



اثر مولفه شعاعی میدان تنش در پیش بینی شکست ترد در ناچ های V شکل تحت بارگذاری مود ترکیبی صفحه‌ای

سید حسن سجادی^۱، احمدرضا خورشیدوند^{۱*}، محسن جباری^۱، مهرداد جوادی^۱

۱. گروه مهندسی مکانیک دانشکده فنی و مهندسی - دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب، تهران، ایران

* نویسنده مسئول، پست الکترونیک: Ar_khorshidvand@azad.ac.ir, arkhoshidvand@yahoo.com

۱۳۹۹-۳-۳۱: تاریخ پذیرش ۱۳۹۹-۳-۲۱: تاریخ دریافت

چکیده: معیارهای مختلفی جهت پیش بینی شکست در ناچ های V شکل ارایه شده اند. این معیارها را می توان در سه گروه کلی انرژی مینا، کرنش مینا و تنش مینا دسته بندی کرد. هر کدام از معیارهای موجود یک کمیت از جنس انرژی، کرنش و تنش را به عنوان عامل اصلی ایجاد شکست در نظر گرفته و بیان می کنند هنگامی که این کمیت به مقدار بحرانی خود برسد، شکست در جهت بیشینه مقدار کمیت مورد نظر اتفاق می افتد. اغلب معیارهای تنش مینا مولفه مماسی میدان تنش را به عنوان کمیت اصلی موثر در ایجاد شکست در نظر می گیرند. اما در معادلات انرژی مینا و کرنش مینا به طور ناخواسته مولفه تنش شعاعی نیز در معادلات وارد می شوند. در این پژوهش با مطالعه معادلات و نتایج یک معیار انرژی مینا و یک معیار کرنش مینا و مقایسه آن ها با یکدیگر نحوه اثرگذاری مولفه تنش شعاعی در دقت پیش بینی ها مورد بررسی قرار می گیرد.

واژه‌های کلیدی: شکست ترد- معیارهای پیش بینی شکست- ناچ V شکل- بارگذاری ترکیبی I+II

۱. مقدمه

پیش بینی شاخصه‌های شکست یکی از عوامل مهم در طراحی، تولید و قطعات و سازه‌های مهندسی است. پیش بینی شکست در قطعات صنعتی و به تبع آن در قطعات ناچ‌دار به دلیل جلوگیری از خسارات گاه غیرقابل جبران، همواره در مورد محققان قرار داشته است [۱]. برای پیش بینی شکست در قطعات ترک‌دار معیارهای متعددی ارایه شده‌اند که بخش زیادی از نیاز صنعت را در این زمینه پاسخ می‌دهند [۲-۸]. اما معیارهایی که برای پیش بینی شکست در ناچ‌ها ارایه شده‌اند پاسخگوی بخش قابل توجهی از نیازهای موجود با دقت مورد نظر نیستند. از اینرو تحقیق و پژوهش در مورد توسعه و افزایش دقت معیارهای موجود کماکان ادامه دارد. ارایه معادلات میدان تنش الاستیک حول راس ناچ V شکل توسط ویلیامز [۹] سرآغاز توسعه معیارهای شکست این نوع از ناچ‌ها بود. اغلب معیارهای اولیه ناچ برای پیش بینی شکست تحت شرایط بارگذاری مود I خالص ارایه شدند [۱۰-۱۷] و به تدریج پژوهش‌هایی برای تعمیم این معیارها برای شرایط مود ترکیبی I+II صورت گرفت. با توجه به شرایط کاری

¹ Williams

قطعات صنعتی که اغلب تحت بارگذاری‌های ترکیبی قرار دارند توسعه معیارهایی که امکان استفاده برای بارگذاری مود ترکیبی را داشته باشند از اهمیت ویژه برخوردارند [۱۸]. از جمله تحقیقات انجام شده در خصوص توسعه و ارایه معیارهای شکست برای ناچ V شکل با قابلیت کاربرد در شرایط بارگذاری مود ترکیبی I+II، می‌توان به توسعه معیار چگالی انرژی کرنشی برای استفاده در ناچ V شکل، توسط پریل^۳ اشاره کرد [۱۹]. معیار او نتایج مناسبی را برای پیش بینی زاویه و بار شکست ارایه کرد. دان^۴ و همکاران [۲۰] معیاری را بر اساس ضریب شدت تنش ارایه کردند. سویرین^۵ [۱۲، ۲۱، ۲۲] با استفاده از مفهوم نرخ رهاسازی انرژی^۶ معیاری را ارایه نمود و آزمایشاتی را برای اعتبارسنجی معیار خود انجام داد. لازارین و همکاران [۲۳] و لایوری^۷ [۱۵] معیار انتگرال I را برای پیش بینی شکست در ناچ V شکل توسعه دادند، این معیار توسط لایوری [۲۴] برای استفاده تحت شرایط بارگذاری مود II تعمیم یافت. یوسیباش^۸ [۲۵، ۲۶] معیاری بر اساس چگالی انرژی کرنشی متوسط ارایه کرد. کارپینتری^۹ [۲۷] کاربرد یک معیار شکست را با در نظر گرفتن یک فاصله محدود از راس ناچ V شکل و بررسی اثرات تنش و انرژی در این محدوده مورد بررسی قرار داد. لگویلن^{۱۰} [۱۶، ۲۸] معیاری را برای شکست در ناچ V شکل تحت بارگذاری مود I خالص ارایه کرد، یوسیباش و همکاران [۲۵] با توسعه معیار اولیه بر اساس چگالی انرژی کرنشی متوسط، امکان استفاده از معیار لگویلن را برای شرایط بارگذاری مود ترکیبی I+II فراهم کردند. سوسمل^{۱۱} [۲۹] نیز معیار فاصله بحرانی تیلور^{۱۲} [۳۰] را توسعه داد. ساپورا^{۱۳} [۳۱] با تعریف معادله‌ای برای ضریب شدت تنش و تعیین مقدار بحرانی برای آن، معیاری را ارایه کرد که امکان استفاده برای شرایط بارگذاری مود II خالص را داشت. معیار سویرین [۳۲، ۳۳] بر اساس محاسبه تنش متوسط و با استفاده از مولفه تنش مماسی ارایه شد. آیت‌اللهی^{۱۴} و همکاران [۳۴، ۳۵] معیار بیشینه تنش مماسی^{۱۵} MTS را برای استفاده در ناچ‌های V شکل

² Strain Energy Density Criterion

³ Priel

⁴ Dunn

⁵ Seweryn

⁶ Energy Release Rate

⁷ Livieri

⁸ Yosibash

⁹ Carpinteri

¹ Leguillon 0

¹⁶ Susmel

¹⁷ Taylor

¹ Sapora 3

¹ Ayatollahi 4

¹ Maximum Tangential Stress Criterion

نوک تیز و نوک گرد شده^۶ توسعه دادند. در این معیار مقدار تنش مماسی در یک نقطه روی شعاع بحرانی^۷ مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین آیت‌اللهی برای مطالعه شکست در قطعات ناچ‌دار آزمایش‌های گسترده‌ای را روی نمونه‌هایی از جنس تک کریستال گرافیت^۸ تحت بارگذاری مود ترکیبی I+II انجام داد.

