و برای تحلیل استاتیکی، معادله به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[k][Q]=\{F\} \tag{۶۳}$$

برای محاسبه ارتعاشات آزاد ورق، مساله مقدار ویژه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[k]-\omega^2[M]=0 \tag{۶۴}$$

**۵-ارائه نتایج:**

در این بخش به ارائه و تحلیل نتایج مربوط به تحلیل استاتیکی، دینامیکی و ارتعاشات آزاد ورق های مستطیلی متخلخل پرداخته شده است. در ابتدا برای بررسی صحت روش حل انجام شده، نتایج و داده های حاصله از این تحقیق با نتایج بدست آمده از نرم افزار انسیس مقایسه شده است. این اعتبار سنجی در قالب جداولی برای داده های مربوط به فرکانس طبیعی و خیز استاتیکی ورق انجام شده است. سپس به بررسی تاثیر پارامترهای موثر بر روی فرکانس طبیعی و رفتار استاتیکی و دینامیکی ورق که عبارتند از: ضریب تخلخل، ضریب اسکمپتون، ضخامت ورق، ابعاد ورق، توزیع تخلخل و شرایط مرزی مختلف پرداخته می‌شود.

**۱-۵ اعتبار سنجی نتایج ارائه شده:**

مثال ۱: برای اعتبار سنجی نتایج حاصل از تحقیق حاضر، از نتایج نرم افزار انسیس استفاده شده است. بدین منظور ضریب تخلخل و اسکمپتون در تحقیق حاضر برابر با صفر درنظر گرفته شده است و فرکانس‌های طبیعی اول تا چهارم سازه برای شرایط مرزی مختلف بدست آمده و در جدول ۱ مقایسه شده است. همچنین بیشینه خیز استاتیکی ورق با تکیه‌گاه‌های گیردار برای ضخامت‌های مختلف در جدول ۲ مقایسه شده است. همانطور که در جداول ۱و۲ مشاهده می‌شود، تطابق بسیار خوبی بین نتایج حاضر و نتایج حاصله از نرم افزار وجود دارد.

جدول (۱) مقایسه فرکانس‌های طبیعی به ازای شرایط مرزی مختلف (e0=0و β=0وh=0.01و a=b=1)

| شرایط مرزی | فرکانس | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| c-c-c-c | ANSYS | ۸۷,۶۵ | ۱۷۵,۷۰۰ | ۱۷۵,۷۹۶۱ | ۲۶۰,۸۱۲۱ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| c-c-c-c | تحقیق حاضر | ۸۷,۹۵۳۶ | ۱۸۱,۱۱۲۳ | ۱۸۱,۱۱۲۳ | ۲۶۶,۹۷۰۱ |
| s-s-s-s | ANSYS | ۴۹,۳۴۴۳ | ۱۲۰,۲۵۲۷ | ۱۲۰,۲۸۶۱ | ۱۹۴,۵۳۵۰ |
| s-s-s-s | تحقیق حاضر | ۴۸,۱۰۶۰ | ۱۲۱,۰۷۱۵ | ۱۲۱,۰۷۱۵ | ۱۹۳,۸۰۶۸ |
| s-c-s-c | ANSYS | ۷۰,۵۳۹۰ | ۱۳۱,۸۲۴۸ | ۱۶۶,۳۱۶۹ | ۲۲۸,۷۳۷۴ |
| s-c-s-c | تحقیق حاضر | ۷۰,۷۱۸۷ | ۱۳۴,۲۱۲۶ | ۱۷۱,۲۸۳۰ | ۲۳۲,۹۴۸۹ |
| c-f-c-f | ANSYS | ۵۲,۶۸۰۲ | ۶۵,۰۶۷ | ۱۱۴,۴۸۴۹ | ۱۴۵,۸۶۲۳ |
| c-f-c-f | تحقیق حاضر | ۵۴,۲۶۹۰ | ۶۴,۴۴۶۲ | ۱۰۶,۱۳۴۴ | ۱۵۱,۶۳۰۴ |

جدول(۲) مقایسه خیز استاتیکی $(e_0 = \beta = 0, a = b = 1, c - c - c - c)$

| | $w_{max}$ | $w_{max}$ |
|---|---|---|
| h(m) | 0.01 | 0.1 |
| تحقیق حاضر | 0.0689 | 8.1784e-5 |
| نرم افزار | 0.066716 | 7.9913e-5 |

مثال ۲: در این مثال به مقایسه نتایج فرکانس طبیعی ورق ضخیم متخلخل حاصل از این تحقیق با مرجع [۳۹] خواهیم پرداخت. برای این منظور ابعاد و خواص مشابه مرجع استفاده شده است. فرکانس‌های طبیعی اساسی  برای شرایط مرزی و ضرایب تخلخل مختلف محاسبه و با نتایج مرجع در جدول ۳ مقایسه شده است. همانطور که از جدول مشخص هست نتایج حاضر تطابق خوبی با مرجع دارد.

جدول (۳) مقایسه فرکانس‌های طبیعی با [39] به ازای شرایط مرزی مختلف

| Boundary condition | $e_0$ | REFRENCE[39] | PRESENT |
|---|---|---|---|
| SSSS | 0.2 | 1545 | 1572 |
| | 0.4 | 1520 | 1528 |
| | 0.6 | 1500 | 1508 |
| SCSC | 0.2 | 2200 | 2236 |
| | 0.4 | 2125 | 2131 |
| | 0.6 | 2050 | 2075 |
| SCSS | 0.2 | 1520 | 1532 |
| | 0.4 | 1500 | 1509 |
| | 0.6 | 1486 | 1497 |
| SFSS | 0.2 | 998 | 1013 |
| | 0.4 | 978 | 991 |
| | 0.6 | 950 | 982 |
| SFSF | 0.2 | 760 | 766 |
| | 0.4 | 755 | 764 |
| | 0.6 | 745 | 755 |

### ۵-۲ ارائه نتایج تحقیق حاضر:

در این بخش به ارائه نتایج تحقیق حاضر در مورد تحلیل استاتیکی، دینامیکی و ارتعاش آزاد ورق متخلخل مدرج تابعی پرداخته می‌شود.

