JMRA
مجله پژوهش و کاربرد در مکانیک
ISSN: 2251-7383, eISSN: 2251-7391

# استخراج معادلات حاکم بر رفتار متقارن محوری پایدار یک ورق دایروی توپر پیزوالکتریک متخلخل

**علی ابجدی[1]، محسن جباری[1]، احمد رضا خورشیدوند[1*]**

۱- گروه مهندسی مکانیک، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

**تاریخ دریافت:** ۱۳۹۹-۷-۸ **تاریخ پذیرش:** ۱۳۹۹-۷-۲۸

**چکیده:** بر اساس شواهد موجود مواد پیزوالکتریک متخلخل، پتانسیل زیادی برای توسعه ساختارهای هوشمند (فعال) با مقاومت بالا، سختی بالا و وزن سبک از قبیل سرامیک ها و کامپوزیت ها را دارند. از جمله مواد سرامیکی با ترکیبات پیزوالکتریک متخلخل می توان به Lead-zirconate-titanate (PZT)، Lead-titanate (PbTiO2)، Lead-zirconate (PbZrO3) ، Barium-titanate (BaTiO3)، Cadmium-selenide (CdSe) و غیرو اشاره نمود. این پژوهش، به استخراج معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی حاکم بر رفتار ورق دایروی ساخته شده از یک ماده کریستال متقارن شش وجهی از کلاس 6 mm متخلخل اشباع تخلیه نشده پیزوالکتریک در حالت تقارن محوری و پایدار می پردازد. تخلخل پذیری ورق دایروی در امتداد ضخامت آن تغییر می کند، لذا فرض می شود که خواص ماده بجز ضریب پواسون، بصورت توابع نمایی از متغیر محور **z** در مختصات استوانه ای باشد. بعلاوه رفتار پیزوترموالاستیک ورق دایروی تحت بارهای خارجی حرارتی، مکانیکی و الکتریکی مد نظر است که بر این اساس، مفاهیم مختلفی شامل تئوری الاستیسیته خطی سه بعدی و تئوری دی الکتریک، بصورت ترکیبی برای ایجاد یک مدل پیزوالکتریک خطی، بکار گرفته می شود. ویژگیهای صنعتی فوق العاده و خاص مواد پیزوالکتریک متخلخل، استفاده روزافزون از آنها و ضرورت آگاهی از رفتار این مواد، اهمیت این تحقیق را دو چندان می کند.

**واژه‌های کلیدی**: ورق دایروی، معادلات حاکم، مواد پیزوالکتریک متخلخل، رفتار پیزوترموالاستیک، تئوری الاستیسیته خطی

## ۱. مقدمه

بررسی رفتار مواد پیزوالکتریک متخلخل که جزو مواد هوشمند (فعال) محسوب می شوند، یکی از موضوعات بسیار محبوب بین محققین می باشد. Jordan و همکارش [1] به معرفی ویژگیها و چگونگی عملکرد سرامیک های پیزوالکتریک بعنوان مواد هوشمند پرداختند و اذعان داشتند که این مواد در برابر محرک های خارجی، با تغییر خاصیت در خود واکنش نشان می دهند، بعنوان مثال تحت تاثیر دما، فشار (تنش) و میدان الکترومغناطیس، یک تغییر شکل حجمی از خود نشان می دهند. در پژوهش Dobrucki و همکارش [2] راهکارهایی برای شناخت منابع اثر پیزوالکتریک و توسعه موادی با ویژگیهای پیزوالکتریک برای کابردهای مختلفی از جمله سنسورها و عملگرها ارائه شده است. علی رغم پیشرفت قابل توجه در بهبود ویژگی های کوپلینگ بین خصوصیات الکتریکی و مکانیکی در مواد پیزوالکتریک، عموماً مواد پیزوالکتریک مونولیتی، محدودیت هایی مانند شکنندگی و یا

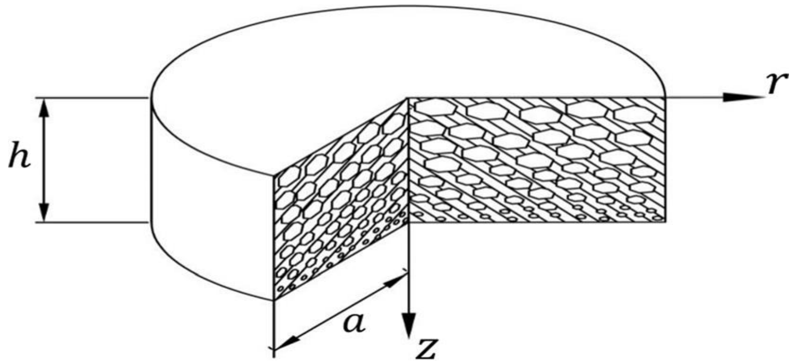
دامنه محدود خصوصیات جفت شدگی از خود به معرض نمایش می گذارند. برای کاهش محدودیت های مذکور در مورد مواد پیزوالکتریک مونولیتی، روش های افزایشی یا کاهشی توسعه یافته است. در روش افزایشی، برای بهینه سازی پاسخ الکترومکانیکی مؤثر ماده پیزوالکتریک مرکب، دو یا چند ماده تشکیل دهنده با هم ترکیب می شوند و در روش کاهشی، چگالی ماده از طریق اضافه شدن تخلخل کنترل شده، کاهش می یابد. Zimmerman [3] با انجام تحقیق در مورد ارتباط بین تخلخل پذیری و ترموالاستیسیته، موفق به ارایه پارامترهای بدون بعدی شد که استحکام بین اثرات مکانیکی و هیدرولیکی یا حرارتی را تعیین می کنند. و نیز بر اساس تحقیق ارایه شده توسط Harrison و همکارش [4] مشخص شد که مواد پیزوالکتریک بدلیل پهنای باند وسیع و گسترده، پاسخ سریع الکترومکانیکی، تحریک پذیری حتی با اعمال قدرت کم، نیروهای مولد بالا، سهولت ساخت، بقاء در شرایط سخت، انعطاف پذیری در تبدیل شدن به اشکال مختلف، ثابت های بزرگ دی الکتریک و ضرایب اتصال بالا دارای اهمیت زیادی هستند. مواد پیزوالکتریک به دو گروه اصلی، کریستال ها و سرامیک ها تقسیم بندی می شوند. سرامیک ها که چند کریستالی (پلی کریستال) هستند دارای کیفیت های بالایی نسبت به مواد کریستالی معمولی از قبیل حساسیت بالاتر و سهولت ساخت به اشکال و اندازه های مختلف هستند. در مواد کریستالی معمولی، محدودیت هایی از جمله حساسیت آنها به رطوبت، هزینه بالا، دشواری در رسیدن به یک شرایط استوکیومتری شیمیایی مناسب وجود دارد. سرامیک های پوروالاستیک پیزوالکتریک کاربردهای بسیاری مانند دستگاه های شتاب سنج التراسونیک پزشکی، آکوستیک زیر آب، میکروفون تماسی، هیدروفون های فرکانس پایین، تست غیرمخرب، سنسورهای ارتعاشی و غیرو دارند [9 -5]. خاصیت پیزوالکتریکی یک ویژگی ذاتی در مواد سرامیکی است و در آنها یک اثر دو قطبی الکتریکی ایجاد می کند. این دو قطبی ها در کنار هم مناطقی را تشکیل می دهند که دامنه های وایس (Weiss) نامیده می شوند که به طور پیش فرض، هر کدام از دامنه ها با همسایگان خود فقط به لحاظ جهت گیری با یکدیگر متفاوت هستند (قطبش خالص آنها صفر است). هنگامی که ماده پلی کریستالی تحت فشار است، این دامنه ها جهت گیری خود را به سمتی تغییر می دهند که انرژی الکتریکی یا مکانیکی ذخیره شده در دامنه، کاهش می یابد. این تغییر جهت برای ایجاد تغییر در قطبش خالص کافی نیست و لذا این اثر پیزوالکتریک نمایش داده شده توسط ماده ناچیز خواهد بود. بنابراین لازم است با ایجاد فشار در حالت اولیه، اثر پیزوالکتریک در این ماده القا شود تا تغییر قابل توجهی در قطبش خالص ایجاد گردد. قطب دار کردن فرآیندی برای تولید قطبش باقیمانده خالص با استفاده از میدان الکتریکی به اندازه کافی بالا در ماده، زیر دمای کوری (Curie) آن است. دمای کوری به دمایی گفته می شود که در آن ماهیت ماده از فرم غیر پیزوالکتریک به فرم پیزوالکتریک تبدیل می شود. وقتی یک میدان الکتریکی به یک ماده پلی کریستال اعمال شود، دامنه ها در جهت میدان اعمال شده، جهت می گیرند و در این حالت، ماده در ماکزیمم قطبش قرار می گیرد [12 -10]. در ادامه Dunn و Taya یک رویکرد نظری وابسته به اثرات شکل و غلظت تخلخل را برای پیش بینی خصوصیات الکترومکانیکی در سرامیک های پیزوالکتریک متخلخل ارایه دادند [13]. Roncari و همکارانش با آزمایش و مطالعه بر روی سرامیک پیزوالکتریک متخلخل تیتانات زیرکونات سرب، اثرات حجم پلیمر و دمای پخت را روی نمونه های ریزساختار بررسی نمودند [14]. برای یافتن تنش ها در اجسام پیزوالکتریک، معادلات حاکم بر پتانسیل الکتریکی و تغییر شکل می بایست بطور همزمان حل شوند. لذا Fumihiro و همکارانش روش مشابهی را برای یک ورق پیزو از جنس کریستال کلاس 6 mm تحت گرمایش متقارن محوری انجام دادند. آنها توابع پتانسیل را بصورت دی کوپل در نظر گرفتند و معادلات را جداگانه حل نمودند [15]. Ashida و همکارش حل گذرای یک دیسک دایروی پیزوترموالاستیک را تحت گرمایش متقارن محوری مورد بررسی قرار دادند [16]. Zhang و Wang یک حل دقیق برای تغییر شکل و میدان تنش در یک استوانه محدود تحت شرایط مرزی متقارن محوری ارایه دادند [17]. Zhao و همکارانش یک حل تحلیلی متقارن محوری برای یک ورق دایروی ناهمگن مولتی فروییک (چند آهنی) و بصورت عرضی ایزوتروپیک را تحت بارگذاری الکتریکی ارایه دادند. آنها کوپلینگی از میادین مغناطیسی الکترواالاستیک را در نظر گرفتند که دقیقا شرایط مرزی بالا و پایین و تقریبا شرط مرزی استوانه ای را برآورده می کنند [18]. تولید انرژی از محیط اطراف مانند دمای محیط، ارتعاشات یا جریان هوا به عنوان "برداشت انرژی" نامیده می شود. برداشت کننده های انرژی ساخته شده از مواد پیزوالکتریک، ارتعاشات را به انرژی الکتریکی تبدیل می کنند که برای جایگزینی یا افزایش طول عمر باتری هایی استفاده می شود که برای تأمین انرژی طیف وسیعی از دستگاه های الکترونیکی کم قدرت مانند سنسور بی سیم و غیره استفاده می شوند [19]. سرامیک های متخلخل با تخلخل پذیری نسبی ریز و کم، کارایی و بازدهی انرژی ۱٫۵ تا ۲ برابر بیشتر از سرامیک های تولیدی به روش پرس داغ دارند و می توانند به عنوان ژنراتورهای پیزوالکتریک استفاده شوند. سطوح بالای تخلخل پذیری در مواد، منجر به کاهش قابل توجهی در میزان قدرت و همچنین کاهش ظرفیت گرمایی ویژه می شود که برای برداشت انرژی سرامیک پیزوالکتریک مورد توجه است. این نتایج نشان می دهد که استفاده از مواد متخلخل، سبب