معیار بیشینه چگالی انرژی کرنشی متوسط (ASED) [۳۶, ۳۷] و معیار بیشینه چگالی انرژی کرنشی متوسط تعمیم یافته (GASED) [۳۸] از معیارهای معتبر برای پیش بینی شکست در ترک است. لازارین و زامباردی [۱۴] معیار (ASED) را برای پیش بینی شکست در ناچ‌ها توسعه داد. همچنین آیت‌اللهی و همکاران [۳۹, ۴۰] در خصوص ناچ‌ها پژوهش‌هایی در خصوص شرایط متفاوت بارگذاری از جمله بارگذاری منفی مود I [۴۱] و شرایط بارگذاری مود III [۴۲] نیز صورت گرفته است. معیارهای شکست ترد را می‌توان به سه گروه کلی انرژی مینا، کرنش مینا و تنش مینا تقسیم کرد. هر یک از این معیارها یک کمیت از نوع انرژی، کرنش و تنش را به عنوان کمیت موثر در ایجاد شکست در نظر گرفته و برای آن مقداری بحرانی محاسبه می‌کنند. در غالب معیارهای تنش مینا مولفه اصلی ایجاد شکست، مولفه تنش مماسی در نظر گرفته می‌شود. اما در معیارهای انرژی مینا و کرنش مینا تحت شرایط بارگذاری مود ترکیبی I+II مولفه تنش شعاعی نیز به طور ناخواسته وارد معادلات شده و در پیش بینی شاخص‌های شکست موثر است. در این پژوهش نحوه اثرگذاری مولفه تنش شعاعی بر پیش بینی شکست مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- میدان تنش و کرنش حول راس ناچ V شکل

همان طور که گفته شد میدان تنش الاستیک حول راس ناچ V شکل توسط ویلیامز [۹] ارائه شد. با استفاده از نتایج تحقیق ویلیامز و معادلات الاستیک خطی برای مواد ایزوتروپیک، معادلات میدان کرنش الاستیک حوا راس ناچ قابل محاسبه خواهند بود.

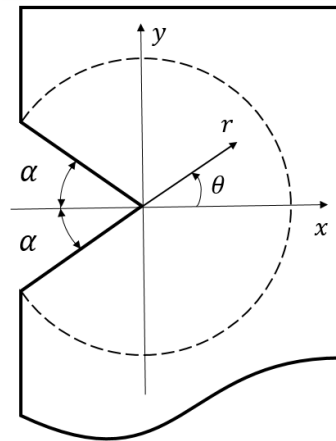
۲-۱ میدان تنش

معادلات میدان تنش الاستیک حول راس ناچ V شکل به صورت یک سری توانی ارائه می‌شود [۹]. به طور معمول برای بیان میدان تنش حول راس ناچ V شکل جمله اول این سری مورد استفاده قرار گرفته و از سایر جملات سری صرف نظر می‌شود. برای یک ناچ V شکل مطابق شکل ۱ معادلات میدان تنش الاستیک حول راس ناچ به صورت زیر بیان می‌شود [۳۴, ۴۰].

1 Rounded-tip V-notched 6

1 Critical Radius 7

1 Polycrystalline graphite 8



شکل ۱. هندسه ناچ V شکل با زاویه راس 2α در دستگاه مختصات کارتزین و قطبی [۴۳]

(۱)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^V \\ \sigma_{\theta\theta}^V \\ \sigma_{r\theta}^V \end{pmatrix} = \frac{K_I^V}{(2\pi r)^{1-\lambda_1}} \begin{bmatrix} f_{rr}(\theta) \\ f_{\theta\theta}(\theta) \\ f_{r\theta}(\theta) \end{bmatrix} + \frac{K_{II}^V}{(2\pi r)^{1-\lambda_2}} \begin{pmatrix} g_{rr}(\theta) \\ g_{\theta\theta}(\theta) \\ g_{r\theta}(\theta) \end{pmatrix}$$

در معادله ۱، $f_{ij}(\theta)$ و $g_{ij}(\theta)$ توابع مشخصی از زاویه θ هستند که در پیوست ارائه شده‌اند. همچنین، λ_1 و λ_2 ضرایبی ثابت هستند که به زاویه راس ناچ (2α) وابسته‌اند. K_I^V و K_{II}^V ضرایب شدت تنش ناچ V شکل متناظر با بارگذاری مود I و مود II بوده که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۴۴].

(۲)

$$K_I^V = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta \rightarrow 0}} \sigma_{\theta\theta}^V (2\pi r)^{1-\lambda_1}$$

$$K_{II}^V = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta \rightarrow 0}} \sigma_{r\theta}^V (2\pi r)^{1-\lambda_2}$$

۲-۲ میدان کرنش

با استفاده از معادلات تنش حول راس ناچ V شکل و معادلات الاستیسیته برای مواد همسانگرد، معادله میدان کرنش حول راس ناچ V شکل را می‌توان به صورت زیر نوشت [۳۹].

(۳)

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^V \\ \varepsilon_{\theta\theta}^V \\ \varepsilon_{r\theta}^V \end{pmatrix} = \frac{K_I^V}{E(2\pi r)^{1-\lambda_1}} \begin{bmatrix} A_{rr}(\theta) \\ A_{\theta\theta}(\theta) \\ A_{r\theta}(\theta) \end{bmatrix} + \frac{K_{II}^V}{E(2\pi r)^{1-\lambda_2}} \begin{pmatrix} B_{rr}(\theta) \\ B_{\theta\theta}(\theta) \\ B_{r\theta}(\theta) \end{pmatrix}$$

در معادله ۳، $A_{ij}(\theta)$ و $B_{ij}(\theta)$ توابع مشخصی از زوایه θ هستند که در پیوست ارائه شده‌اند.

۳- دو معیار مورد بررسی

در این پژوهش ضمن ارائه معادلات معیار بیشینه چگالی انرژی کرنشی مماسی [۴۰] و معیار بیشینه کرنش مماسی [۳۹] برای ناچ‌های V شکل، نتایج این دو معیار برای پیش بینی مکان هندسی شکست به منظور بررسی اثرات مولفه تنش شعاعی تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II مورد استفاده مطالعه قرا می‌گیرد.

۳-۱ معیار توسعه یافته بیشینه چگالی انرژی کرنشی مماسی SV-MTSED

با استفاده از معادلات تنش و کرنش حول راس ناچ V شکل، چگالی انرژی کرنشی مماسی حول راس ناچ V شکل به صورت زیر تعریف می‌شود [۴۳].

(۴)

$$w_{\theta}^V = \frac{1}{2} \sigma_{\theta\theta}^V \varepsilon_{\theta\theta}^V$$

در معادله بالا، w_{θ}^V چگالی انرژی کرنشی مماسی، $\varepsilon_{\theta\theta}^V$ مولفه کرنش مماسی و $\sigma_{\theta\theta}^V$ مولفه تنش مماسی حول راس ناچ V شکل است که از معادلات زیر جایگزین می‌شوند [۴۳].