#### ۵-۲-۱ نتایج ارتعاش آزاد:

شش فرکانس طبیعی اول ورق مربعی دارای تکیه‌گاه‌های گیردار در هر چهار طرف و به ازای ضرایب تخلخل و ضخامت‌های متفاوت و برای توزیع غیرخطی متقارن و نامتقارن تخلخل به ترتیب در جداول (۴) و (۵) نشان داده شده است. همانطور که در این جداول مشخص است با افزایش ضریب

تخلخل فرکانس طبیعی برای توزیع غیر خطی متقارن افزایش پیدا می‌کند. این در حالی است که افزایش ضریب تخلخل برای توزیع غیر خطی نامتقارن سبب کاهش فرکانس طبیعی خواهد شد. علت این امر به خاطر این است که اگر چه با افزایش ضریب تخلخل ماتریس سفتی و جرم کاهش می یابد، اما سرعت کاهش ماتریس سفتی در مقایسه با ماتریس جرم برای توزیع غیر خطی متقارن کمتر است. در حالی که برای توزیع غیرخطی نامتقارن بر عکس این حالت است. همچنین همانطور که در این جداول مشخص است با افزایش ضخامت ورق، سفتی خمشی و بالطبع فرکانس‌های طبیعی افزایش یافته‌اند.

شش فرکانس طبیعی اول ورق با ضریب تخلخل($e_0 = 0.5$) و شرایط مرزی گیردار به ازای ضرایب اسکمپتون و ضخامت مختلف در جداول (۶) و (۷) به ترتیب برای دو توزیع غیرخطی متقارن و غیرخطی نامتقارن نشان داده شده است. همانطور که مشخص است با افزایش ضریب اسکمپتون مقدار فرکانس طبیعی افزایش پیدا خواهد کرد و علت آن افزایش ماتریس سفتی بدلیل افزایش فشار منافذ خواهد بود.

فرکانس‌های طبیعی ورق مربعی با توزیع تخلخل غیر خطی متقارن برای شرایط مرزی مختلف در جدول ۸ نشان داده شده است. همانطور که در این جدول مشخص است، بیشترین فرکانس طبیعی مربوط به شرط مرزی (c-c-c-c) چهار طرف گیردار وکمترین فرکانس طبیعی مربوط به شرط مرزی(s-s-s-s) چهار طرف ساده بدست آمده است. در جدول ۹ به بررسی اثر توزیع تخلخل بر فرکانس طبیعی ورق با تکیه‌گاه‌های گیردار پرداخته شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، مقدار فرکانس‌های طبیعی برای توزیع غیرخطی متقارن تخلخل بیشتر از توزیع غیرخطی نامتقارن می‌باشد. همچنین توزیع یکنواخت تخلخل کمترین فرکانس را دارد.

جدول (۴)بررسی اثرضریب تخلخل بر روی فرکانس طبیعی ورق برای توزیع غیر خطی متقارن تخلخل a=b=1, β=0.5

| c-c-c-c- | h/b | $e_0$ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.01 | 0 | 87.9406 | 181.0846 | 181.0846 | 266.9367 | 330.4802 | 332.0608 |
| | | 0.2 | 88.6393 | 182.5810 | 182.5810 | 268.5883 | 333.4955 | 335.0791 |
| | | 0.5 | 90.6023 | 186.6949 | 186.6949 | 273.8184 | 341.4099 | 343.0146 |
| | | 0.8 | 95.8576 | 197.5705 | 197.5705 | 288.9749 | 361.5716 | 363.2584 |
| | 0.1 | 0 | 794.8736 | 1.5276e+3 | 1.5276e+3 | 2.1385e+3 | 2.5523e+3 | 2.5771e+3 |
| | | 0.2 | 795.7292 | 1.5233e+3 | 1.5233e+3 | 2.1246e+3 | 2.5355e+3 | 2.5605e+3 |
| | | 0.5 | 801.9319 | 1.5230e+3 | 1.5230e+3 | 2.1109e+3 | 2.5158e+3 | 2.5411e+3 |
| | | 0.8 | 829.1880 | 1.5554e+3 | 1.5554e+3 | 2.1390e+3 | 2.5392e+3 | 2.5658e+3 |

جدول (۵)بررسی اثر ضریب تخلخل بر روی فرکانس طبیعی ورق برای توزیع غیرخطی نامتقارن تخلخل a=b=1 , β=0.5

| **c-c-c-c-** | **h/b** | $e_0$ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.01 | 0 | 87.9406 | 181.0846 | 181.0846 | 266.9367 | 330.4802 | 332.0608 |
| | | 0.2 | 86.9854 | 179.2273 | 179.2273 | 263.3026 | 327.6030 | 329.1484 |
| | | 0.5 | 84.4811 | 174.2438 | 174.2438 | 254.5007 | 319.3382 | 320.8054 |
| | | 0.8 | 77.7934 | 160.6552 | 160.6552 | 233.0218 | 295.4124 | 296.7166 |
| | 0.1 | 0 | 794.8736 | 1.05276e+3 | 1.5276e+3 | 2.1385e+3 | 2.5523e+3 | 2.5771e+3 |
| | | 0.2 | 783.6672 | 1.5032e+3 | 1.5032e+3 | 2.0969e+3 | 2.5082e+3 | 2.5324e+3 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0.5 | 758.3079 | 1.4513e+3 | 1.4513e+3 | 2.0137e+3 | 2.4186e+3 | 2.4415e+3 |
| | | 0.8 | 702.7301 | 1.3494e+3 | 1.3494e+3 | 1.8660e+3 | 2.2602e+3 | 2.2803e+3 |