بهینه سازی توزیع مواد پیزوالکتریک شده و می تواند برداشت انرژی را نسبت به یک ماده غیر متخلخل افزایش دهد [20]. Liu و همکارانش خواص پیزوالکتریکی و مکانیکی سرامیک های متخلخل PZT تقویت شده با CaO و کانال های با منافذ یک بعدی را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند [21]. Pinheiro و همکارش مروری اجمالی بر سرامیک های پیزوالکتریک متخلخل بدون سرب ارایه دادند که با تمرکز بر ویژگیهای مناسب زیست محیطی این نوع از سرامیک ها به بیان قابلیت ها و کاربردهای آنها پرداخته اند [22]. مشکینی و همکارانش حل تحلیلی پایدار یک استوانه بی نهایت بلند تو خالی ضخیم ساخته شده از ماده پیزوالکتریک متخلخل تحت بارهای نامتقارن ترموالکترومکانیکی را ارایه دادند [23].

در این تحقیق، رفتار پیزوترموالاستیک در حالت پایدار و تقارن محوری یک ورق دایروی از جنس کریستال متقارن شش وجهی از کلاس 6 mm متخلخل اشباع تخلیه نشده پیزوالکتریک مورد بررسی قرار گرفته و معادلات حاکم بر این رفتار استخراج می گردند. بدلیل تخلخل پذیری ورق دایروی در امتداد ضخامت آن، فرض شده که خواص ماده تابع نمایی از متغیر ضخامت z در مختصات استوانه ای باشد و بر اساس تئوری ترموالاستیسیته خطی، معادلات با مشتقات جزیی حاکم بدست می آیند.

## ۲. روش شناسی

شکل (۱)، ورق دایروی ساخته شده از یک کریستال شش وجهی متقارن کلاس 6 mm متخلخل اشباع تخلیه نشده پیزوالکتریک را با رفتار تقارن محوری نشان می دهد.




شکل (۱): شماتیکی از ورق دایروی پوروالاستیک پیزوالکتریک

۱-۲) معرفی روابط اولیه تنش، کرنش، معادلات تعادل و انتقال حرارت

۱-۱-۲) روابط کرنش- تغییر مکان در مختصات استوانه ای

برای یک المان استوانه‌ای در حالت تقارن محوری و پایدار، روابط بین کرنش‌ها و تغییر مکان ها بصورت ذیل می باشد.

$$\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{1}{r}u \qquad \varepsilon_{zz}=w_{,z} \qquad \varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left(w_{,r}+u_{,z}\right) \qquad \varepsilon_{r\theta}=\varepsilon_{\theta z}=0 \qquad \varepsilon_{rr}=u_{,r}$$

(۱)

۲-۱-۲) روابط تعادل تنش ها و جابجایی های الکتریکی

معادلات تعادل تنش ها و جابجایی های الکتریکی را در امتداد محوری و شعاعی با صرفنظر از ترم های مربوط به نیروهای حجمی و اینرسی در حالت تقارن محوری و پایدار، خواهیم داشت.

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{1}{r}(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})=0$$
$$\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{1}{r}\sigma_{rz}=0$$
$$\frac{\partial D_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial D_{zz}}{\partial z}+\frac{1}{r}(D_{rr})=0$$

(۲)

۳-۱-۲) معادله انتقال حرارت هدایتی در مختصات استوانه‌ای

با نوشتن قانون بقاء انرژی برای داخل و خارج یک المان استوانه ای، معادله انتقال حرارت هدایتی در حالت تقارن محوری و پایدار با صرفنظر از منبع تولید حرارت در داخل برای مختصات استوانه ای بصورت ذیل بدست می آید.

$$T_{,rr} + \frac{1}{r}T_{,r} + T_{,zz} + \frac{k(z)_{,z}}{k(z)}T_{,z} = 0 \qquad (۳)$$

۲-۲) استخراج معادلات حاکم ترموالاستیسیته درمختصات استوانه‌ای

برای بدست آوردن معادلات ترموالاستیسیته بر حسب مولفه‌های تغییر مکان وقتی که جسم ایزوتروپ بوده و تغییر طولهای نسبی کوچک هستند، ابتدا باید تنش‌ها را بر حسب مولفه‌های تغییر طول نسبی نوشت و سپس تغییر طولهای نسبی را بر حسب تغییر مکان‌ها بیان نمود. لذا با استفاده از تئوری الاستیسیته خطی، روابط تغییر طول نسبی به صورت زیر خواهند بود.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (i, j = 1,2,3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(M)} + \varepsilon_{ij}^{(T)}$$

(۴)

که $\varepsilon_{ij}^{(M)}$ تغییر طول نسبی حاصل از تنش‌های وارده بر اثر بار مکانیکی و $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ تغییر طول نسبی حاصل از تغییر درجه حرارت می‌باشد.

$$\varepsilon_{ij}^{(T)} = \alpha_{ij} \xrightarrow{isotrop} \varepsilon_{ij}^{(T)} = \alpha(T)\delta_{ij} \qquad (۵)$$

در رابطه فوق $\alpha$ ضریب انبساط حرارتی و $\delta$ دلتای کرونکر است که برای محاسبه $\varepsilon_{ij}^{(M)}$ به صورت زیر عمل می شود.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\ \varepsilon_{kl}$$

$$C_{ijkl} = \alpha\ \delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\ \delta_{kl}\delta_{jl} + \gamma\ \delta_{il}\delta_{jk}$$

(۶)

در رابطه فوق $C_{ijkl}$ تانسور سفتی ماده نامیده می‌شود که برای مواد ایزوتروپیک که دارای بی نهایت صفحه تقارن هستند، این ضرایب به ۲ عدد کاهش می‌یابد. بنابراین رابطه تانسور تنش و کرنش الاستیک برای مواد ایزوتروپیک در شکل اندیسی بصورت زیر است.

$$\sigma_{ij} = \lambda \in_{kk}\ \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad ، \in_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{3\lambda + 2\mu}$$

$$\rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\sigma_{kk}\delta_{ij})$$

(7)

در این رابطه $\sigma_{kk}$ جمع تنش‌های عمودی و یا تریس تانسور تنش می‌باشد و از کتب مکانیک محیط‌های پیوسته می توان روابط میان ثابت‌های الاستیسیته موجود را استخراج نمود. لذا

$$E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \qquad \upsilon=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

در رابطه بالا $\upsilon$ ضریب پواسون می‌باشد. در ضمن تغییر طول نسبی حاصل از تنش‌های وارده بر اثر بار مکانیکی $\varepsilon_{ij}^{(M)}$ بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\varepsilon_{ij}^{(M)}=\left(\frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{ij}-\frac{\upsilon}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{8}$$

حال با استفاده از رابطه (۸) تغییر طول نسبی به شکل زیر خواهد بود.

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij}-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right)+\alpha(T)\delta_{ij} \tag{9}$$

و در ادامه محاسبات، خواهیم داشت:

$$\epsilon_{kk}=\frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{kk}-\frac{3\lambda}{3\lambda+2\mu}\sigma_{kk}\right)+3\alpha(T)$$
$$\sigma_{kk}=(3\lambda+2\mu)(\epsilon_{kk}-3\alpha(T)) \tag{10}$$

با استفاده از رابطه (9) و ترکیب مجموع روابط (10)، رابطه زیر بدست می آید.

$$\sigma_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}+\lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij}-(3\lambda+2\mu)\alpha(T)\delta_{ij} \tag{11}$$

که دلتای کرونکر و کرنش حجمی بصورت زیر بیان می‌شوند.

$$\delta_{ii}=\delta_{jj}=\delta_{rr}=\delta_{\theta\theta}=\delta_{zz}=1 \qquad \delta_{ij}=\delta_{r\theta}=\delta_{rz}=\delta_{\theta z}=0$$
$$\varepsilon_{kk}=(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{zz})$$

بنابراین با استفاده از رابطه (11) و پس از ساده سازی، روابط تنش- کرنش در مختصات استوانه ای با در نظر گرفتن ترم دما و در حالت تقارن محوری، بصورت ذیل بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}&=(\lambda+2\mu)\varepsilon_{rr}+\lambda(\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{zz})-(3\lambda+2\mu)\alpha T(r,z)\\
\sigma_{\theta\theta}&=(\lambda+2\mu)\varepsilon_{\theta\theta}+\lambda(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{zz})-(3\lambda+2\mu)\alpha T(r,z)\\
\sigma_{zz}&=(\lambda+2\mu)\varepsilon_{zz}+\lambda(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta})-(3\lambda+2\mu)\alpha T(r,z)\\
\sigma_{rz}&=2\mu\varepsilon_{rz}
\end{aligned} \tag{12}$$

۳-۲) معادلات حاکم بر مواد متخلخل

۱-۳-۲) استخراج معادلات پورو ترموالاستیسیته در مختصات استوانه‌ای

رابطه تنش- فشار یک جسم الاستیک ایزوتروپیک تحت بار فشاری یا کششی طبق قانون هوک به شرح زیر است.

$$\sigma_{ij}=-P'\delta_{ij} \tag{13}$$

همچنین رابطه کرنش- فشار برابر است با:

$$\varepsilon_{ij}=1\frac{1-2v}{E}P' \tag{14}$$

بنابراین انبساط ایجاد شده در اثر افزایش فشار داخل جسم برابر است با:

$$\in_{kk}=-\frac{3(1-2\nu)}{E}P' \qquad \in_{kk}=-KP' \qquad K=\frac{E}{3(1-2\nu)}$$
(15)

$K$ مدول الاستیسیته بالک نامیده می‌شود. مدول بالک یک ثابت الاستیسیته برای نمایان شدن رابطه بین فشار و کرنش می‌باشد. در این ثابت، در صورتیکه مقدار ضریب پواسون به 0.5 میل نماید مقدار K بی‌نهایت می‌شود و این زمانی امکانپذیر است که در جسم تغییرشکل حجمی نداشته باشیم و ماده تراکم ناپذیر باشد.