(۵)

$$\sigma_{\theta\theta}^V = \frac{K_I^V}{(2\pi r)^{1-\lambda_1}} f_{\theta\theta}(\theta) + \frac{K_{II}^V}{(2\pi r)^{1-\lambda_2}} g_{\theta\theta}(\theta)$$

(۶)

$$\varepsilon_{\theta\theta}^V = \frac{1}{E} \left[\frac{K_I^V}{(2\pi r)^{1-\lambda_1}} A_{\theta\theta}(\theta) + \frac{K_{II}^V}{(2\pi r)^{1-\lambda_2}} B_{\theta\theta}(\theta) \right]$$

معیار بیشینه چگالی انرژی کرنشی مماسی بیان می‌کند که وقتی مقدار این کمیت در یک فاصله بحرانی از راس ناچ به مقدار بحرانی خود برسد، شکست در جهت بیشینه چگالی انرژی کرنشی مماسی اتفاق می‌افتد. این معیار به صورت زیر بیان می‌شود [۴۳].

(۷)

$$\frac{\partial w_{\theta}^V}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_{\theta}^V}{\partial \theta^2} < 0 \quad (\theta = \theta_0, r = r_{c,V})$$

مقدار بحرانی چگالی انرژی کرنشی مماسی ($w_{\theta c}^V$) از معادله ۷، محاسبه شده و در این معیار فقط وابسته به خواص ماده در نظر گرفته می‌شود [۴۳].

(۸)

$$w_{\theta c}^V = \frac{\sigma_{\theta\theta c}^2}{2E}$$

پارامتر $\sigma_{\theta\theta c}$ مقدار بحرانی تنش مماسی است که معادل استحکام کششی ماده (σ_u) در نظر گرفته می‌شود.

در این معیار شعاع بحرانی نیز از خواص ماده محسوب شده و از معادله زیر محاسبه می‌شود [۴۳].

(۹)

$$r_{c,v} = \frac{1}{2\pi} (1 - \nu) \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_{\theta\theta c}} \right)^2$$

معادله زیر برای پیش بینی زاویه شکست توسط این معیار مورد استفاده قرار می‌گیرد [۴۳].

(۱۰)

$$(K_I^V)^2 (2\pi r_{c,v})^{2(\lambda_1-1)} \frac{d(f_{\theta\theta A\theta\theta})}{d\theta} + K_I^V K_{II}^V (2\pi r_{c,v})^{\lambda_1+\lambda_2-2} \frac{d(f_{\theta\theta B\theta\theta} + g_{\theta\theta A\theta\theta})}{d\theta} + (K_{II}^V)^2 (2\pi r_{c,v})^{2(\lambda_2-1)} \frac{d(g_{\theta\theta B\theta\theta})}{d\theta} = 0$$

در لحظه شکست تحت شرایط بارگذاری مود ترکیبی I+II شرایط زیر برقرار است [۴۳].

(۱۱)

$$\begin{cases} r = r_{c,v} \\ \theta = \theta_0 \\ w_{\theta}^V = w_{\theta c}^V = \frac{\sigma_{\theta\theta c}^2}{2E} \end{cases}$$

مکان هندسی شکست با استفاده از معادله زیر به دست می‌آید [۴۳].

(۱۲)

$$(K_I^V)^2 (2\pi r_{c,V})^{2(\lambda_1-1)} f_{\theta\theta} A_{\theta\theta} + K_I^V K_{II}^V (2\pi r_{c,V})^{\lambda_1+\lambda_2-2} (f_{\theta\theta} B_{\theta\theta} + g_{\theta\theta} A_{\theta\theta}) + (K_{II}^V)^2 (2\pi r_{c,V})^{2(\lambda_2-1)} g_{\theta\theta} B_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} c^2$$

۳-۲ معیار توسعه یافته بیشینه کرنش مماسی SV-MTSN

معیار بیشینه کرنش مماسی بیان می‌کند، وقتی کرنش مماسی روی شعاع بحرانی حول راس ناچ V شکل به مقدار بحرانی خود برسد، شکست در جهت بیشینه کرنش مماسی اتفاق می‌افتد. این معیار را می‌توان صورت زیر بیان کرد [۴۳].

(۱۳)

$$\left. \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^V}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}^V}{\partial \theta^2} < 0 \quad (\theta = \theta_0, r = r_{c,V})$$

مقدار بحرانی کرنش مماسی و شعاع بحرانی که هر دو به عنوان پارامترهایی وابسته به خواص مواد در نظر گرفته شده‌اند، از معادلات زیر محاسبه می‌شوند:

(۱۴)

$$\varepsilon_{\theta\theta}^V = \frac{\sigma_{\theta\theta} c}{E}$$

(۱۵)

$$r_{c,V} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_{\theta\theta} c} (1 - \nu) \right)^2$$

با استفاده از معادله زیر، زاویه شکست پیش بینی شده توسط این معیار محاسبه می‌شود [۴۳].

(۱۶)

$$\left. \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^V}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0 \rightarrow \frac{K_I^V}{b_1 (2\pi)^{1-\lambda_1}} r_{c,V}^{1-\lambda_1} [l_1 \sin((1 + \lambda_1)\theta_0) + l_2 \sin((1 - \lambda_1)\theta_0)] + \frac{K_{II}^V}{b_2 (2\pi)^{1-\lambda_2}} r_{c,V}^{1-\lambda_2} [l_3 \cos((1 + \lambda_2)\theta_0) + l_4 \cos((1 - \lambda_2)\theta_0)] = 0$$

ضرایب l_4, l_3, l_2, l_1 در ضمیمه ارائه شده است.

در لحظه شکست تحت شرایط بارگذاری مود ترکیبی I+II شرایط زیر برقرار است [۴۳].

(۱۷)

$$\begin{cases} r = r_{c,V} \\ \theta = \theta_0 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^V = \varepsilon_{\theta\theta c}^V = \frac{\sigma_{\theta\theta c}}{E} \end{cases}$$

مکان هندسی شکست پیش بینی شده توسط این معیار از معادله زیر محاسبه می شود.

(۱۸)

$$\begin{aligned} & \frac{K_I^V}{b_1(2\pi)^{1-\lambda_1}} r_{c,V}^{\lambda_1-1} [-(1+v) \cos((1+\lambda_1)\theta_0) + (c_2 - vc_1) \cos((1-\lambda_1)\theta_0)] \\ & + \frac{K_{II}^V}{b_2(2\pi)^{1-\lambda_2}} r_{c,V}^{\lambda_2-1} [-(1+v) \sin((1+\lambda_2)\theta_0) \\ & + (c_4 - vc_3) \sin((1-\lambda_2)\theta_0)] = \sigma_{\theta\theta c} \end{aligned}$$

معادلات مربوط به ضرایب b_2 ، c_4 ، c_3 در ضمیمه ارایه شده است.