جدول(۶)بررسی اثر ضریب اسکمپتون بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق برای توزیع غیر خطی متقارن تخلخل a=b , $e_0 = 0.5$

| c-c-c-c | h/b | $\beta$ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.01 | 0 | 88.2391 | 181.6674 | 181.6674 | 267.7419 | 331.4591 | 333.0489 |
| | | 0.3 | 89.5836 | 184.5310 | 184.5310 | 271.1967 | 337.1245 | 338.7234 |
| | | 0.5 | 90.6023 | 186.6994 | 186.6994 | 273.8184 | 341.4099 | 343.0146 |
| | | 0.7 | 91.7462 | 189.1333 | 189.1333 | 276.7665 | 346.2156 | 347.8261 |
| | 0.1 | 0 | 784.4089 | 1.4935e+3 | 1.4935e+3 | 2.0796e+3 | 2.4708e+3 | 2.4961e+3 |
| | | 0.3 | 794.4091 | 1.5104e+3 | 1.5104e+3 | 2.0975e+3 | 2.4966e+3 | 2.5220e+3 |
| | | 0.5 | 801.9319 | 1.5230e+3 | 1.5230e+3 | 2.1109e+3 | 2.5158e+3 | 2.5411e+3 |
| | | 0.7 | 810.3240 | 1.5371e+3 | 1.5371e+3 | 2.1259e+3 | 2.5369e+3 | 2.5623e+3 |

جدول(۷) بررسی اثر ضریب اسکمپتون بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق برای توزیع غیرخطی نامتقارن a=b=1 , $e_0 = 0.5$

| c-c-c-c | h/b | $\beta$ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.01 | 0 | 80.1896 | 165.1253 | 165.1253 | 243.4052 | 301.3598 | 302.8008 |
| | | 0.3 | 82.5615 | 170.1724 | 170.1724 | 249.5213 | 311.3322 | 312.7884 |
| | | 0.5 | 84.4811 | 174.2438 | 174.2438 | 254.5007 | 319.3382 | 320.8054 |
| | | 0.7 | 86.7720 | 179.0889 | 179.0889 | 260.4777 | 328.8231 | 330.3017 |
| | 0.1 | 0 | 725.1591 | 1.3938e+3 | 1.3938e+3 | 1.9514e+3 | 2.3294e+3 | 2.3521e+3 |
| | | 0.3 | 743.5898 | 1.4260e+3 | 1.4260e+3 | 1.9861e+3 | 3.3796e+3 | 2.4024e+3 |
| | | 0.5 | 758.3079 | 1.4513e+3 | 1.4513e+3 | 2.0137e+3 | 2.4186e+3 | 2.4415e+3 |
| | | 0.7 | 775.6388 | 1.4807e+3 | 1.4807e+3 | 2.0460e+3 | 2.4632e+3 | 2.4861e+3 |

جدول(۸) بررسی اثر شرایط مرزی مختلف بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق برای توزیع غیرخطی متقارن تخلخل، a=b=1 $h = 0.01$و$e_0 = \beta = 0.5$

| | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| c-c-c-c | 90.6023 | 186.6994 | 186.6994 | 273.8184 | 341.4099 | 343.0146 |
| s-s-s-s | 49.1044 | 124.3242 | 124.3242 | 197.7891 | 253.2763 | 253.2763 |
| c-f-c-f | 56.3667 | 66.2795 | 108.4597 | 157.4250 | 171.3321 | 200.9353 |
| c-s-c-s | 72.7027 | 137.8726 | 176.6158 | 238.5258 | 261.8943 | 335.4650 |

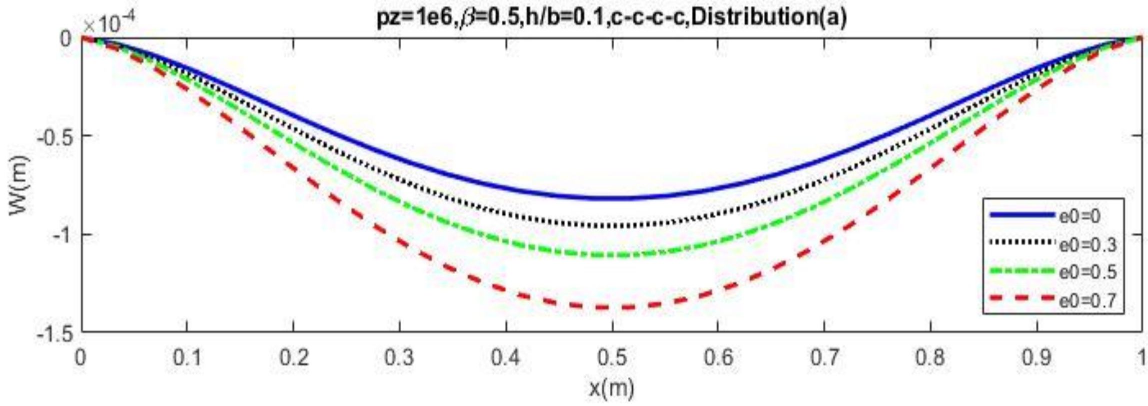
جدول (۹)

بررسی اثر نوع توزیع مختلف تخلخل بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق، a=b=1، $h = 0.01$ و $e_0 = \beta = 0.5$