مواد الاستیک ایزوتروپیک علاوه بر ضریب $K$ با استفاده از ضرایب $\nu$، $E$، $\lambda$ و $\mu$ نیز توصیف می‌شوند و با داشتن مقادیر دو ضریب از پنج ضریب فوق، سایر ضرایب نیز بدست می‌آیند و تغییرات دمایی در اجسام موجب تغییر شکل آنها می‌گردد. در صورتی‌که $T$ ترم دما باشد، کرنش حرارتی در محدوده خطی برای اجسام ایزتروپیک را می‌توان به فرم زیر نوشت.

$$\varepsilon_{ij}=\alpha(T)\delta_{ij}$$
(16)

که در آن $\alpha$ ضریب انبساط حرارتی نامیده می‌شود و همچنین تنش‌های حرارتی به فرم زیر بیان می گردند.

$$\sigma_{ij}=-(3\lambda+2\mu)\alpha(T)$$
(17)

تغییر شکل مواد پورو را می‌توان به دو حالت، تغییر شکل در حالت تخلیه نشده و تغییر شکل در حالت تخلیه شده تقسیم بندی نمود.

۱- در حالت پاسخ تخلیه نشده، شرایطی حاکم است که مایع در جسم پورو محبوس شده و می‌توان تغییرات حجم مایع را در جسم پورو صفر در نظر گرفت. لذا $(\mathrm{P}\neq 0) \quad , \quad \xi=0$.

۲- در حالت پاسخ تخلیه شده، شرایطی حاکم است که مایع در جسم پورو محبوس نشده و می‌توان فشار داخلی جسم را برابر صفر در نظر گرفت. لذا $(\xi\neq 0) \quad , \quad \mathrm{P}=0$.

همچنین مشخصه‌های پاسخ آنی و بلندمدت جسم پورو تحت بارگذاری ناگهانی را می‌توان با پاسخ تخلیه شده و تخلیه نشده آن مرتبط دانست. در لحظه اول اعمال بار ناگهانی، مایع پورو زمان لازم را برای حرکت میان المان‌های کناری خود ندارد و از این رو بعد از لحظه اول (در واقع با گذشت زمان و پاسخ بلندمدت) با ناپدید شدن فشار پورو و به تعادل رسیدن آن، در مرزهای جسم فشار صفر حاکم می‌شود. در واقع شرایط تخلیه نشده زمانی رخ می‌دهد که مقیاس زمانی اعمال بار بسیار کوچک باشد و مایع پورو میان جسم جابه‌جا نگردد و نیز شرایط تخلیه شده زمانی رخ می‌دهد که مایع پورو فرصت لازم برای حرکت به المان کناری خود را دارد و فشار پورو به تعادل رسیده است.

فرمول‌بندی بایوت برای اجسام پورو با فرض خطی بودن روابط بین تنش- کرنش و بازگشت‌پذیر بودن فرآیند تغییرشکل صورت می گیرد. با استفاده از توصیف الاستیسیته خطی، معادلات کرنش- جابه‌جایی حاکم بر جسم پورو برابر است با

$$\varepsilon_{ij}=\frac{\sigma_{ij}}{2\mu}-\left(\frac{1}{6\mu}-\frac{1}{9K}\right)\delta_{ij}\sigma_{kk}+\frac{1}{3X}\delta_{ij}P'+\alpha\,\delta_{ij}T$$
(18)

تغییرات حجم مایع در جسم پورو به صورت زیر می باشد.

$$\zeta=\frac{\sigma_{kk}}{3X}+\frac{P}{Y}+\alpha T$$
(19)

$X$ و $Y$ ثابت‌های اضافی کوپل میان فاز جامد - مایع و تنش- کرنش ا ست. لذا با فرض

$$P' = -\frac{\sigma_{kk}}{3} \tag{20}$$

$P'$ فشار میانگین یا فشار کلی (تنش فشاری ایزتروپیک) و $P$ فشار پورو نامیده می شود.

کرنش جسم پورو را می‌توان در دو بخش در نظر گرفت. لذا

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij} \qquad \in_{kk} = \in = -\left(\frac{P'}{K} - \frac{P}{X} - \alpha T\right) \tag{21}$$

معادلات (21) از جایگذاری معادله (20) در معادله (18) بدست آمده است. و نیز با جایگذاری معادله (۲۰) در معادله (19) داریم.

$$\zeta = -\left(\frac{P'}{X} - \frac{P}{Y} - \alpha T\right) \tag{22}$$

با فرض پاسخ تخلیه نشده $(\xi = 0)$ و شرایط همدما $(T = 0)$ می‌توان روابط زیر را استخراج نمود.

$$\zeta = 0 \rightarrow \frac{P'}{X} - \frac{P}{Y} = 0 \quad \rightarrow \frac{P'}{X} = \frac{P}{Y} \quad \rightarrow \; P = \frac{Y}{X}P' \tag{23}$$

$$P = BP' \quad , \quad B = \frac{Y}{X} \tag{24}$$

B ثابت تراکم پذیری یا ضریب Skempton نامیده می‌شود. ثابت تراکم‌پذیری رابطه میان فشار پورو و فشار کلی را در حالت پاسخ تخلیه نشده بیان می‌کند. با جایگذاری معادله (۲۴) در کرنش حجمی معادله (21)، کرنش حجمی در شرایط همدما برحسب $P'$ به شرح زیر بدست می‌آید.

$$\epsilon = -\left(\frac{P'}{K} - \frac{P}{X}\right) = -\left(\frac{P'}{K} - \frac{Y}{X^2}P'\right) = -P'\left(\frac{1}{K} - \frac{Y}{X^2}\right) \qquad \epsilon = \frac{P'}{K_u}$$

$$K_u = \frac{1}{\frac{1}{K} - \frac{Y}{X^2}} = \frac{1}{\frac{X^2 - KY}{KX^2}} = \frac{KX^2 + K^2Y - K^2Y}{X^2 - KY} = K + \frac{K^2Y}{X^2 - KY}$$

$$K_u = K\left(1 + \frac{KY}{X^2 - KY}\right) \tag{25}$$

که در آن $k_u$ مدول الاستیسته بالک در حالت تخلیه نشده می باشد.

اکنون با فرض پاسخ تخلیه شده $(P = 0)$ و شرایط همدما $(T = 0)$ می‌توان روابط زیر را استخراج نمود.

با جایگذاری $(T = 0 \; , \; P = 0)$ در معادله (۲۱) داریم:

$$\in = -\frac{P'}{K} \tag{26}$$

با توجه به مجموعه معادلات (25) و معادله (26) رفتار مواد پورو در حالت تخلیه شده و تخلیه نشده همانند یک جسم الاستیک است.

ازسوی دیگر وقتی که شرایط تخلیه نشده باشد سختی بیشتری از حالت تخلیه شده است.

با جایگذاری مقادیر $(T = 0 \; , \; P = 0)$ و مقدار $P'$ از معادله (26) در معادله (22) داریم.

$$\zeta = \frac{K}{X}\in \qquad \zeta = \gamma \in \qquad \gamma = \frac{K}{X}$$
(27)

که در آن $\gamma$ ضریب بایوت نام دارد. ضریب بایوت نسبت مایع وارد شده یا خارج شده در یک المان از جسم را بیان می کند و نیز $\zeta$ وابسته به تغییرات حجم آن المان (کرنش حجمی $\in$) می‌باشد. مقادیر $X$ و $Y$ با توجه به معادله (15) و ترم $\gamma$ در معادله (18) بدست می آیند. با جایگزینی مقادیر $X$ و $Y$ در ترم $K_u$ از معادله (25)، رابطه $\mathrm{K_u}$ برحسب B، $K$ و $\gamma$بدست می‌آید که با استفاده از این رابطه و پس از ساده سازی، رابطه ثابت تراکم پذیری B حاصل می گردد.

$$B = \frac{K_u - K}{\gamma K_u} \tag{28}$$

و با دانستن روابط زیر از از کتب مکانیک محیط‌های پیوسته

$$K_u = \frac{2\mu(1+\nu_u)}{3(1-2\nu_u)} \qquad K = \frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$$

همچنین با اعمال روابط فوق در رابطه (28) و ساده سازی، مقدار ثابت B برحسب ضریب پواسون بدست می آید.

$$B = \frac{3(\nu_u - \nu)}{\gamma(1+\nu_u)(1-2\nu)} \tag{29}$$

که درآن $\nu_u$ ضریب پواسون در حالت تخلیه نشده می باشد و با استفاده از مجموعه معادلات (25)، معادله کرنش حجمی و تغییرات حجم مایع پورو به شرح زیر بدست می آیند.

$$\in = -\left(\frac{P'}{K} - \frac{\gamma}{K}P - \alpha T\right) \tag{30}$$

$$\zeta = -\left(\frac{\gamma}{K}P - \frac{\gamma}{KB}P - \alpha T\right) \tag{31}$$

با استفاده از معادله ( 30) و معادله (31) تغییرات حجم مایع پورو به شرح زیر بدست می‌آید.

$$\gamma\in - \frac{\gamma^2}{K}P - \gamma\alpha T = -\gamma\frac{P'}{K} \tag{32}$$

با جایگذاری معادله (32) درمعادله (31) داریم.

$$\zeta = -\left(\frac{\gamma^2}{K}P + \alpha T - \gamma\in - \frac{\gamma}{KB}P - \alpha T\right)$$
$$\zeta = -\left((\frac{\gamma^2}{K} - \frac{\gamma}{KB})P + (\gamma\alpha - \alpha T - \gamma\in)\right) \tag{33}$$

با فرض شرایط همدما از معادله (30) و (31) مقادیر $P'$ و $P$ به شرح زیر استخراج می‌شود.