همانطور که مشاهده شد، مولفه های تنش و کرنش حول راس ناچ V شکل با استفاده از معادلات میدان تنش حول راس ناچ V شامل و معادلات الاستیسیته به دست می آیند. از آنجا که معادلات تنش حول راس ناچ V شکل به صورت تحلیلی محاسبه شده و برای تمامی زوایای راس ناچ معتبرند، معادلات محاسبه شده برای میدان کرنش و مولفه های انرژی نیز حول راس ناچ V شکل همین شرایط را دارند.

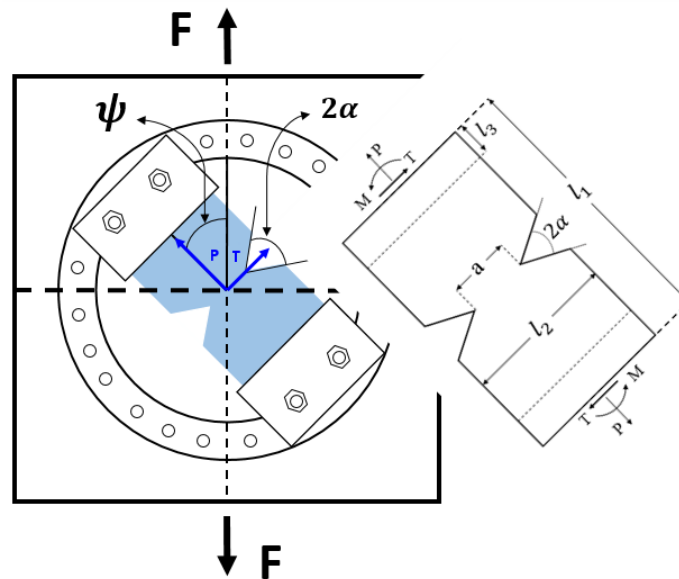
۴- نتایج

در این قسمت ابتدا نمونه مورد آزمایش و نحوه انجام آزمایش ارایه می شود. سپس با استفاده از معادلات دو معیار مورد بررسی نتایج پیش بینی برای مکان هندسی شکست محاسبه شده و مورد مطالعه و مقایسه با نتایج تجربی قرار می گیرد.

۴-۱- نتایج تجربی

نمونه ناچ دار مطابق شکل زیر در نظر گرفته می شود. به ازای تغییرات زاویه بارگذاری (ψ) از صفر تا ۹۰ درجه قطعه ناچ دار تحت بارگذاری مود ترکیبی از مود I خالص تا مود II خالص قرار می گیرد. زوایای بارگذاری هر ۱۵ درجه (۰، ۱۵، ۳۰، ۴۵، ۶۰، ۷۵ و ۹۰) بوده و نمونه های آزمایش با ابعاد مورد اشاره در جدول ۱ از جنس ماده پلی متیل متاکریلات^۱ (PMMA) با خواص مکانیکی زیر ساخته شده است [۳۲].

¹ polymethyl methacrylate



شکل ۲. قطعه ناچ‌دار تحت بارگذاری مود ترکیبی [۴۳]

مدول یانگ $E=330 \text{ Mpa}$ ، مقدار تنش کششی بحرانی $\sigma_{\theta\theta c} = 102.8 \text{ Mpa}$ ، مقدار بحرانی ضریب شدت تنش مود I، انرژی مورد نیاز برای شکست بر واحد سطح $G_c = 0.437 \text{ kJm}^{-2}$ [۳۲].

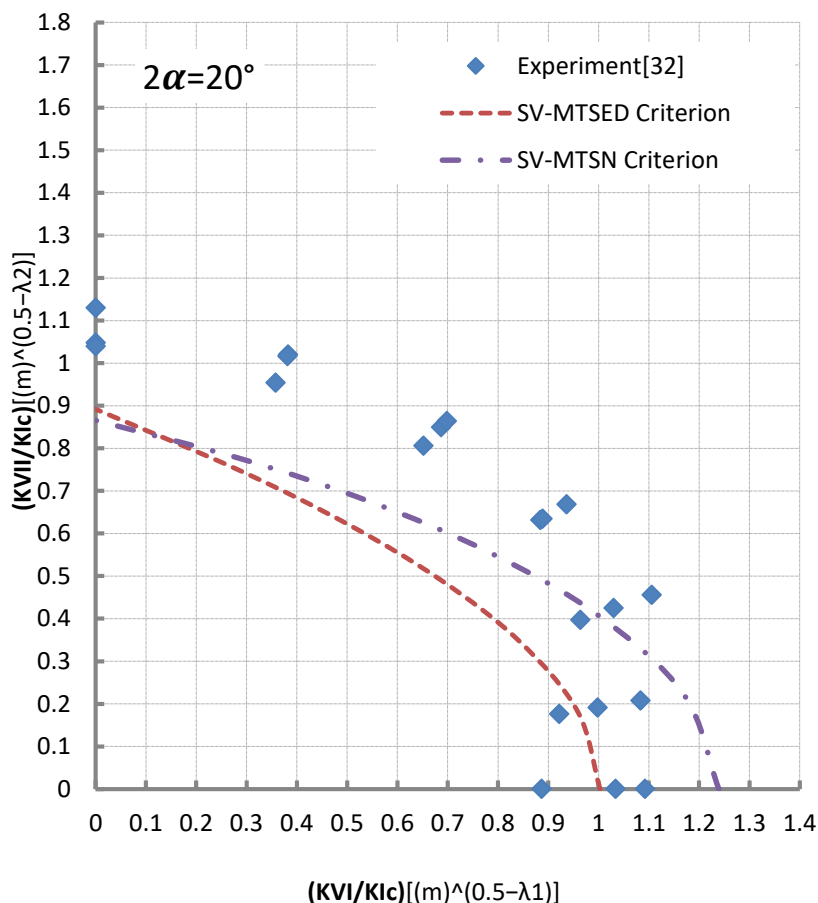
جدول ۱- ابعاد نمونه‌های ناچ‌دار مورد آزمایش [۳۲]