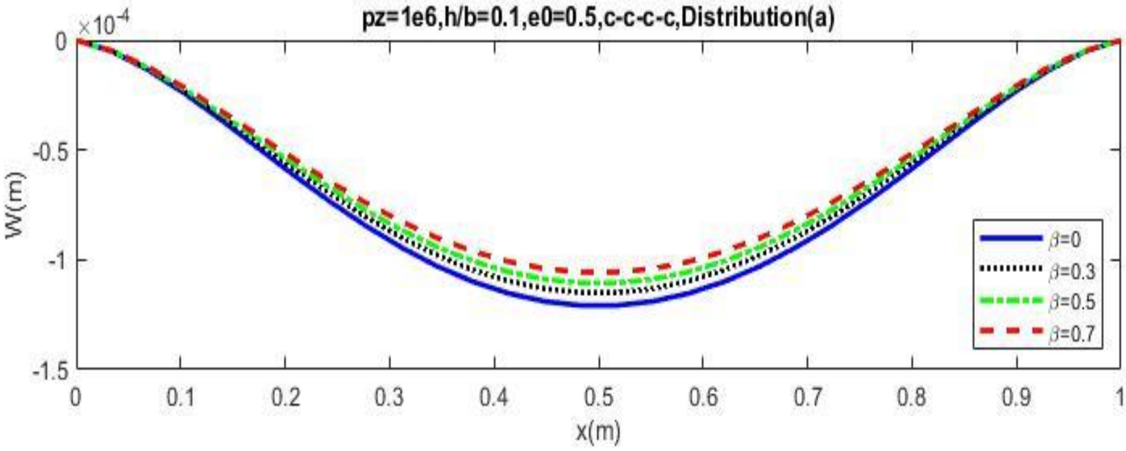
| c-c-c-c | Di | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | PNND | 84.4811 | 174.2438 | 174.2438 | 254.5007 | 319.3382 | 320.8054 |
| | PSND | 90.6023 | 186.6994 | 186.6994 | 273.8184 | 341.4099 | 343.0146 |
| | PUD | 80.8966 | 167.0563 | 167.0563 | 242.4139 | 307.0835 | 308.4463 |

### ۵-۲-۲ نتایج تحلیل استاتیکی:

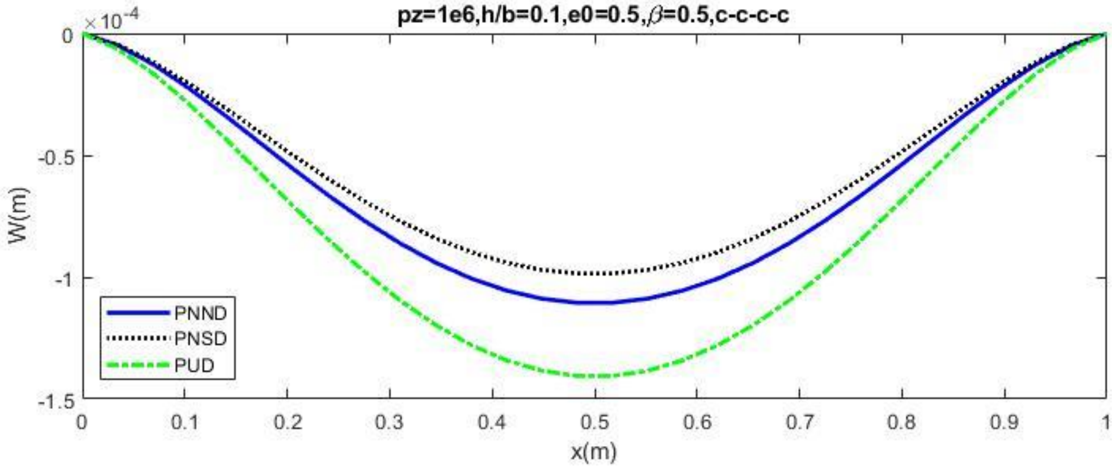
در این قسمت به ارائه نتایج تحلیل استاتیکی ورق مربعی متخلخل مدرج تابعی تحت بار عرضی گسترده به مقدار ۱ مگاپاسکال پرداخته می‌شود. شکل(۳) بیانگر جابه‌جایی عرضی خط میانی ورق چهار طرف گیردار با توزیع غیرخطی متقارن تخلخل و برای مقادیر مختلف تخلخل ($\beta = 0.5$) می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که مقدار جابه‌جایی با افزایش ضریب تخلخل افزایش پیدا خواهد کرد. علت این امر به خاطر این است که با افزایش ضریب تخلخل ماتریس سفتی سازه کاهش پیدا می‌کند. همچنین شکل (۴) بیانگر جابه جایی عرضی ورق برای ضرایب اسکمپتون های مختلف ($e_0 = 0.5$) می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش ضریب اسکمپتون، مقدار جابه‌جایی کاهش می یابد، چرا که با افزایش ضریب اسکمپتون ماتریس سفتی سازه افزایش پیدا می‌کند.طبق شکل(۶) بیشترین جابه‌جایی برای توزیع تخلخل یکنواخت و کمترین آن برای توزیع تخلخل غیرخطی نامتقارن است. با بررسی اثر شرایط مرزی بر روی خیز ورق طبق شکل (۷)، بیشترین جابه‌جایی عرضی مربوط به شرط مرزی (s-s-s-s) چهار طرف ساده وکمترین آن مربوط به تکیه گاه (c-c-c-c) چهار طرف گیردار می‌باشد.