$$\begin{cases} \in = -\dfrac{P'}{K} + \dfrac{\gamma}{K} P \\ \zeta = -\left(\dfrac{\gamma}{K} P' - \dfrac{\gamma}{KB} P\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P' = \left(\overbrace{\dfrac{1}{\dfrac{1}{KB} - \dfrac{\gamma}{K}}}^{a}\right) \zeta - \left(\overbrace{\dfrac{1}{\dfrac{1}{K} - \dfrac{\gamma B}{K}}}^{b}\right) \in \\ P = \underbrace{\left(\dfrac{1}{\dfrac{\gamma}{KB} - \dfrac{\gamma^2}{K}}\right)}_{c} \zeta - \left(\dfrac{\gamma}{\dfrac{\gamma}{KB} - \dfrac{\gamma^2}{K}}\right) \in \end{cases}$$

(34)

با جایگذاری مقدار B، مدول بایوت برمبنای مدول بالک بدست می‌آید.

$$I = \frac{1}{\dfrac{1}{KB} - \dfrac{\gamma}{K}} = \frac{KB}{1 - \gamma B} = \frac{K\left(\dfrac{(K_u - K)}{\gamma K_u}\right)}{1 - \gamma\left(\dfrac{K_u - K}{\gamma K_u}\right)}$$
$$= \frac{\dfrac{1}{\gamma}\dfrac{K}{K_u}(K_u - K)}{\dfrac{K}{K_u}} = \frac{K_u - K}{\gamma} = \gamma\,\frac{K_u - K}{\gamma^2} = \gamma M = I$$

(35)

M در روابط فوق مدول بایوت نامیده می‌شود. لذا مقدار مدول بایوت برمبنای مدول بالک تخلیه شده وتخلیه نشده به صورت زیر بیان می گردد.

$$M = \frac{K_u - K}{\gamma^2}$$

(36)

با جایگذاری مقدار B، در معادلات (34)

$$(b)=\frac{1}{\frac{1}{K}-\frac{\gamma B}{K}}=\frac{K}{1-\gamma B}=\frac{K}{1-\gamma\left(\frac{K_u-K}{\gamma K_u}\right)}=\frac{K}{\frac{K}{K_u}}=K_u$$

$$(c)=\frac{1}{\frac{\gamma}{KB}-\frac{\gamma^2}{K}}=\frac{1}{\frac{\gamma-\gamma^2 B}{KB}}=\frac{KB}{\gamma-\gamma^2 B}=\frac{K\left(\frac{K_u-K}{\gamma K_u}\right)}{\gamma-\gamma^2\left(\frac{K_u-K}{\gamma K_u}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{\gamma}\left(\frac{K}{K_u}\right)(K_u-K)}{\gamma\left(1-\frac{K_u-K}{K_u}\right)}=\frac{\frac{1}{\gamma}\left(\frac{K}{K_u}\right)(K_u-K)}{\gamma\left(\frac{K}{K_u}\right)}=\frac{K_u-K}{\gamma^2}=M$$

(37)

همچنین با جایگذاری روابط (35)، مدول بایوت برمبنای ضرایب پواسون چنین حاصل می گردد.

$$M=\frac{2\mu(\nu_u-\nu)}{\gamma^2(1+\nu_u)(1-2\nu)}$$

(38)

اکنون با جایگذاری مقادیر ضرایب (b) و (c) در معادلات (35)، روابط فشار کل پورو و نیز فشار پورو را می‌توان بصورت زیر بدست آورد.

$$\begin{cases}P'=\gamma M\,\zeta-K_u\in\\ P=M\,\zeta-\gamma M\in\end{cases}$$

(۳۹)

$$P=M(\zeta-\gamma\in)$$

(40)

مطابق آنچه که در بالا به اثبات رسید در این مرحله می خواهیم روابط حاکم بر تخلخل پذیری ماده پورو بر مبنای ثابت تراکم پذیری و مدول بایوت را بیابیم. لذا پاسخ حجمی ماده پورو الاستیک که تحت فشار کلی $P'$ و فشار تخلخل $P$ می باشد، مورد بررسی قرار می گیرد. در این بارگذاری دو نمونه علامت گذاری $(P,P')$ استفاده می شود که می توان آنها را مستقلاً بیان نمود. بارگذاری $(P,P')$ می تواند به صورت دو مولفه دیگر نیز نوشته شود:

۱- فشار موثر Terzaghi که $P''=P'-P$ است.

۲- فشار پای ($\Pi$) که $\overline{P}=P$ متناظر با فشار محبوس و فشار متخلخل به همان اندازه $P$ می‌باشد.

این نوع بارگذاری خاص از این پس به عنوان بارگذاری پای شناخته شده و بصورت $(P'',P')$ نشان داده می شود.

حال اگر یک نمونه از ماده متخلخل با حجم $V$ که حاوی فضاهایی به هم مرتبط متخلخل با حجم $V_p$ و حجم جسم جامد و متخلخل های ایزوله با $V_s$ در نظر گرفته شود، همواره می توان نوشت $V=V_p+V_s$.

در حالت اشباع کامل، حجم سیالی که می تواند در محیط متخلخل گردش کند برابراست با $V_f=V_p$ که در آن $V_f$ حجم مایع تعریف می گردد و تخلخل پذیری به صورت زیر بیان می

$$\phi=\frac{V_p}{V} \tag{41}$$

لذا در این حالت پاسخ حجمی ماده متخلخل با بارگذاری $(P'',P')$ می تواند به صورت تابعی از $\frac{\Delta V}{V}$ و $\frac{\Delta V_p}{V_p}$ که به ترتیب کرنش حجمی کلی ماده وکرنش حجمی فضای متخلخل می باشد، بیان شود. با استفاده از فرض وابستگی خطی میان تنش و کرنش می‌توان روابط زیر را نوشت:

$$\frac{\Delta V}{V}=-\frac{1}{K}(P'-\gamma P)=-\frac{P'}{K}-\frac{\gamma p}{K}$$
$$\frac{\Delta V_p}{V_p}=-\frac{1}{K_p}(P'-\gamma' P)=-\frac{P'}{K_p}-\frac{\gamma p}{K_p} \tag{42}$$

که در روابط فوق $K_p$ مدول بالک کرنش حجمی تخلخل و $\gamma'$ ضریب تنش موثر بدون بعد می باشد. از سوی دیگر ضرایبی که در معادله (42) ظاهر می گـــردند همگی مستقل نمی باشند، لـــذا می توان بیان نمود، افزایش در حجم $\Delta V$ بر اثر اعمال فشار تخلخل $P$ برابر کاهش در حجم $\Delta V_p$ بر اثر اعمال فشار کلی $P'$ و به همان اندازه می باشد که با استفاده از این تعریف داریم.

$$\frac{dV}{dP}\Big|_{P'}=\frac{dV_P}{dP'}\Big|_P \tag{43}$$

با مشتق‌گیری از معادله (42) بر اساس معادله (43)

$$\frac{dV}{dP}\Big|_{P'}=\frac{\gamma}{K}V \quad , \quad \frac{dV_p}{dP'}\Big|_P=-\frac{1}{K}V_p$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\gamma}{K}V=\frac{1}{K}V_p \tag{44}$$

با توجه به معادله (41) را بطه (44) بصورت ذیل نوشته می‌شود.

$$K_p=\frac{\phi}{\gamma}K \tag{45}$$

با استفاده از فرض وابستگی خطی میان تنش و کرنش و با در نظر گرفتن فشار موثر Terzaghi و فشار پای ( $\Pi$) می‌توان روابط زیر را نوشت.

$$\frac{\Delta V}{V}=-\frac{P''}{K}-\frac{\bar{p}}{K_s'} \quad , \quad \frac{\Delta V_p}{V_p}=-\frac{P''}{K_p}-\frac{p}{K_s''} \tag{46}$$

حال از مجموعه روابط (42) و (46) و با فرض $\phi K_s'=\phi K_s'+K_p-K_p$ خواهیم داشت.

$$\gamma(1+\frac{K_p}{\phi K_s'})=1 \quad \rightarrow \gamma(\frac{\phi K_s'+K_p}{\phi K_s'})=1$$
$$\Rightarrow \gamma=(\frac{\phi K_s'}{\phi K_s'+K_p}) \rightarrow \gamma=(\frac{\phi K_s'+K_p-K_p}{\phi K_s'+K_p})$$
$$\gamma=1-\frac{K_p}{\phi K_s'+K_p}$$

(47)

برای بیان مولفه جامد متخلخل، پاسخ حجمی جسم جامد متخلخل را بر اساس فشار موثر Terzaghi و فشار پای ($\Pi$) به صورت $\frac{\Delta V_s}{V_s}$ و $\frac{\Delta\phi}{(1-\phi)}$ نیز بیان می کنند که عبارت اول، مقدار تغییر نسبی حجم جسم جامد و عبارت دوم، تغییر نسبی محیط متخلخل جسم جامد را نشان می دهد. از سوی دیگر با استفاده از تعریف $V=V_p+V_s$ و رابطه (۴۱) داریم.

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta V_s}{V_s}+\frac{\Delta\phi}{(1-\phi)} \qquad \frac{\Delta V_p}{V_p}=\frac{\Delta V_s}{V_s}+\frac{\Delta\phi}{\phi(1-\phi)}$$

(48)

با استفاده از روابط (48)، معادلات فاز متخلخل با توجه به روابط (46) بصورت زیر بدست می‌آیند.

$$-\frac{P''}{K_p}-\frac{p}{K_s''}=\frac{\Delta V_s}{V_s}+\frac{\Delta\phi}{\phi(1-\phi)} \qquad -\frac{P''}{K}-\frac{p}{K_s'}=\frac{\Delta V_s}{V_s}+\frac{\Delta\phi}{(1-\phi)}$$

(49)

با ساده‌سازی رابطه (49)، معادله فاز متخلخل به فرم زیر حاصل می شود.

$$\frac{\Delta\phi}{(1-\phi)}=\left[-\frac{P''}{K_\phi}+\frac{\phi}{1-\phi}(\frac{1}{K_s'}-\frac{1}{K_s''})P\right] \tag{50}$$

با توجه به روابط (45) و (47)، ترم $\frac{1}{K_\phi}$ را می توان به شکل زیر نیز نوشت.

$$\frac{1}{K_\phi}=\frac{1}{K}-\frac{1}{1-\phi}\frac{1}{K_s'} \tag{51}$$

اکنون با استفاده از روابط (48)، معادلات فاز جامد با توجه به روابط (46) و (50) به شکل ذیل بدست می‌آیند.