l_1	l_2	l_3	a	T(ضخامت)
۲۰۰mm	۱۰۰mm	۴۷mm	۵۰mm	۵mm

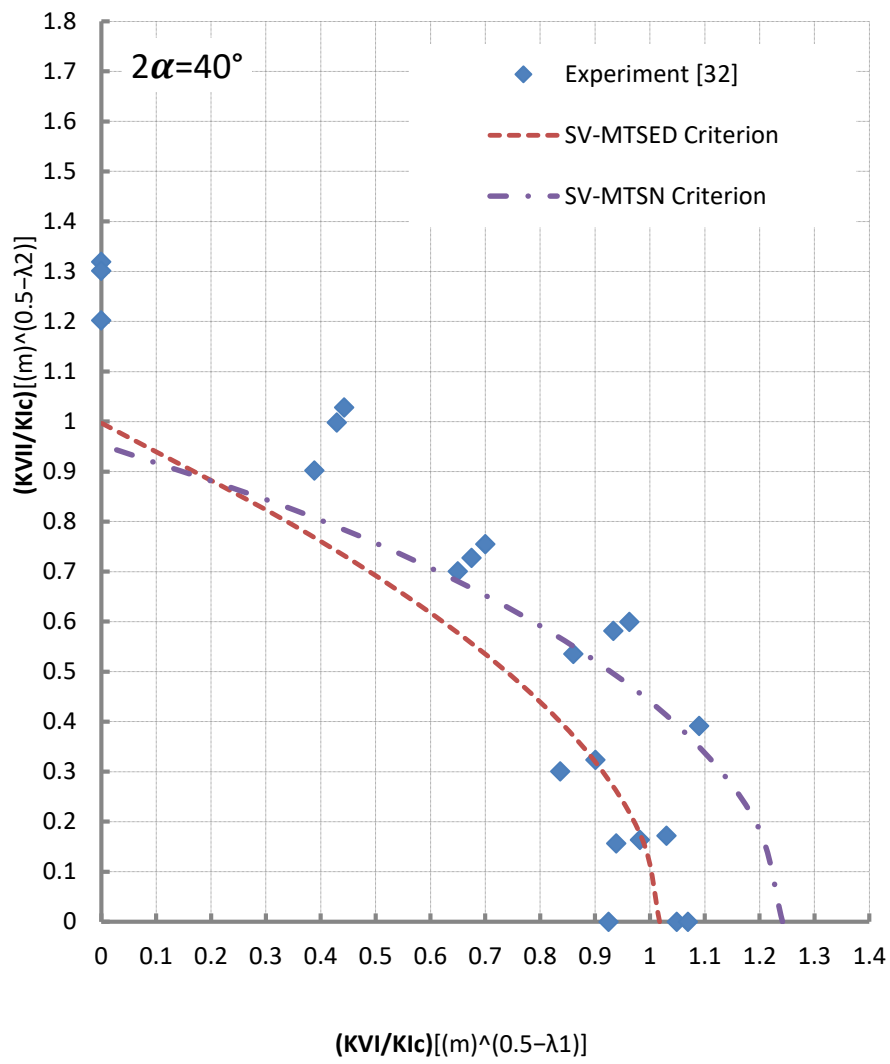
۴-۲- نتایج پیش بینی دو معیار مورد بررسی

برای محاسبه نتایج پیش بینی دو معیار مورد بررسی، ابتدا برای هر زاویه مشخص راس ناچ در هر زاویه بارگذاری با استفاده از روش المان محدود به ازای هر بار اعمالی دلخواه F توزیع تنش حول راس ناچ و مولفه های عمودی T و P محاسبه می‌شوند. سپس با استفاده از معادلات ۲ مقادیر K_I^V و K_{II}^V و نسبت مودی $(\frac{K_I^V}{K_{II}^V})$ محاسبه می‌شود. با جایگزینی مقدار نسبت موی در معادلات ۱۰ و ۱۶ مقدار پیش بینی شده برای زاویه شکست توسط هر معیار محاسبه می‌شود. با جایگذاری مقادیر به دست آمده برای زاویه شکست از معیار بیشینه چگالی انرژی کرنشی در معادله ۱۰ و ۱۲ یک دستگاه معادلات حاصل می‌شود. با حل این

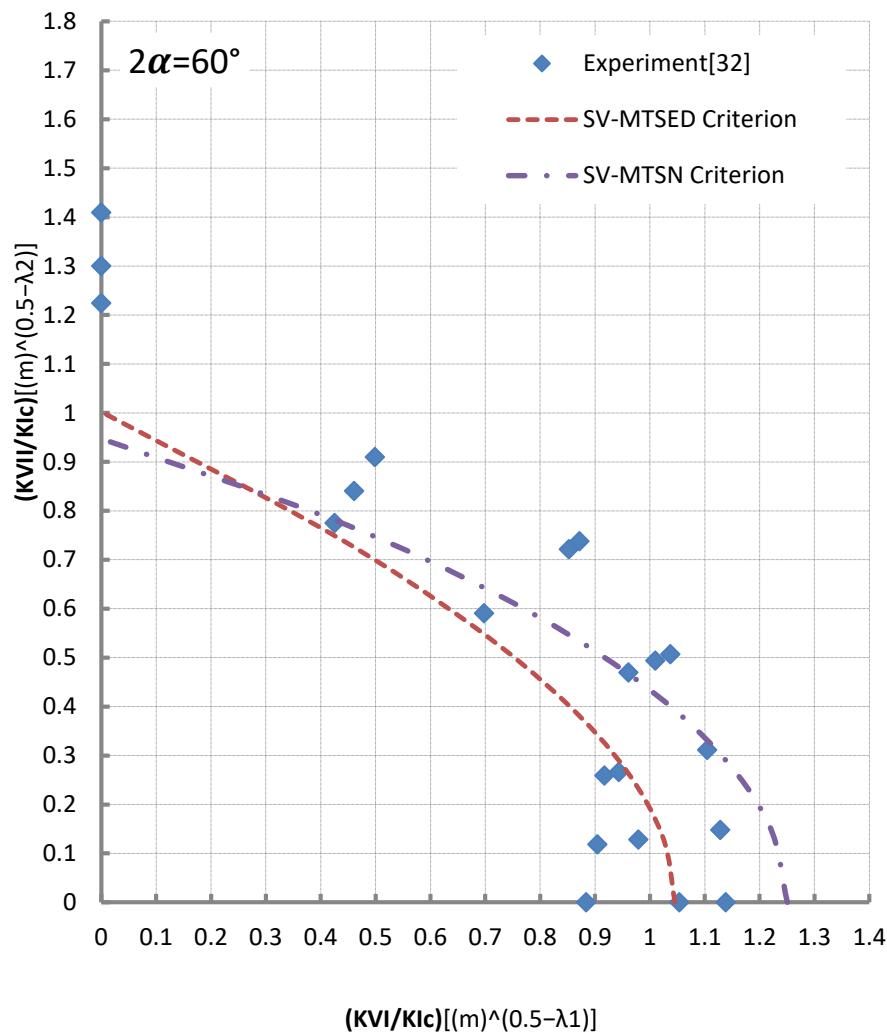
دستگاه معادلات، مقادیر K_{II}^V و K_I^V در لحظه شکست محاسبه می‌شود. برای معیار بیشینه کرنش مماسی روند مورد اشاره با استفاده از معادلات ۱۶ و ۱۸ انجام می‌شود. برای رسم مکان هندسی شکست در برخی پژوهش‌ها مقادیر به دست آمده برای K_{II}^V و K_I^V در لحظه شکست بر مقادیر بحرانی ضرایب شدت تنش ناچ متناظر با مود I و مود II (K_{II}^V و K_{IC}^V) که از آزمایشات تجربی نمونه‌ها حاصل شده است، تقسیم می‌شود. نمودارهایی که به این روش به دست می‌آیند به علت آنکه مقادیر به دست آمده بر ضرایب شدت تنش بحرانی متناظر با هر ناچ تقسیم می‌شوند، امکان مقایسه اثر تغییرات زوایای راس ناچ را بر مقادیر K_{II}^V و K_I^V در لحظه شکست فراهم نمی‌آورند. در این پژوهش به منظور امکان بررسی اثر این تغییرات، مقادیر K_{II}^V و K_I^V در لحظه شکست بر مقدار چقرمگی شکست ماده (K_{IC} ضریب شدت تنش متناظر با مود I ترک) تقسیم می‌شوند تا نسبت‌های K_{II}^V/K_{IC} و K_I^V/K_{IC} به دست آیند. در این شرایط به علت آنکه مقادیر K_{II}^V و K_I^V در لحظه شکست برای تمامی ناچ‌ها با زوایای متفاوت بر یک مقدار ثابت تقسیم شده‌اند، امکان بررسی اثر تغییرات زوایه راس ناچ بر مقادیر ضرایب شدت تنش در لحظه شکست فراهم می‌کنند. با رسم تغییرات K_{II}^V/K_{IC} نسبت به K_I^V/K_{IC} نمودار مکان هندسی شکست مورد نظر به دست می‌آید. این نمودارها در شکل‌های ۳ تا ۵ نشان داده شده‌اند.