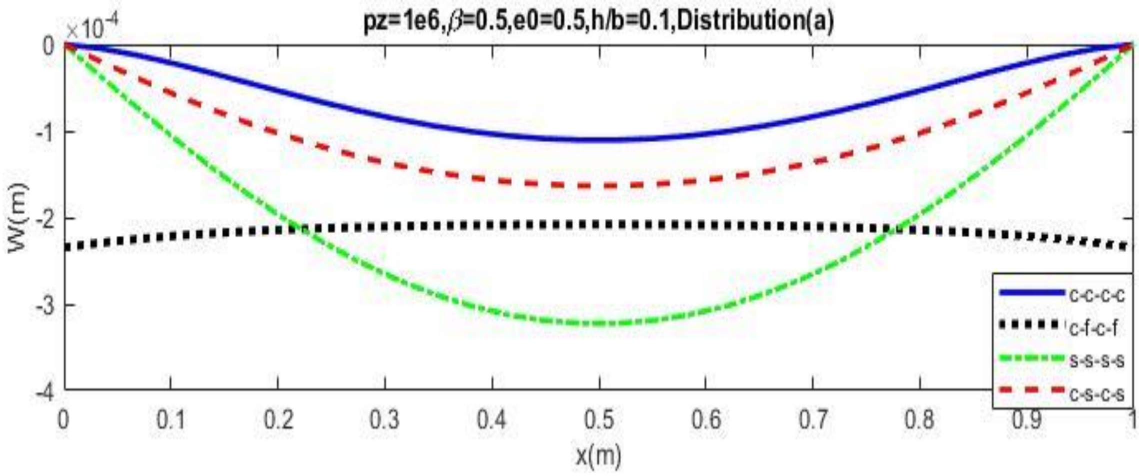

شکل(۳)جابه جایی های عرضی به ازای ضریب **تخلخل های مختلف**




***. شکل(۴)جابه جایی عرضی به ازای ضرایب اسکمپتون های مختلف***



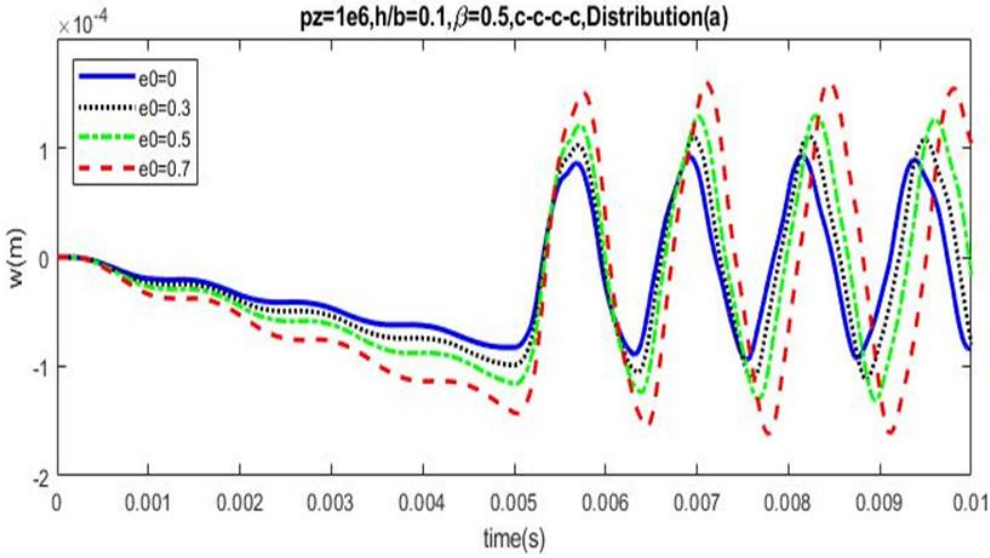

شکل (۵) جابه‌جایی عرضی به ازای توزیع تخلخل‌های مختلف



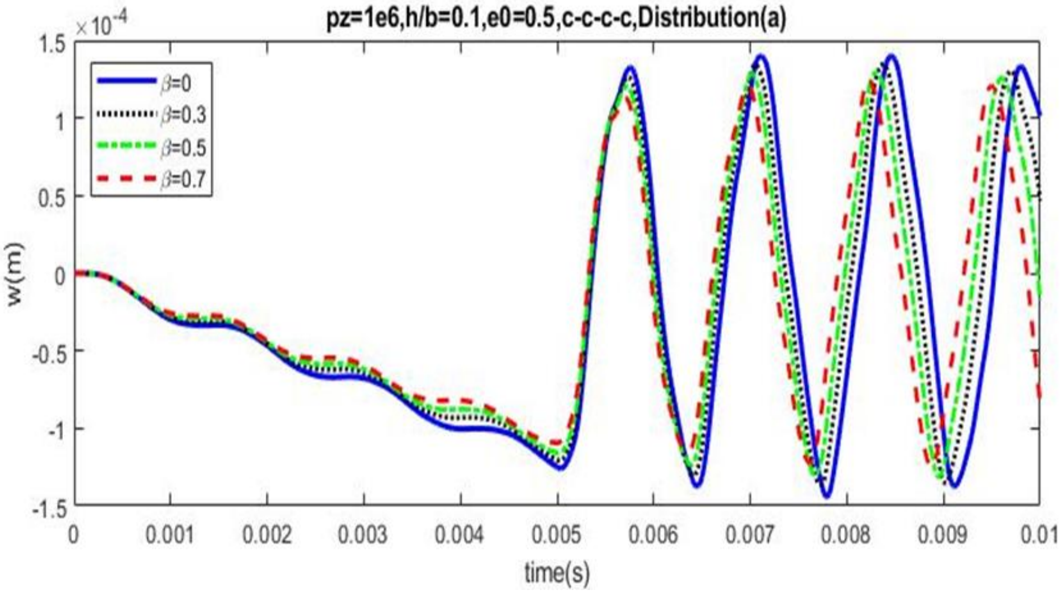

شکل(۶)جابه جایی عرضی ورق برای شرایط مرزی مختلف

### ۳-۲-۵ نتایج تحلیل دینامیکی:

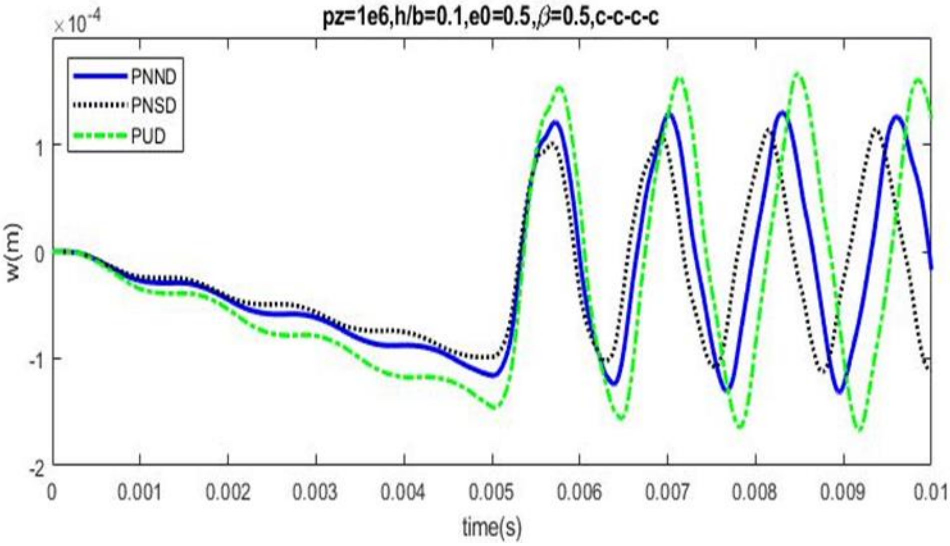
دراین بخش به بررسی رفتار دینامیکی ورق (جابه جایی عرضی نقطه میانی ورق) می‌پردازیم. برای این منظور فرض می کنیم که نیروی دینامیکی گسترده p=1e6 N در بازه زمانی 0.005 ثانیه به ورق مربعی متخلخل مدرج تابعی که بر روی تکیه گاه گیردار قرار گرفته اثر می‌کند. شکل(۷)بیانگر جابه جایی عرضی نقطه میانی ورق برای ضریب تخلخل‌های مختلف می‌باشد. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که دامنه ارتعاشات ورق با افزایش ضریب تخلخل افزایش و فرکانس ارتعاشات آن کاهش پیدا خواهد کرد. همچنین با افزایش ضریب اسکمپتون مقدار دامنه ارتعاشی ورق کاهش و فرکانس ارتعاشات آن افزایش می‌یابد به این علت که با افزایش ضریب اسکمپتون ماتریس سفتی سازه افزایش می یابد (شکل(۸)). همچنین اثر نوع توزیع تخلخل مختلف در شکل (۹) نشان داده شده است بطوریکه بیشترین دامنه ارتعاشات مربوط به توزیع تخلخل یکنواخت و کمترین آن مربوط به توزیع تخلخل متقارن می‌باشد.




شکل(۷) تاریخچه زمانی جابه‌جایی عرضی نقطه میانی ورق به ازای ضرایب تخلخل های مختلف