$$\frac{\Delta V_s}{V_s}=\frac{P''}{K}+\frac{P}{K_s'}+(\frac{\phi}{1-\phi})\left[-P''(\frac{1}{K_p}+\frac{1}{K})+P(\frac{1}{K_s'}-\frac{1}{K_s''})\right]$$
$$\frac{\Delta V_s}{V_s}=\left[-P''(\frac{\phi}{1-\phi K}+\frac{1-\phi}{\phi K}+\frac{\phi}{1-\phi K_p})+P(\frac{\phi}{1-\phi K_s'}+\frac{(1-\phi)}{\phi K_s'}-\frac{\phi}{1-\phi K_s''})\right]$$

(52)

از معادله (47) و نیز با استفاده از رابطه (45)، رابطه (۵۲) به فرم زیر بازنویسی می شود.

$$\frac{\Delta V_s}{V_s}=-\frac{P''}{(1-\phi)K'_s}-\frac{1}{1-\phi}\left(\frac{1}{K'_s}-\frac{\phi}{K''_s}\right)P \quad (53)$$

با فرض اینکه تمام محیط متخلخل با سیال پرشده باشد، می‌توان گفت که تغییرات حجم تخلخل برابر تغییرات حجم سیال محبوس شده در تخلخل است ( $\Delta V_p=\Delta V_f$ ). همچنین تغییرات حجمی سیال نیز به دو جزء زیر قابل تجزیه می‌باشد که پاسخ حجمی سیال نامیده می‌شود.

$$\Delta V_f=\Delta V_f^{(1)}+\Delta V_f^{(2)} \quad (54)$$

$\Delta V_f^{(1)}$ مولفه ای است که تراکم یا انبساط سیال درونی را نشان می دهد و $\Delta V_f^{(2)}$ بیانگر اثر تبادل سیال درون ماده متخلخل و سیال خارج آن می باشد. با استفاده از مدول بالک سیال، $K_f$ $\Delta V_f^{(1)}$ را می توان به صورت تابعی از فشار تخلخل نوشت.

$$\frac{\Delta V_f^{(1)}}{V_f}=-\frac{P}{K_f} \quad (55)$$

از سوی دیگر مولفه $\Delta V_f^{(2)}$ با تغییرات حجم مایع در جسم پورو ( $\zeta$ ) مرتبط است. لذا

$$\zeta=\frac{\Delta V_f^{(2)}}{V}=\frac{\phi\,\Delta V_f^{(2)}}{V_f} \quad (56)$$

با استفاده از روابط (46)، (55) و (56) داریم.

$$\frac{\Delta V_p}{V_p}=-\frac{P''}{K_p}-\frac{P}{K''_s}\;,\quad \Delta V_p=\Delta V_f\;,\quad V_p=\phi V\;,\quad P''=P'-P$$

$$\rightarrow\ \frac{\Delta V_f}{\phi V}=-\frac{P'-P}{K_p}-\frac{P}{K''_s} \qquad \frac{\Delta V_f}{V}=-\frac{\phi}{K_p}\left[P'+\left(1-\frac{K_p}{K''_s}\right)P\right] \quad (57)$$

بنابراین با قراردادن عبارت (54) در رابطه (57)، روابط زیر بدست می‌آیند.

$$\frac{\Delta V_f^{(1)}}{V_f^{(1)}}+\frac{\Delta V_f^{(2)}}{V_f^{(2)}}=-\frac{\phi}{K_p}\left[P'+\left(1-\frac{K_p}{K''_s}\right)P\right] \qquad -\frac{P}{K_f}+\zeta=-\frac{\phi}{K_p}\left[P'+\left(1-\frac{K_p}{K''_s}\right)P\right]$$

$$\zeta=-\frac{\phi}{K_p}\left[P'+\left(1-\frac{K_p}{K''_s}\right)P\right]+\frac{P}{K_f}$$

$$\zeta=-\frac{\phi}{K_p}\left[P'-\left(\frac{K_p}{K''_s}+\frac{K_p}{\phi K_f}-1\right)P\right] \quad (58)$$

بطوریکه که عبارت $\left(\frac{K_p}{K''_s}+\frac{K_p}{\phi K_f}-1\right)$ برابر عکس ضریب Skempton می باشد. لذا تغییرات حجم مایع در جسم پورو ( $\zeta$ ) را می‌توان به فرم زیر نیز نوشت.

$$\zeta = -\frac{\phi}{K_p}\left[P' - \frac{P}{B}\right] \qquad (59)$$

بنابراین معادله اصلی برای ترم ( $\zeta$ ) با استفاده از معادله (31) در شرایط همدما از دیدگاه های دیگر مورد بررسی قرار گرفت و تغییرات حجم مایع در جسم پورو بر مبنای تخلخل و بر اساس فشار کلی و فشار پورو از رابطه (59) استنباط گردید. با توجه به روابطی که تا کنون اثبات شدند، سایر روابط بین مدول بالک محیط پیوسته و ضرایب میکرومکانیکال به فرم مندرج در جدول (۱) برای مواد پوروالاستیسته نشان داده شده است.

جدول (۱): روابط بین مدول بالک محیط پیوسته و ضرایب میکرومکانیکال [7]

$$= 1 - \frac{K_p}{\phi K'_s + K_p} \qquad \gamma = 1 - \frac{K}{K'_s}$$

$$K_u = K\left[1 + \frac{(1-\frac{K}{K'_s})^2}{\frac{K}{K'_s}(1-\frac{K}{K'_s}) + \phi(\frac{K}{K_f} - \frac{K}{K''_s})}\right]$$

$$= 1 - \frac{\frac{K_p}{K_f} - \frac{K_p}{K''_s}}{1 + \frac{K_p}{K'_s} - \frac{K_p}{K''_s}} = 1 - \frac{\phi(\frac{K}{K_f} - \frac{K}{K''_s})}{(1-\frac{K}{K'_s}) + \phi(\frac{K}{K_f} - \frac{K}{K''_s})} \qquad B = \frac{K_u - K}{\gamma K_u}$$

$$= K_\phi(1 - \frac{K_\phi}{(1-\phi)K'_s + K_\phi}) = \frac{K_p}{\phi}(1 - \frac{K_p}{\phi K'_s + K_p}) \qquad K = K'_s(1 - \frac{\phi K'_s}{\phi K'_s + K_p})$$

$$= \frac{K}{K'_s}(\frac{1}{K} - \frac{1}{K'_s}) + \phi(\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K''_s}) \qquad \frac{1}{M} = \frac{\gamma^2}{K_u - K}$$

اکنـــون پارامترهای کلیدی و حالات حدی مختلف در روابط پوروالاستیسیته خـــطی بـــررسی می گردند. بازنـــویسی معادلات موجود در جـــدول (۱) معانی دیـــگری را برای ضرایب پوروالاستیسیته مشخص می‌کند. این جدول  نشان دهنده سیال متناظر در محیط پیوسته و میکرومکانیکی است و بدین ترتیب این معادلات می‌توانند وابستگی ضرایب حجمی محیط پیوسته $\gamma, B, K, K_u$ نسبت به تخلخل و تراکم‌پذیری سیال، جامد و محیط متخلخل را نشان دهند. لذا به صورت ویژه‌ایی می‌توان معادلات ساده شده پارامترهای پوروالاستیسیته را در حالات مختلف حدی استخراج نمود.

۱- اگر جسم جامد تراکم ناپذیر فرض گردد (یعنی $\frac{K}{K''_s} << 1$ و $\frac{K}{K'_s} << 1$ ) این تراکم پذیری جسم جامد در مقابل ماده با پاسخ تخلیه شده قابل صرفنظر کردن است. لذا روابط موجود درجدول (۱) برای $\gamma, B, K_u, M$ به فرم زیر ساده می گردند:

$$\gamma = 1 \qquad K_u = K(1 + \frac{K_f}{\phi K})$$

$$B=\frac{K_u-K}{\gamma K_u}=1-\frac{1}{1+\frac{K_f}{\phi K}} \qquad M=\frac{K_u-K}{\gamma^2}=\frac{K_f}{\phi} \tag{60}$$

۲- اگرسیال و جسم جامد تراکم ناپذیر فرض گردند (یعنی $\frac{K}{K_f}<<1$ و $\frac{K}{K_s''}<<1$ و $\frac{K}{K_s'}<<1$ ) آنگاه مطابق روابط جدول (2) داریم که: $B=1$ $K_u\to\infty$ و $M\to\infty$

۳- اگر سیال به شدت تراکم ناپذیر باشد (یعنی $\frac{K}{K_f}<<1$)، معادلات به فرم زیر بیان می گردند:

$$M=\frac{K_f}{\phi} \qquad B=\frac{\gamma K_f}{\phi K}=\frac{K_f}{K} \qquad K_u=K(1+\frac{\gamma^2 K_f}{\phi K}) \tag{61}$$

پس در این حالت نیز $B\to 0$، $K_u\to K$ و $M\to 0$ و یا به عبارت دیگر ماده متخلخل همانند یک ماده الاستیک بدون سیال عمل می کند که بیانگر همان پاسخ تخلیه شده است.

جدول (۲) بیانگر روابط $K_u, B, \gamma$ و $M$ در حالات خاص زمانیکه نامتغیرهای تخلخل تحت بارگذاری پای ( $\Pi$) می باشند که نمایانگر متناظر بودن فشار محبوس شده و فشار متخلخل است ( $\overline{P}=P$).

جدول (۲): نامتغیرهای تخلخل متناظر بین فشار محبوس شده و فشار متخلخل – بارگذاری پای ( $\Pi$) [7]

$$\gamma=1-\frac{K}{K_s}$$

$$K_u=K\left[1+\frac{\gamma^2 K_f}{(1-\gamma)+(\gamma-\phi)K_f+\phi K}\right]$$

$$B=\frac{K_u-K}{\gamma K_u}=\frac{\gamma K_f}{(\gamma-\phi)(1-\gamma)K_f+\phi K}$$

$$\frac{1}{M}=\frac{\gamma^2}{K_u-K}=\frac{\phi}{K_f}+\frac{(\gamma-\phi)}{K_s}$$

با توجه به روابطی که تا کنون بیان شد، جدول (3) نمایانگر روابط کلیدی درحـل مسائل پوروالاستیسیته بر مبنای ضرایب پواسون، تخلخل پذیری و مدول بالک در پاسخ تخلیه شده و پاسخ تخلیه نشده است.