شکل ۳. نمودار مکان هندسی شکست برای ناچ با زوایه راس $2\alpha=20^\circ$



شکل ۴. نمودار مکان هندسی شکست برای ناچ با زاویه راس $2\alpha=40^\circ$



شکل ۵. نمودار مکان هندسی شکست برای ناچ با زاویه راس $2\alpha=60^\circ$

۵- بررسی نتایج

نمودارهای شکل های ۳ تا ۵، نتایج پیش بینی مکان هندسی شکست توسط دو معیار مورد بررسی را در مقایسه با نتایج تجربی برای ناچ های V شکل با زوایای راس ناچ $2\alpha = 20, 40, 60^\circ$ نشان می دهد. در این نمودارها سمت راست منحنی ها مربوط به پیش بینی بارشکست در شرایط بارگذاری مود I خالص بوده و با حرکت به سمت چپ، به تدریج بر مقدار بارگذاری مود II افزوده می شود. همانطور که گفته شد غالب معیارهای تنش مبنا مولفه تنش مماسی را به عنوان عامل اصلی ایجاد شکست در نظر می گیرند. همچنین اصل تقارن مکانی [۴۵] بیان می کند تحت شرایط بارگذاری مود ترکیبی I+II، مسیر شکست به سمتی میل می کند که اثر ضریب شدت تنش متناظر با مود II بارگذاری برابر صفر باشد. در این شرایط، شکست در جهت متناظر با مود I پیش خواهد رفت. از آنجا که مود I بارگذاری فقط بر اثر اعمال تنش مماسی ایجاد می شود، ممکن است این برداشت

² principle local symmetry

ایجاد شود که تنها مولفه تاثیرگذار در شکست تحت شرایط بارگذاری مود ترکیبی I+II فقط مولفه تنش مماسی بوده و سایر مولفه های تنش نقشی در تعیین شاخص های مورد بررسی شکست ندارد. با بررسی معادلات معیارهای مورد بررسی مشخص است که در معادلات این معیارها علاوه بر مولفه تنش مماسی، مولفه تنش شعاعی نیز به واسطه وجود کرنش مماسی در معادلات وجود دارد. با بررسی دقیق تر معادلات معیارهای مورد اشاره مشخص می شود که مولفه تنش شعاعی در معادلات معیار کرنش مینا (SV-MTSN) در مقایسه با معیار انرژی مینا نقش پررنگ تری دارد. دلیل این موضوع آن است که مولفه تنش شعاعی در هر معادلات هر دو معیار به واسطه وجود کمیت کرنش مماسی وجود دارد، اما تعداد کمیت های موجود در معادلات معیار کرنش مینا در مقایسه با معیار انرژی مینا به مراتب کمتر است. از اینرو سهم اثرگذاری مولفه تنش شعاعی در معیار کرنش مینا بیشتر از معیار انرژی مینا است. همان طور که از نمودارهای مورد اشاره مشاهده می شود، نتایج پیش بینی مکان هندسی شکست حاصل از معیار SV-MTSED تحت شرایطی که بارگذاری مود I غالب است در مقایسه با نتایج حاصل از معیار SV-MTSN از همگرایی بیشتری با نتایج آزمایش های تجربی برخوردار است. اما با افزایش سهم بارگذاری مود II، تا کمی بعد از نسبت مودی برابر، نتایج معیار SV-MTSN همگرایی بهتری با نتایج تجربی نشان می دهد. در شرایط بارگذاری مود II غالب و مود II خالص، نتایج هر دو معیار برای تمامی ناچ ها با زوایای مختلف راس ناچ، به یکدیگر نزدیک شده و از نتایج تجربی فاصله می گیرد. دلیل این موضوع را می توان در اثرگذاری مولفه تنش شعاعی در معادلات این دو معیار جستجو کرد. در شرایط بارگذاری مود I خالص، تنها مولفه تاثیرگذار در شکست مولفه تنش مماسی است. از اینرو در این شرایط بارگذاری به علت سهم اثرگذاری بیشتر مولفه تنش شعاعی در معادلات معیار کرنش مینا از دقت نتایج کاسته شده و به دلیل اثر کمتر این مولفه در معیار انرژی مینا، در این شرایط نتایج معیار انرژی مینا از دقت بهتری برخوردار است. اما با حرکت به سمت چپ منحنی ها، با افزایش سهم بارگذاری مود II رفته رفته بر دقت معیار کرنش مینا در مقایسه با معیار انرژی مینا افزوده می شود. علت این تغییرات را می توان اینگونه بیان کرد که با افزایش بارگذاری مود II، تنش شعاعی نیز در ایجاد شکست مشارکت می نماید. از اینرو اثرگذاری پررنگ تر این مولفه در معیار کرنش مینا، موجب افزایش دقت معیار مورد نظر در بازه ای از شرایط بارگذاری مود ترکیبی می شود. نکته قابل توجه آن است که بعد از نسبت مودی برابر تا شرایط بارگذاری مود II خالص با افزایش سهم بارگذاری مود II خالص به دلیل آنکه تنش برشی نیز تاثیر بسزایی در ایجاد صفحات جدید شکست دارد [۴۶] و این مولفه در معادلات هیچ کدام از این دو معیار وجود ندارد، نتایج هر دو معیار با نتایج تجربی فاصله می گیرد. در پایان لازم به ذکر است که بر اساس اصل تقارن محلی، با تداوم زمان بارگذاری مسیر شکست به سمتی میل می کند که اثر ضریب شدت تنش متناظر با مود II خالص به صفر میل کند [۴۵]. اما آنچه به عنوان شاخص های مورد بررسی در معیارهای پیش بینی شکست به طور معمول مورد محاسبه و بررسی قرار می گیرد، زاویه اولیه رشد ترک است و نه مسیر نهایی شکست و سایر شاخص های مورد مطالعه نظیر مکان هندسی شکست نیز با استفاده از مقدار پیش بینی شده برای زاویه اولیه رشد ترک محاسبه می شوند. بدیهی است با استفاده از معیارهای مورد اشاره در این پژوهش نیز در نهایت مسیر شکست با تداوم زمان به مسیری منطبق با مسیر ذکر شده در اصل تقارن محلی میل خواهد کرد.