شکل(۸) تاریخچه زمانی جابه‌جایی عرضی نقطه میانی برای ضرایب اسکمپتون ها مختلف




شکل(۹) تاریخچه زمانی جابه‌جایی عرضی نقطه میانی به ازای توزیع تخلخل‌های مختلف

## ۷. نتیجه گیری

در این پژوهش پاسخ استاتیکی و دینامیکی و ارتعاشات آزاد ورق متخلخل مدرج تابعی مورد بررسی قرار گرفت. دو نوع توزیع تخلخل غیر خطی متقارن و غیر خطی نامتقارن در راستای ضخامت در نظر گرفته شده است. برای تحلیل از تئوری ورق مرتبه اول برشی ورق استفاده شده است. برای بیان معادلات حرکت از معادلات لاگرانژ و برای حل روابط حاکم بر مسئله از روش اجزا محدود و نیومارک استفاده شد و سپس تاثیر پارامتر های مختلف از جمله ضریب تخلخل، ضریب اسکمپتون، ضخامت ورق، شرایط مرزی و توزیع تخلخل بر توزیع خیز استاتیکی و دینامیکی و فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار گرفت.

نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که در شرایط تخلیه شده ورق دارای فرکانس طبیعی کمتری می‌باشد و با افزایش ضریب اسکمپتون فرکانس طبیعی ورق افزایش می‌یابد و این روند برای هردو نوع توزیع غیرخطی متقارن تخلخل و توزیع غیرخطی نامتقارن تخلخل صادق است. این در حالی است که افزایش ضریب تخلخل برای توزیع غیرخطی متقارن سبب افزایش فرکانس طبیعی خواهد شد، اما برای توزیع غیرخطی نامتقارن سبب کاهش فرکانس طبیعی خواهد شد. همچنین نتایج نشان دادند که بیشترین فرکانس طبیعی مربوط به ورق چهار طرف گیردار و کمترین فرکانس طبیعی مربوط به ورق چهار طرف ساده می‌باشد. نتایج نشان داد که بیشترین فرکانس طبیعی برای توزیع تخلخل غیرخطی متقارن و کمترین فرکانس مربوط به توزیع تخلخل یکنواخت می‌باشد.