جدول (3): روابط کلیدی در حل مسائل پورو بر اساس ضرایب پواسون، تخلخل پذیری و مدول بالک در شرایط تخلیه شده و تخلیه نشده [7]

$$K_u = K\left[1+\frac{\gamma^2 K_f}{(1-\gamma)+(\gamma-\phi)K_f+\phi K}\right]$$

$$B = \frac{K_u-K}{\gamma K_u} = \frac{\gamma K_f}{(\gamma-\phi)(1-\gamma)K_f+\phi K} = \frac{3(\nu_u-\nu)}{\gamma(1+\nu_u)(1-2\nu)}$$

$$M = \frac{K_u-K}{\gamma^2} = \frac{K_f K_s}{(\gamma-\phi)K_f+\phi K_s} = \frac{2\mu(\nu_u-\nu)}{\gamma^2(1+\nu_u)(1-2\nu)}$$

از سوی دیگر همانطور که قبلاً بیان شد در حالت پاسخ تخلیه نشده شرایطی حاکم است که مایع در جسم پورو محبوس شده است و می‌توان تغییرات حجم مایع را در جسم پورو صفر در نظر گرفت. بنابراین در این حالت $(P' \neq 0), \zeta = 0$ ولذا از رابطه (37) فشار پورو در حالت تعادل به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{cases} P = -M(\gamma\epsilon) \\ \epsilon = \varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{zz} \end{cases} \quad (62)$$

$$P = -M\gamma(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{zz}) \quad (63)$$

با توجه به مجموعه روابط (12)، روابط تنش کرنش با در نظر گرفتن ترم فشار پورو به صورت زیر بیان می‌گردند:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= (\lambda+2\mu)\varepsilon_{rr}+\lambda(\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{zz})-(3\lambda+2\mu)\alpha T(r,z)-\gamma p\delta_{rr}\\
\sigma_{\theta\theta} &= (\lambda+2\mu)\varepsilon_{\theta\theta}+\lambda(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{zz})-(3\lambda+2\mu)\alpha T(r,z)-\gamma p\delta_{\theta\theta}\\
\sigma_{zz} &= (\lambda+2\mu)\varepsilon_{zz}+\lambda(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta})-(3\lambda+2\mu)\alpha T(r,z)-\gamma p\delta_{zz}\\
\sigma_{rz} &= 2\mu\varepsilon_{rz}
\end{aligned} \quad (64)$$

با توجه به رابطه فشار ماده پورو (40) داریم.

$$P = M\big(\xi-\gamma(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{zz})\big) \quad (65)$$

این تحقیق در حالت پایدار بیان می‌گردد، لذا با فرض شرایط تخلیه نشده که در آن ترم تغییرات حجم سیال ثابت فرض می‌شود، یعنی $\xi = 0$، لذا رابطه فشار بصورت ذیل می باشد.

$$P = -M\gamma(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{zz}) \quad (66)$$

که در آن مقدار M بیانگر مدول بایوت می‌باشد و از رابطه زیر بر اساس روابط جدول (3)، به دست می‌آید.

$$M = \frac{2\mu(v_u-v)}{\gamma^2(1-2v)(1-2v_u)} \quad (67)$$

بطوریکه $v$ و $v_u$ ضرایب پواسون بترتیب در شرایط تخلیه شده و تخلیه نشده می‌باشند که مقادیر آنها از آزمایش بدست می‌آیند. بنابراین با ساده سازی روابط (64)، روابط تنش کرنش برای مواد پورو ترموالاسیسته در مختصات استوانه‌ای در حالت تقارن محوری و پایدار، به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\sigma_{rr} = (\lambda+2\mu+M\gamma^2)\varepsilon_{rr}+(\lambda+M\gamma^2)(\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{zz})-(3\lambda+2\mu)\alpha T(r,z)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu + M\gamma^2)\varepsilon_{\theta\theta} + (\lambda + M\gamma^2)(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha T(r,z)$$
$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu + M\gamma^2)\varepsilon_{zz} + (\lambda + M\gamma^2)(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha T(r,z)$$
$$\sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz} \tag{68}$$

۲-۴) معادلات حاکم بر مواد پیزوالکتریک

۲-۴-۱) استخراج معادلات پیزو ترموالاستیسیته در مختصات استوانه‌ای

هنگامی که یک ولتاژ از عرض یک خازن ساخته شده از مواد دی الکتریک معمولی عبور می کند، نتیجه‌اش اعمال یک شارژ بر روی صفحات یا الکترودهای خازن است. شارژ همچنین می‌تواند روی الکترودهای یک خازن ساخته شده از مواد پیزوالکتریک بتوسط اعمال تنش، تولید شود که این را به عنوان اثر مستقیم پیزوالکتریک می‌شناسیم. و بالعکس اعمال یک میدان بر روی مواد، کرنش آنها را نتیجه خواهد داد که این اثر را اثر معکوس پیزوالکتریک می‌نامند. به معادله‌ای که این ارتباط را بیان می‌کند، معادله پیزوالکتریک می‌گویند که بشکل زیر نوشته می شود.

$$D_i = d_{ij}\sigma_j \tag{69}$$

در این معادله $D_i$ جابجایی الکتریکی (چگالی شارژ)، $d_{ij}$ مدول پیزوالکتریک، نسبت کرنش به میدان بکار برده شده یا چگالی شارژ به تنش مکانیکی بکار گرفته شده است.

d اندازه‌های شارژ ایجاد شده بوسیله‌ی یک نیروی معین یا انحناء تولید شده بوسیله‌ی یک ولتاژ معین است. همچنین تعریف معادله‌ی پیزوالکتریک را با ترم‌هایی از میدان و کرنش می‌توان بیان کرد.

$$D_i = \frac{\sigma_j \lambda_i}{E_j} \tag{70}$$

لذا جابجایی الکتریکی بدین صورت تعریف می‌گردد.

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j \tag{71}$$

و نیز میدان الکتریکی از نسبت شارژ الکتریکی و تنش، بر کرنش بدست می‌آید. لذا

$$E_j = \frac{d_{ij}}{\varepsilon_{ij}}\sigma_j \tag{72}$$

میدان الکتریکی را می‌توان به وسیله ۲ معادله ماکسول به صورت زیر شرح داد.

$$\varepsilon_{ijk}\frac{\partial E_i}{\partial i} = 0 \qquad \frac{D_i}{\partial i} = 0 \tag{73}$$

که معادلات پیزو الکتریک خطی بالا دارای ۲ میدان برداری شامل $E_i$ بردار میدان الکتریک، $D_i$ بردار جابه‌جایی (تغییر مکان) الکتریکی می باشند و $\varepsilon_{ijk}$ علامت جایگشت است.

با معرفی پتانسیل الکتریکی $\varphi$ ، معادلات ماکسول را می‌توان بوسیله سیستم معادلات دیفرانسیل زیر جایگزین کرد.

$$D_i = 0$$

$$E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial i} \quad (74)$$

در ادامه، برای شرح رفتار منحصر به فرد مواد ترموپیزوالکتریک علاوه بر معادلات تعادل و معادلات پیوستگی، متغیرهای ذیل به عنوان متغیرهای مستقل انتخاب و معرفی می گردند.

$\frac{\partial u_j}{\partial i}$ : گرادیان جا به جایی

$E_i$ : بردار میدان الکتریک

$\frac{\partial E_i}{\partial j}$ : گرادیان میدان الکتریک

$T = (T_1 - T_0)$ : دمای مطلق

$\frac{\partial T}{\partial i}$ : گرادیان دما

و نیز متغیرهای زیر بعنوان متغیرهای وابسته در نظر گرفته می شوند.

$\sigma_{ij}$ : تانسور تنش

$\rho$ : دانسیته ی جرم

$U$ : دانسیته ی انرژی داخلی

$\eta$ : آنتروپی

همچنین از ترمودینامیک داریم که:

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial i} - \frac{\partial \varphi}{\partial i} \frac{\partial D_j}{\partial t} - \frac{\partial q_i}{\partial i} \quad (75)$$

پتانسیل الکتریکی Gibbs که شامل $\rho G = \rho G(\frac{\partial u_j}{\partial i}, E_i, \frac{\partial E_i}{\partial \theta}, T, \frac{\partial T}{\partial i})$ می باشد را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\rho G = \rho U - E_i D_i - \rho \eta T$$

با مشتق گیری از معادله فوق نسبت به زمان، خواهیم داشت.

$$\rho \frac{\partial G}{\partial t} = \rho \frac{\partial U}{\partial t} - E_i \frac{\partial D_i}{\partial t} - D_i \frac{\partial E_i}{\partial t} - T \rho \frac{\partial \eta}{\partial t} - \rho \eta \frac{\partial T}{\partial t} \quad (76)$$

از طرفی با مشتق گرفتن از عبارت $\rho G = \rho G(\frac{\partial u_j}{\partial i}, E_i, \frac{\partial E_i}{\partial j}, T, \frac{\partial T}{\partial i})$ نسبت به زمان، داریم.

$$\rho\frac{\partial G}{\partial t}=\rho\frac{\partial G}{\partial \frac{\partial u_j}{\partial i}}-E_i\frac{\partial D_i}{\partial t}-D_i\frac{\partial E_i}{\partial t}-T\rho\frac{\partial \eta}{\partial t}-\rho\eta\frac{\partial T}{\partial t}+\rho\frac{\partial G}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}+\rho\frac{\partial G}{\partial \frac{\partial T}{\partial i}}\frac{\partial \frac{\partial T}{\partial t}}{\partial i} \tag{77}$$

با استفاده از معادلات (76) و (77) و قرار دادن نتایج محاسبات در معادله (75)، رابطه زیر بدست می آید.

$$\left(\rho\frac{\partial G}{\partial \frac{\partial u_j}{\partial i}}-\sigma_{ij}\right)\frac{\partial \frac{\partial u_j}{\partial t}}{\partial i}+\left(\rho\frac{\partial G}{\partial E_i}+D_i\right)\frac{\partial E_i}{\partial t}+\left(\rho\frac{\partial G}{\partial \frac{\partial E_i}{\partial t}}{\partial j}\right)\frac{\partial \frac{\partial E_i}{\partial t}}{\partial j}\rho\left(\frac{\partial G}{\partial T}+\eta\right)\frac{\partial T}{\partial t}+\left(\rho\frac{\partial G}{\partial \frac{\partial T}{\partial i}}\right)\frac{\partial \frac{\partial T}{\partial t}}{\partial i}+T\rho\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial q_i}{\partial i}=0 \tag{78}$$