۶- نتیجه گیری

در این پژوهش با بررسی معادلات و نتایج پیش بینی دو معیار توسعه یافته بیشینه چگالی انرژی کرنشی مماسی SV-MTSED و معیار توسعه یافته بیشینه کرنش مماسی SV-MTSN برای پیش بینی شکست در ناچ های V شکل با نوک تیز تحت بارگذاری مود ترکیبی I+II، مشخص شد که اگرچه مولفه تنش مماسی به عنوان بهترین مولفه میدان تنش در ایجاد شکست نقش دارد، اما سایر مولفه های میدان تنش از جمله مولفه شعاعی نیز در برخی شرایط بارگذاری و متناسب با زاویه راس ناچ در ایجاد

شکست تاثیرگذارند. از اینرو مشارکت این مولفه ها در معادلات معیارهای پیش بینی شکست می تواند در شرایطی در افزایش دقت پیش بینی ها موثر باشد. این اثرگذاری وابسته به شرایط بارگذاری و همچنین مقدار زاویه راس ناچ V است.

مراجع

- [1] P. Volegov, D. Gribov, P. Trusov, Damage and fracture: review of experimental studies, *Physical mesomechanics*, 19 (2016) 319-331.
- [2] L. Pook, A 50-year retrospective review of three-dimensional effects at cracks and sharp notches, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 36 (2013) 699-723.
- [3] M.R. Ayatollahi, J. Karami, B. Saboori, Mixed mode II/III fracture experiments on PMMA using a new test configuration, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 77 (2019) 103812.
- [4] S.H. Sajjadi, M. Ostad Ahmad Ghorabi, D. Salimi-Majd, A novel mixed-mode brittle fracture criterion for crack growth path prediction under static and fatigue loading, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 38 (2015) 1372-1382.
- [5] S.H. Sajjadi, D. Salimi-Majd, M.O.A. Ghorabi, Development of a brittle fracture criterion for prediction of crack propagation path under general mixed mode loading, *Engineering Fracture Mechanics*, 155 (2016) 36-48.
- [6] G. Lesiuk, P. Kucharski, J.A. Correia, A. De Jesus, C. Rebelo, L.S. da Silva, Mixed mode (I+ II) fatigue crack growth in puddle iron, *Engineering Fracture Mechanics*, 185 (2017) 175-192.
- [7] D. Salimi-Majd, F. Shahabi, B. Mohammadi, Effective local stress intensity factor criterion for prediction of crack growth trajectory under mixed mode fracture conditions, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 85 (2016) 207-216.
- [8] M.R. Ayatollahi, S. Razavi, M.R. Moghaddam, F. Berto, Mode I fracture analysis of polymethylmetacrylate using modified energy-based models, *Physical Mesomechanics*, 18 (2015) 326-336.
- [9] M. Williams, Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension, *Journal of applied mechanics*, 19 (1952) 526-528.
- [10] A. Carpinteri, Stress-singularity and generalized fracture toughness at the vertex of re-entrant corners, *Engineering Fracture Mechanics*, 26 (1987) 143-155.
- [11] D. Taylor, Predicting the fracture strength of ceramic materials using the theory of critical distances, *Engineering Fracture Mechanics*, 71 (2004) 2407-2416.

- [12] A. Seweryn, Brittle fracture criterion for structures with sharp notches, *Engineering Fracture Mechanics*, 47 (1994) 673-681.
- [13] M.L. Dunn, W. Suwito, S. Cunningham, Fracture initiation at sharp notches: correlation using critical stress intensities, *International Journal of Solids and Structures*, 34 (1997) 3873-3883.
- [14] P. Lazzarin, R. Zambardi, A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp V-shaped notches, *International journal of fracture*, 112 (2001) 275-298.
- [15] P. Livieri, A new path independent integral applied to notched components under mode I loadings, *International Journal of Fracture*, 123 (2003) 107-125.
- [16] D. Leguillon, Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 21 (2002) 61-72.
- [17] M. Ayatollahi, A. Torabi, Brittle fracture in rounded-tip V-shaped notches, *Materials & Design*, 31 (2010) 60-67.
- [18] H.-Y. Yeh, B. Yang, A concise review about fracture assessments of brittle solids with V-notches, *Frontiers of Structural and Civil Engineering*, 13 (2019) 478-485.
- [19] E. Priel, A. Bussiba, I. Gilad, Z. Yosibash, Mixed mode failure criteria for brittle elastic V-notched structures, *International journal of fracture*, 144 (2007) 247-265.
- [20] M.L. Dunn, W. Suwito, S. Cunningham, C.W. May, Fracture initiation at sharp notches under mode I, mode II, and mild mixed mode loading, *International Journal of Fracture*, 84 (1997) 367.
- [21] A. Seweryn, A non-local stress and strain energy release rate for a crack under combined Mode-I and-II, *Eng Fract Mech*, 59 (1998) 737-760.
- [22] A. Seweryn, Modeling of singular stress fields using finite element method, *International journal of solids and structures*, 39 (2002) 4787-4804.
- [23] P. Lazzarin, R. Zambardi, P. Livieri, A J-integral-based approach to predict the fatigue strength of components weakened by sharp V-shaped notches, *International Journal of Computer Applications in Technology*, 15 (2002.۲۰۲-۲۱۰) (
- [24] P. Livieri, Use of J-integral to predict static failures in sharp V-notches and rounded U-notches, *Engineering fracture mechanics*, 75 (2008) 1779-1793.
- [25] Z. Yosibash, E. Priel, D. Leguillon, A failure criterion for brittle elastic materials under mixed-mode loading, *International journal of fracture*, 141 (2006) 291-312.