**ضمیمه**

**ضمیمه:**

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\zeta)(1-\eta)$$
$$N_2=\frac{1}{4}(1+\zeta)(1-\eta)$$
$$N_3=\frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\eta)$$
$$)\, N_4=\frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\eta)$$

$$[\boldsymbol{N}] = \begin{bmatrix} N_1\ 0\ 0\ 0\ 0\ N_2\ 0\ 0\ 0\ 0\ N_3\ 0\ 0\ 0\ 0\ N_4\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ N_1\ 0\ 0\ 0\ 0\ N_2\ 0\ 0\ 0\ 0\ N_3\ 0\ 0\ 0\ 0\ N_4\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ N_1\ 0\ 0\ 0\ 0\ N_2\ 0\ 0\ 0\ 0\ N_3\ 0\ 0\ 0\ 0\ N_4\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ N_1\ 0\ 0\ 0\ 0\ N_2\ 0\ 0\ 0\ 0\ N_3\ 0\ 0\ 0\ 0\ N_4\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ N_1\ 0\ 0\ 0\ 0\ N_2\ 0\ 0\ 0\ 0\ N_3\ 0\ 0\ 0\ 0\ N_4 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{Q}^{(e)}] = \begin{bmatrix} w_{01}\ u_{01}\ v_{01}\ \theta_{x1}\ \theta_{y1}\ w_{02}\ u_{02}\ v_{02}\ \theta_{x2}\ \theta_{y2}\ w_{03}\ u_{03}\ v_{03}\ \theta_{x3}\ \theta_{y3}\ w_{04}\ u_{04}\ v_{04} \\ \theta_{x4}\ \theta_{y4} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B_f} = [\boldsymbol{d_f}][\boldsymbol{N}] = \begin{bmatrix} 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_1}{\partial x}\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_2}{\partial x}\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_3}{\partial x}\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_4}{\partial x}\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_1}{\partial y}\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_2}{\partial y}\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_3}{\partial y}\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_1}{\partial y}\ \frac{\partial N_1}{\partial x}\ 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_2}{\partial y}\ \frac{\partial N_2}{\partial x}\ 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_3}{\partial y}\ \frac{\partial N_3}{\partial x}\ 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_4}{\partial y}\ \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B_m} = [\boldsymbol{d_m}][\boldsymbol{N}] = \begin{bmatrix} 0\ \frac{\partial N_1}{\partial}\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_2}{\partial x}\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_3}{\partial x}\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_4}{\partial x}\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ \frac{\partial N_1}{\partial y}\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_2}{\partial y}\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_3}{\partial y}\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_4}{\partial y}\ 0\ 0 \\ 0\ \frac{\partial N_1}{\partial y}\ \frac{\partial N_1}{\partial x}\ 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_2}{\partial y}\ \frac{\partial N_2}{\partial x}\ 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_3}{\partial y}\ \frac{\partial N_3}{\partial x}\ 0\ 0\ 0\ \frac{\partial N_4}{\partial y}\ \frac{\partial N_4}{\partial x}\ 0\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B_c} = [\boldsymbol{d_c}][\boldsymbol{N}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x}\ 0\ 0\ N_1\ 0\ \frac{\partial N_2}{\partial x}\ 0\ 0\ N_2\ 0\ \frac{\partial N_3}{\partial x}\ 0\ 0\ N_3\ 0\ \frac{\partial N_4}{\partial x}\ 0\ 0\ N_4\ 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y}\ 0\ 0\ 0\ N_1\ \frac{\partial N_2}{\partial y}\ 0\ 0\ 0\ N_2\ \frac{\partial N_3}{\partial y}\ 0\ 0\ 0\ N_3\ \frac{\partial N_4}{\partial y}\ 0\ 0\ 0\ N_4 \end{bmatrix}$$

## ۸- مراجع

[1] Theodorakopoulos, D. D., & Beskos, D. E. (1994). Flexural vibrations of poroelastic plates. *Acta Mechanica*, *103*(1), 191-203.

[2] Leclaire, P., Horoshenkov, K. V., Swift, M. J., & Hothersall, D. C. (2001). The vibrational response of a clamped rectangular porous plate. *Journal of Sound and Vibration*, *247*(1), 19-31.

[3] Magnucki, K., & Stasiewicz, P. (2004). Elastic buckling of a porous beam. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, *42*(4), 859-868.

[4] Debowski, D., & Magnucki, K. (2006, December). Dynamic stability of a porous rectangular plate. In *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* (Vol. 6, No. 1, pp. 215-216). Berlin: WILEY-VCH Verlag.

[5] Belica, T., & Magnucki, K. (2006, December). Dynamic stability of a porous cylindrical shell. In *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* (Vol. 6, No. 1, pp. 207-208). Berlin: WILEY-VCH Verlag.

[6] Mojahedin, A., Jabbari, M., Khorshidvand, A. R., & Eslami, M. R. (2016). Buckling analysis of functionally graded circular plates made of saturated porous materials based on higher order shear deformation theory. *Thin-Walled Structures*, *99*, 83-90.

[7] Magnucka-Blandzi, E. (2008). Axi-symmetrical deflection and buckling of circular porous-cellular plate. *Thin-walled structures*, *46*(3), 333-337.

[8] علیرضا اعظمی واعظم قاسمی " تحلیل خمش و کمانش صفحه متخلخل دایروی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول "فصلنامه علمی –پژوهشی مهندسی مکانیک جامدات سال ششم شماره ویژه دوم-پاییز ۱۳۹۲

[۹] Mojahedin, A., Joubaneh, E. F., & Jabbari, M. (2014). Thermal and mechanical stability of a circular porous plate with piezoelectric actuators. *Acta Mechanica*, *225*(12), 3437-3452.

[۱۰] Jabbari, M., Mojahedin, A., & Haghi, M. (2014). Buckling analysis of thin circular FG plates made of saturated porous-soft ferromagnetic materials in transverse magnetic field. *Thin-Walled Structures*, *85*, 50-56.

[۱۱] Jabbari, M., Mojahedin, A., & Joubaneh, E. F. (2015). Thermal buckling analysis of circular plates made of piezoelectric and saturated porous functionally graded material layers. *Journal of Engineering Mechanics*, *141*(4), 04014148.

[۱۲] Ebrahimi, F., & Habibi, S. (2016). Deflection and vibration analysis of higher-order shear deformable compositionally graded porous plate. *Steel and Composite Structures*, *20*(1), 205-225.

[۱۳] Chen, D., Yang, J., & Kitipornchai, S. (2015). Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam. *Composite Structures*, *133*, 54-61.