معادله (78) باید برای تمام مقادیر قابل قبول از $\frac{\partial \frac{\partial u_j}{\partial t}}{\partial i}$ ، $\frac{\partial E_i}{\partial t}$ ، $\frac{\partial \frac{\partial E_i}{\partial t}}{\partial j}$ ، $\frac{\partial T}{\partial t}$ و $\frac{\partial \frac{\partial T}{\partial t}}{\partial i}$ صادق باشد. بنابراین علائم داخل پرانتز در معادله (78) باید به طور یکسان حذف شوند. این علائم، مستقل از مشتقات زمان هستند و نتایج بدین صورت بدست می آیند:

$$\rho\frac{\partial G}{\partial \frac{\partial u_j}{\partial i}}=\sigma_{ji}\qquad \rho\frac{\partial G}{\partial E_i}=-D_i\qquad \frac{\partial G}{\partial T}=-\eta\qquad \rho\frac{\partial G}{\partial \frac{\partial T}{\partial i}}=-0\qquad \frac{\partial G}{\partial \frac{\partial E_i}{\partial t}}{\partial j} \tag{79}$$

بنابراین پتانسیل الکتریکی Gibbs مستقل از گرادیان فاصله ای $\frac{\partial T}{\partial j}$ , $\frac{\partial E_i}{\partial j}$ خواهد شد. این موضوع بدان علت است که مشتقات $\frac{\partial T}{\partial j}$ , $\frac{\partial E_i}{\partial j}$ در معادله (79) برابر صفر می باشند. لذا نتایج تعادل انرژی باقی مانده از معادلات (78) و (79) بدین صورت است.

$$T\rho\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial q_i}{\partial i}=0 \tag{80}$$

$\theta=T-T_0$ را به صورت تغییرات دما نسبت به تنش آزاد دمایی $T_0$ معرفی می کنیم و پتانسیل الکتریکی Gibbs را حول مرجع $\rho G(\frac{\partial u_j}{\partial i},E_i,T)=\rho G(0,0,T_0)$ بسط می دهیم.

اگر وجود یک حالت طبیعی، مشابه با حالت مرجع فرض شده باشد، جایی که:

$$\rho G(0,0,T_0)=0$$
$$\sigma_{ij}(0,0,T_0)=D_i(0,0,T_0)=\eta(0,0,T_0)=0 \tag{81}$$

بنابراین ترم‌های خطی از سری تیلور بوسیله خاصیت روابط (79) حذف خواهند شد و ضرایب ترم‌های وابسته به درجه دوم مربوط به معادلات پیوستگی، با استفاده از تئوری هندسی مواد و فیزیک خطی، به صورت زیر نشان داده می شوند.

$$\rho\frac{\partial^2 G}{\frac{\partial u_j}{\partial i}\partial E_k}=\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial E_k}=-\frac{\partial D_k}{\frac{\partial u_j}{\partial i}}=-e_{kij} \qquad \rho\frac{\partial^2 G}{\frac{\partial u_j}{\partial i}\partial T}=\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T}=-\frac{\partial \eta}{\frac{\partial u_j}{\partial i}}=-z_{ij}$$

$$\rho\frac{\partial^2 G}{\frac{\partial u_j}{\partial i}\frac{\partial u_k}{\partial l}}=\frac{\partial \sigma_{ij}}{\frac{\partial u_k}{\partial l}}=C_{ijkl} \qquad \rho\frac{\partial^2 G}{\partial E_i\partial T}=\frac{\partial D_i}{\partial T}=-\rho\frac{\partial \eta}{\partial E_i}=-g_i$$

(82)

ارتباط بین متغیرهای حالت که شامل ترم‌های حرارتی، الکتریکی و مکانیکی است را می‌توان اکنون با استفاده از مجموعه معادلات (82) و نیز با فرض ( $T_0=0$ ) به فرم زیر نوشت.

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial l}-e_{kij}E_k-z_{ij}(T-T_0)$$
$$D_i=e_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial l}+\varepsilon'_{ij}E_j+g_i(T-T_0)$$

(83)

در رابطه فوق عبارت $C_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial l}$ بیانگر ترم الاستیسیته، $e_{kij}E_k$ بیانگر پیزوالکتریک (میدان الکتریکی) و ترم $z_{ij}(T-T_0)$ بیانگر تنشهای حرارتی، $\varepsilon'_{ij}E_j$ بیانگر نفوذ پذیری الکتریکی و $p_i(T-T_0)$ بیانگر ترم حرارتی پیزو (ایجاد قطب الکتریکی دربلور بوسیله تغییر در حرارت) می باشد.

همچنین درمعادلات (78)، $C_{ijkl}$ تانسور سفتی، $e_{kij}$ تانسور پیزوالکتریک (ارتباط تنش با میدان الکتریکی) $z_{ij}$ تانسور ضرایب تنش حرارتی، $\varepsilon'_{ij}$ تانسور ضریب دی الکتریک (واحد اندازه گیری الکتریسیته بر حسب فاراده) و $g_i$ بردار ضریب ترم حرارتی پیزو الکتریک است.

ضمنا در اینجا نیز رابطه تعادل با توجه به روابط اثباتی پیزو تا کنون، بشکل اندیسی به فرم زیر تعریف می‌گردد.

$$\frac{\partial D_i}{\partial i}=0 \qquad (84)$$

۵-۲) معادلات حاکم بر ترکیبی از هر دو ماده (ماده متخلخل پیزوالکتریک)

۱-۵-۲) استخراج معادلات حاکم برای مواد پورو- پیزو ترمو الاستیسیته در مختصات استوانه ای بر مبنای روابط اثبات شده

همانطور که تاکنون برای مواد با خاصیت پورو و پیزو الکتریک با در نظر گرفتن ترم دما در مختصات استوانه ای در حالت تقارن محوری که بترتیب در مجموعه روابط (64) و (83) بدست آمدند، می‌توان روابط ترکیبی این مواد که در اکثر مقالات بدین طریق نوشته شده را بیان نمود.

الف) روابط تنش-کرنش مواد پورو ترمو الاستیسیته بر مبنای ماتریس سفتی بصورت زیر تعریف می‌گردند.

$$\sigma_{rr}=c_{11}\varepsilon_{rr}+c_{12}\varepsilon_{\theta\theta}+c_{13}\varepsilon_{zz}-\gamma p\delta_{rr}-ZT(r,z)$$
$$\sigma_{\theta\theta}=c_{12}\varepsilon_{rr}+c_{22}\varepsilon_{\theta\theta}+c_{23}\varepsilon_{zz}-\gamma p\delta_{\theta\theta}-ZT(r,z)$$
$$\sigma_{zz}=c_{13}\varepsilon_{rr}+c_{23}\varepsilon_{\theta\theta}+c_{33}\varepsilon_{zz}-\gamma p\delta_{zz}-ZT(r,z)$$
$$\sigma_{rz}=2c_{55}\varepsilon_{rz}$$

(85)

ب) روابط تنش-کرنش مواد پیزوالکتریک تحت ترم دما بر مبنای ماتریس سفتی بصورت زیر تعریف می‌گردند.

$$\sigma_{rr} = c_{11}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{31}E_z - ZT(r,z)$$
$$\sigma_{\theta\theta} = c_{12}\varepsilon_{rr} + c_{22}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{23}\varepsilon_{zz} - e_{32}E_z - ZT(r,z)$$
$$\sigma_{zz} = c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{23}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{33}\varepsilon_{zz} - e_{33}E_z - ZT(r,z)$$
$$\sigma_{rz} = 2c_{55}\varepsilon_{rz} - e_{15}E_r$$
$$D_{rr} = 2e_{15}\varepsilon_{rz} + \eta_{11}E_r$$
$$D_{zz} = e_{31}\varepsilon_{rr} + e_{32}\varepsilon_{\theta\theta} + e_{33}\varepsilon_{zz} + \eta_{33}E_z + p_zT(r,z)$$

(86)

بطوریکه صفحه دایروی در امتداد محور طولی (z)، پلاریزه شده است.

ج) روابط تنش-کرنش مواد پورو-پیزو الاستیسیته با ترکیب روابط (85) و (86) بصورت ذیل نوشته می‌شوند، با این تفاوت که مقادیر ضرایب سفتی در معادلات تغییر می‌یابند.

$$\sigma_{rr} = c_{11}^*\, \varepsilon_{rr} + c_{12}^*\, \varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}^*\, \varepsilon_{zz} - e_{31}E_z - ZT(r,z)$$
$$\sigma_{\theta\theta} = c_{12}^*\, \varepsilon_{rr} + c_{22}^*\, \varepsilon_{\theta\theta} + c_{23}^*\, \varepsilon_{zz} - e_{32}E_z - ZT(r,z)$$
$$\sigma_{zz} = c_{13}^*\, \varepsilon_{rr} + c_{23}^*\, \varepsilon_{\theta\theta} + c_{33}^*\, \varepsilon_{zz} - e_{33}E_z - ZT(r,z)$$
$$\sigma_{rz} = 2c_{55}^*\, \varepsilon_{rz} - e_{15}E_r$$
$$D_{rr} = 2e_{15}\varepsilon_{rz} + \eta_{11}E_r$$
$$D_{zz} = e_{31}\varepsilon_{rr} + e_{32}\varepsilon_{\theta\theta} + e_{33}\varepsilon_{zz} + \eta_{33}E_z + P_zT(r,z)$$

(87)

اکنون با در نظر گرفتن روابط اثبات شده و نیز روابط (85)، (86) و (87)، روابط اصلی تنش ها و جابجایی ها را استخراج می نماییم.

۶-۲) تشریح سایر روابط مواد پورو-پیزو ترموالاستیسیته در مختصات استوانه‌ای در حالت تقارن محوری و پایدار

الف) معادلات ناویر (معادلات جابه‌جایی)

برای استخراج معادلات ترمو الاستیسیته با استفاده از مکانیک محیط‌های پیوسته کلاسیک، جسم پورو-پیزوالکتریک باید به اندازه کافی بزرگ در نظر گرفته شود تا فرض پیوستگی صادق باشد. بدین منظور کلیه کمیت‌ها در مقیاس طولی L متوسط‌گیری می‌شوند و فرض می‌گردد که این مقیاس طولی (L)، بزرگتر در مقیاس میکروسکوپیک باشد (حداقل ۱۰۰ برابر).