- [26] Z. Yosibash, B. Mittelman, A revised failure criterion for brittle elastic materials under mixed-mode loading in 2-D, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 84.۱۴۹-۱۵۶ (۲۰۱۶)
- [27] A. Carpinteri, P. Cornetti, N. Pugno, A. Sapora, D. Taylor, A finite fracture mechanics approach to structures with sharp V-notches, *Engineering Fracture Mechanics*, 75 (2008) 1736-1752.
- [28] D. Leguillon, A criterion for crack nucleation at a notch in homogeneous materials, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics*, 329 (2001) 97-102.
- [29] L. Susmel, D. Taylor, The theory of critical distances to predict static strength of notched brittle components subjected to mixed-mode loading, *Engineering Fracture Mechanics*, 75 (2008) 534-550.
- [30] D. Taylor, Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model, *International Journal of Fatigue*, 21 (1999) 413-420.
- [31] A. Sapora, P. Cornetti, A. Carpinteri, V-notched elements under mode II loading conditions, *Structural Engineering and Mechanics*, 49 (2014) 499-508.
- [32] A. Seweryn, A. Łukaszewicz, Verification of brittle fracture criteria for elements with V-shaped notches, *Engineering fracture mechanics*, 69 (2002) 14.۸۷-۱۵۱.
- [33] A. Seweryn, Z. Mróz, A non-local stress failure condition for structural elements under multiaxial loading, *Engineering Fracture Mechanics*, 51 (1995) 955-973.
- [34] M. Ayatollahi, A. Torabi, P. Azizi, Experimental and theoretical assessment of brittle fracture in engineering components containing a sharp V-notch, *Experimental mechanics*, 51 (2011) 919-932.
- [35] M. Ayatollahi, A. Torabi, Investigation of mixed mode brittle fracture in rounded-tip V-notched components, *Engineering Fracture Mechanics*, 77 (2010) 3087-3104.
- [36] S.M.J. Razavi, M.R.M. Aliha, F. Berto, Application of an average strain energy density criterion to obtain the mixed mode fracture load of granite rock tested with the cracked asymmetric four-point bend specimens, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 97 (2018) 419-425.
- [37] M. Aliha, F. Berto, A. Bahmani, P. Gallo, Mixed mode I/II fracture investigation of Perspex based on the averaged strain energy density criterion, *Physical Mesomechanics*, 20 (2017) 149-156.
- [38] M.R. Moghaddam, M. Ayatollahi, F. Berto, Mixed mode fracture analysis using generalized averaged strain energy density criterion for linear elastic materials, *International Journal of Solids and Structures*, 120 (2017) 137-145.
- [39] M.T. Ayatollahi, AR; Dehghani, M, A criterion for brittle fracture in sharp v-notched components under in-plane mixed mode loading, in: 2th National Conference on Mechanical Engineering Islamic Azad University, Khomeinishahr branch, Esfihan, Iran, 2009.

- [40] M.T. Ayatollahi, AR ;Dehghani, M, Maximum tangential strain energy criterion for estimating brittle fracture in sharp V-notches, in: 18th Annual Conference on Mechanical Engineering Sharif University of Technology, Tehran, Iran, 2010.
- [41] A.R. Torabi, B. Bahrami, M.R. Ayatollahi, Mixed mode I/II brittle fracture in V-notched Brazilian disk specimens under negative mode I conditions, *Physical Mesomechanics*, 19 (2016) 332-348.
- [42] A. Torabi, B. Saboori, M. Ayatollahi, Mode III Notch Fracture Toughness Assessment for Various Notch Features, *Physical Mesomechanics*, 21 (2018) 320-332.
- [43] S.H. Sajjadi, A. Khorshidvand, M. Jabbari, M. Javadi, Comparing Energy-Based Criterion with Strain-Based Criterion for Predicting Brittle Fracture in V-Shaped Notches under Mixed-Mode I/II Loading Conditions, *Physical Mesomechanics*, Accepted Paper (2021).
- [44] B. Gross, A. Mendelson, Plane elastostatic analysis of V-notched plates, *International Journal of Fracture Mechanics*, 8 (1972) 267-276.
- [45] A. Chambolle, G.A. Francfort, J.-J. Marigo ,When and how do cracks propagate?, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57 (2009) 1614-1622.
- [46] S. Sajjadi, M. Ostad Ahmad Ghorabi, D. Salimi-Majd, A novel mixed-mode brittle fracture criterion for crack growth path prediction under static and fatigue loading, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 38 (2015) 1372-1382.

ضمیمه

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_{rr}(\theta) \\ f_{\theta\theta}(\theta) \\ f_{r\theta}(\theta) \end{bmatrix} &= \frac{1}{b_1} \begin{bmatrix} [\cos((1 + \lambda_1)\theta) + c_1 \cos((1 - \lambda_1)\theta)] \\ [-\cos((1 + \lambda_1)\theta) + c_2 \cos((1 - \lambda_1)\theta)] \\ [-\sin((1 + \lambda_1)\theta) + c_5 \sin((1 - \lambda_1)\theta)] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} g_{rr}(\theta) \\ g_{\theta\theta}(\theta) \\ g_{r\theta}(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{b_2} \begin{bmatrix} [\sin((1 + \lambda_2)\theta) + c_3 \sin((1 - \lambda_2)\theta)] \\ [-\sin((1 + \lambda_2)\theta) + c_4 \sin((1 - \lambda_2)\theta)] \\ [-\cos((1 + \lambda_2)\theta) + c_6 \cos((1 - \lambda_2)\theta)] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} A_{rr}(\theta) \\ A_{\theta\theta}(\theta) \\ A_{r\theta}(\theta) \end{bmatrix} = \frac{1}{b_1} \begin{bmatrix} [(1 + \nu) \cos((1 + \lambda_1)\theta) + (c_1 - \nu c_2) \cos((1 - \lambda_1)\theta)] \\ [-(1 + \nu) \cos((1 + \lambda_1)\theta) + (c_2 - \nu c_1) \cos((1 - \lambda_1)\theta)] \\ [-(1 + \nu) \sin((1 + \lambda_1)\theta) + c_5 \sin((1 - \lambda_1)\theta)] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_{rr}(\theta) \\ B_{\theta\theta}(\theta) \\ B_{r\theta}(\theta) \end{bmatrix} = \frac{1}{b_2} \begin{bmatrix} [(1+v)\sin((1+\lambda_2)\theta) + (c_3 - vc_4)\sin((1-\lambda_2)\theta)] \\ [-(1+v)\sin((1+\lambda_2)\theta) + (c_4 - vc_3)\sin((1-\lambda_2)\theta)] \\ [-(1+v)\cos((1+\lambda_2)\theta) + c_6\cos((1-\lambda_2)\theta)] \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \frac{(3-\lambda_1)\sin((\pi-\varphi)(1+\lambda_1))}{(1-\lambda_1)\sin((\pi-\varphi)(1-\lambda_1))}, c_2 = \frac{(1+\lambda_1)\sin((\pi-\varphi)(1+\lambda_1))}{(1-\lambda_1)\sin((\pi-\varphi)(1-\lambda_1))}, c_3 = \frac{(3-\lambda_2)\sin((\pi-\varphi)(1+\lambda_2))}{(1+\lambda_2)\sin((\pi-\varphi)(1-\lambda_2))}$$

$$c_4 = \frac{\sin((\pi-\varphi)(1+\lambda_2))}{\sin((\pi-\varphi)(1-\lambda_2))}, c_5 = \frac{\sin((\pi-\varphi)(1+\lambda_1))}{\sin((\pi-\varphi)(1-\lambda_1))}, c_6 = \frac{(1-\lambda_2)\sin((\pi-\varphi)(1+\lambda_2))}{(1+\lambda_2)\sin((\pi-\varphi)(1-\lambda_2))}$$

$$b_1 = c_2 - 1, b_2 = 1 - c_6$$

$$l_1 = (1+v)(1+\lambda_1), l_2 = c_1(1-\lambda_1) \left(v - \frac{(1+\lambda_1)}{(3-\lambda_1)} \right), l_3 = -(1+v)(1+\lambda_2), l_4 = c_3(1-\lambda_2) \left(\frac{(1+\lambda_1)}{(3-\lambda_1)} - v \right)$$