[۱۴] Chen, D., Yang, J., & Kitipornchai, S. (2016). Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams. *International journal of mechanical sciences*, *108*, 14-22.

[۱۵] Ebrahimi, F., & Jafari, A. (2018). A four-variable refined shear-deformation beam theory for thermo-mechanical vibration analysis of temperature-dependent FGM beams with porosities. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, *25*(3), 212-224.

[۱۶] Mojahedin, A., Jabbari, M., Khorshidvand, A. R., & Eslami, M. R. (2016). Buckling analysis of functionally graded circular plates made of saturated porous materials based on higher order shear deformation theory. *Thin-Walled Structures*, *99*, 83-90.

[۱۷] Galeban, M. R., Mojahedin, A., Taghavi, Y., & Jabbari, M. (2016). Free vibration of functionally graded thin beams made of saturated porous materials. *Steel and Composite Structures*, *21*(5), 999-1016.

[۱۸] Ebrahimi, F., & Hashemi, M. (2016). On vibration behavior of rotating functionally graded double-tapered beam with the effect of porosities. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, *230*(10), 1903-1916.

[۱۹] Chen, D., Kitipornchai, S., & Yang, J. (2016). Nonlinear free vibration of shear deformable sandwich beam with a functionally graded porous core. *Thin-Walled Structures*, *107*, 39-48.

[۲۰] Jabbari, M., Rezaei, M., & Mojahedin, A. (2016). Mechanical buckling of FG saturated porous rectangular plate with piezoelectric actuators. *Iran. J. Mech. Eng.*, *17*(2), 46.

[۲۱] Rezaei, M., Mojahedin, A., & Eslami, M. R. (2016). Mechanical Buckling of FG Saturated Porous Rectangular Plate under Temperature Field. *Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of the ISME*, *17*(1), 61-78.

[۲۲] Arani, A. G., Khoddami Maraghi, Z., Khani, M., & Alinaghian, I. (2017). Free vibration of embedded porous plate using third-order shear deformation and poroelasticity theories. *Journal of Engineering*, *2017*.

[23] Al Rjoub, Y. S., & Hamad, A. G. (2017). Free vibration of functionally Euler-Bernoulli and Timoshenko graded porous beams using the transfer matrix method. *KSCE Journal of Civil Engineering*, *21*(3), 792-806.

[24] Fouda, N., El-Midany, T., & Sadoun, A. M. (2017). Bending, buckling and vibration of a functionally graded porous beam using finite elements. *Journal of applied and computational mechanics*, *3*(4), 274-282.

[25] Mojahedin, A., Jabbari, M., & Rabczuk, T. (2018). Thermoelastic analysis of functionally graded porous beam. *Journal of Thermal Stresses*, *41*(8), 937-950.

[26] Tang, H., Li, L., & Hu, Y. (2018). Buckling analysis of two-directionally porous beam. *Aerospace Science and Technology*, *78*, 471-479.

[27] Yang, J., Chen, D., & Kitipornchai, S. (2018). Buckling and free vibration analyses of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite plates based on Chebyshev-Ritz method. *Composite Structures*, *193*, 281-294..

[28] Wu, D., Liu, A., Huang, Y., Huang, Y., Pi, Y., & Gao, W. (2018). Dynamic analysis of functionally graded porous structures through finite element analysis. *Engineering Structures*, *165*, 287-301.

[۲۹] Babaei, M., Hajmohammad, M. H., & Asemi, K. (2020). Natural frequency and dynamic analyses of functionally graded saturated porous annular sector plate and cylindrical panel based on 3D elasticity. *Aerospace Science and Technology*, 96, 105524.

[۳۰] Babaei, M., Asemi, K., & Safarpour, P. (2019). Natural frequency and dynamic analyses of functionally graded saturated porous beam resting on viscoelastic foundation based on higher order beam theory. *Journal of Solid Mechanics*, 11(3), 615-634.

[۳۱] Babaei, M., Asemi, K., & Kiarasi, F. (2020). Static response and free-vibration analysis of a functionally graded annular elliptical sector plate made of saturated porous material based on 3D finite element method. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 1-25.

[۳۲] Babaei, M., & Asemi, K. (2020). Stress analysis of functionally graded saturated porous rotating thick truncated cone. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 1-28.

[۳۳] Babaei, M., Asemi, K., & Kiarasi, F. (2021). Dynamic analysis of functionally graded rotating thick truncated cone made of saturated porous materials. *Thin-Walled Structures*, 164, 107852.

[۳۴] Asemi, K., Babaei, M., & Kiarasi, F. (2020). Static, natural frequency and dynamic analyses of functionally graded porous annular sector plates reinforced by graphene platelets. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 1-29.

[۳۵] Babaei, M., Asemi, K., & Safarpour, P. (2019). Buckling and static analyses of functionally graded saturated porous thick beam resting on elastic foundation based on higher order beam theory. *Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of the ISME*, *20*(1), 94-112.

[۳۶] Jamshidi, M., & Arghavani, J. (2018). Optimal material tailoring of functionally graded porous beams for buckling and free vibration behaviors. *Mechanics Research Communications*, *88*, 19-24.

[۳۷] Zhao, J., Xie, F., Wang, A., Shuai, C., Tang, J., & Wang, Q. (2019). Dynamics analysis of functionally graded porous (FGP) circular, annular and sector plates with general elastic restraints. *Composites Part B*: Engineering, 159, 20-43.

[۳۸] Zhao, J., Xie, F., Wang, A., Shuai, C., Tang, J., & Wang, Q. (2019). A unified solution for the vibration analysis of functionally graded porous (FGP) shallow shells with general boundary conditions. *Composites Part B: Engineering*, *156*, 406-424.

[۳۹] Rezaei, A. S., & Saidi, A. R. (2015). Exact solution for free vibration of thick rectangular plates made of porous materials. *Composite Structures*, *134*, 1051-1060.