ب) میدان الکتریکی

با توجه به روابط (74)، روابط میدان الکتریکی در مختصات استوانه ای (r, z) چنین بیان می‌گردد.

$$E_r = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \qquad\qquad E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

(88)

ج) روابط ثابت های سفتی ($C^*{}_{ij}$) بیانگر ثا بت های الاستیک بر مبنای ضریب تابع پتانسیل الکتریکی و میدان الکتریکی، ترم فشار پورو و تاثیر دما، از مقایسه روابط (68)، (85)، (86) و (87) بصورت ذیل نوشته می‌شوند.

$$c_{11} + M\gamma^2 = c_{11}^* \quad , \quad c_{11} = \lambda + 2\mu$$
$$c_{12} + M\gamma^2 = c_{12}^* \quad , \quad c_{12=\lambda}$$
$$c_{13} + M\gamma^2 = c_{13}^* \quad , \quad c_{13} = c_{12} = \lambda$$
$$c_{22} + M\gamma^2 = c_{22}^* \quad , \quad c_{22} = c_{12} = \lambda$$
$$c_{23} + M\gamma^2 = c_{23}^* \quad , \quad c_{23} = c_{12} = \lambda$$
$$c_{33} + M\gamma^2 = c_{33}^* \quad , \quad c_{33} = c_{12} = \lambda$$
$$c_{55} = c_{55}^* \quad , \quad c_{55} = \mu$$

(89)

بنابراین در مجموعه روابط (87) که بعنوان روابط تنش و جابجایی الکتریکی بر حسب کرنش و با تأثیر دما در مختصات استوانه‌ای ( r, z) برای مواد پورو-پیزوالکتریک تعریف شده بودند، ${C^*}_{ij}$ بصورت زیر بیان می شود.

$$ {C^*}_{ij} = C_{ij} + M\gamma^2 \qquad (90) $$

که مقادیر $C_{ij}$ بر مبنای انتخاب ماده مورد نظر، مطابق روابط (89) و M از رابطه (38) بدست می‌آیند.

۲-۷) تعیین پارامترهای ماده

تخلخل پذیری ورق دایروی در امتداد ضخامت آن تغییر می کند، لذا فرض می شود که خواص ماده بجز ضریب پواسون، بصورت توابع نمایی در امتداد ضخامت ورق z در مختصات استوانه ای بشکل ذیل باشند (h ضخامت ورق دایروی است).

$$ K(z) = K_0 e^{m_1\left(\frac{z}{h}\right)} \qquad Z = \overline{Z} e^{m_2\left(\frac{z}{h}\right)} \qquad {C^*}_{ij} = \overline{C^*}_{ij} e^{m_3\left(\frac{z}{h}\right)} $$
$$ e_{ij} = \overline{e}_{ij} e^{m_3\left(\frac{z}{h}\right)} \qquad \eta_{ij} = \overline{\eta}_{ij} e^{m_3\left(\frac{z}{h}\right)} \qquad P_z = \overline{P}_z e^{m_3\left(\frac{z}{h}\right)} $$

(91)

که در روابط (91)، $k_0$ , $\overline{z}$ , $\overline{c^*}_{ij}$ , $\overline{e}_{ij}$ , $\overline{\eta}_{ij}$ , $\overline{P}_z$ ثوابت ماده در z=0 می‌باشند و نمایشگر مقادیر حداقل آنها در موقعیت حداکثر تخلخل است. همچنین برای صفحه دایروی از جنس کریستال متقارن شش وجهی از کلاس 6 mm در حالت تقارن محوری داریم.

$$ e_{31} = e_{32} \qquad (92) $$

حال با دانستن روابط (۱)، (۳)، (87)، (88)، (89)، (91)، (92) و تأثیر آنها در معادلات تعادل تنش ها و جابجایی های الکتریکی (2)، معادلات ناویر در مختصات استوانه ای در حالت تقارن محوری و پایدار بدست می آیند. معادلات ناویر، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی جابجایی ها و کوپل پتانسیل الکتریکی، تحت تاثیر دما می باشند که در تحلیل رفتار پیزوترموالاستیک ورق دایروی در شرایط مساله مورد استفاده قرار می گیرند.

## ۳. نتیجه گیری

مواد پیزوالکتریک متخلخل بدلیل کاربردهای گسترده ای که در مواد با ساختار سبک، عایق های حرارتی و مواد زیستی دارند از اهمیت قابل توجهی برخوردارند. تخلخل پذیری موجود در ساختارهایی مانند سرامیک های متخلخل، بسیاری از خصوصیات ذاتی از قبیل جرم کم، نفوذپذیری بالا، سطح مقطع گسترده، گرمای ویژه کم، ضریب هدایت حرارتی پایین را به آنها می دهد. قبلا ساختارهای پیزوالکتریک متخلخل مبتنی بر سرب، بطور گسترده ای مورد استفاده قرار می گرفتند ولی امروزه بدلیل ملاحظات زیست محیطی، بیشتر از ساختارهای پیزوالکتریک متخلخل بدون سرب برای PZT و سایر مواد سرامیکی پیزوالکتریک بهره گرفته می شود. استفاده روزافزون و گسترده از مواد پیزوالکتریک متخلخل بعنوان مواد هوشمند، ما را بر آن داشت که طی این تحقیق معادلات حاکم بر رفتار پیزوترموالاستیک در حالت پایدار و تقارن محوری یک ورق دایروی از جنس کریستال متقارن شش وجهی از کلاس 6 mm متخلخل اشباع تخلیه نشده پیزوالکتریک را استخراج نماییم. طبیعی است که معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی استخراجی در مختصات استوانه ای این مقاله، قابل بهره برداری در سایر پژوهش های مرتبط آتی خواهد بود.

## مراجع

[1] Jordan, T. L., & Ounaies, Z. (2001). *Piezoelectric ceramics characterization*. INSTITUTE FOR COMPUTER APPLICATIONS IN SCIENCE AND ENGINEERING HAMPTON VA.

[2] Dobrucki, A. B., & Pruchnicki, P. (1997). Theory of piezoelectric axisymmetric bimorph. *Sensors and Actuators A: Physical*, *58*(3), 203-212.

[3] Zimmerman, R. W. (2000). Coupling in poroelasticity and thermoelasticity. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, *37*(1-2), 79-87.

[4] Harrison, J., & Ounaies, Z. (2000). NASA / CR-2001-211422 ICASE Report No. 2001-43 Piezoelectric Polymers.

[5] Buchanan, R. C. (1986). *Ceramic materials for electronics: processing, properties, and applications*. Marcel Dekker Ltd.

[6] Rybjanets, A. N., Razumovskaja, O. N., Reznitchenko, L. A., Komarov, V. D., and Turik, A. V., 2004, “Lead Titanate and Lead Metaniobate Porous Ferroelectric Ceramics,” Integrated Ferroelectrics, 63(1), pp. 197–200.

[7] Mercadelli, E., Sanson, A., & Galassi, C. (2010). *Porous piezoelectric ceramics*. INTECH Open Access Publisher.

[8] Dantsiger, A. J, Razumovskaya, O. N., Reznitchenko, L. A., Sakhnenko, V. P., Klevtsov, A. N., Dudkina, S. I., Shilkina, L., Dergunova, N. N., and Rybyanez, A. N., 2001, “Multicomponent Systems of Ferroelectric Solid Solutions, Physics, Crystallochemistry, Technology, Design Aspects of Piezoelectric Materials,” Rostov State Univ. Press, Rostov Don, V 1-2, 37(11), pp. 1161–1164 (in Russian).

[9] Rybjanets, A. N., Razumovskaja, O. N., Reznitchenko, L. A., Turik, S. A., Alioshin, V. A., and Turik, A. V., 2004, “Porous Piezoceramics Fabrication Methods, Mathematical Models, Experiment,” IZV. Skncvs, Tech. Sci., Special Issue, pp. 82–90.

[10] Ahart, M., Somayazulu, M., Cohen, R. E., Ganesh, P., Dera, P., Mao, H. K. & Wu, Z. (2008). Origin of morphotropic phase boundaries in ferroelectrics. *Nature*, *451*(7178), 545-548.

[11] Monner, H. P. (2005). Smart materials for active noise and vibration reduction. *Novem-Noise and Vibration Emerging Methods, Saint Raphael, France*, 18-21.

[12] Guo, R., Cross, L. E., Park, S. E., Noheda, B., Cox, D. E., & Shirane, G. (2000). Origin of the high piezoelectric response in PbZr 1− x Ti x O 3. *Physical Review Letters*, *84*(23), 5423.

[13] Dunn, M. L., & Taya, M. (1993). Electromechanical properties of porous piezoelectric ceramics. *Journal of the American Ceramic Society*, *76*(7), 1697-1706.

[14] Roncari, E., Galassi, C., Craciun, F., Capiani, C., & Piancastelli, A. (2001). A microstructural study of porous piezoelectric ceramics obtained by different methods. *Journal of the European Ceramic Society*, *21*(3), 409-417.

[15] Fumihiro, A., Tauchert, T. R., & Naotake, N. (1993). Response of a piezothermoelastic plate of crystal class 6mm subject to axisymmetric heating. *International journal of engineering science*, *31*(3), 373-384.

[16] Ashida, F., & Tauchert, T. R. (1998). Transient response of a piezothermoelastic circular disk under axisymmetric heating. *Acta Mechanica*, *128*(1), 1-14.

[17] Zhang, W. X., & Wang, H. (2018). Axisymmetric boundary condition problems for transversely isotropic piezoelectric materials. *Mechanics Research Communications*, *87*, 7-12.

[18] Zhao, X., Li, X. Y., & Li, Y. H. (2018). Axisymmetric analytical solutions for a heterogeneous multi-ferroic circular plate subjected to electric loading. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, *25*(10), 795-804.

[19] Bowen, C. R., Kim, H. A., Weaver, P. M., & Dunn, S. (2014). Piezoelectric and ferroelectric materials and structures for energy harvesting applications. *Energy & Environmental Science*, *7*(1), 25-44.

[20] Roscow, J. I., Taylor, J., & Bowen, C. R. (2016). Manufacture and characterization of porous ferroelectrics for piezoelectric energy harvesting applications. *Ferroelectrics*, *498*(1), 40-46.

[21] Liu, W., Liu, W., Wang, Y., Xue, C., Wang, J., & Yang, J. (2017). Piezoelectric and mechanical properties of CaO reinforced porous PZT ceramics with one-dimensional pore channels. *Ceramics International*, *43*(2), 2063-2068.

[22] Pinheiro, E. D., & Deivarajan, T. (2019). A Concise Review Encircling Lead Free Porous Piezoelectric Ceramics. *Acta Physica Polonica, A.*, *136*(3).

[23] Meshkini, M., Firoozbakhsh, K., Jabbari, M., & SelkGhafari, A. (2018). An analytical investigation of 2D-PPMs hollow infinite cylinder under thermo-electro-mechanical (TEM) loadings. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, *56*(1), 107-122.