

بررسی انتشار ترک در مواد الاستیک خطی با در نظر گرفتن ضریب تصحیح مسیر ترک

مهدي پورمحمود^۱

(تاریخ دریافت: ۱۷/۳/۶ - تاریخ پذیرش: ۱۷/۸/۱۹)

چکیده: مدل کردن انتشار ترک به روش اجزا محدود تحت شرایط مختلف بارگذاری از اهمیت فوق العاده‌ای در مکانیک شکست برخوردار است. در این مقاله با استفاده از علم مکانیک شکست الاستیک خطی فرایند رشد ترک، بر اساس معیار حداکثر تنش اصلی که توسط ضرایب شدت تنش بیان می‌شود، تحلیل می‌شود. همچنین در این مقاله روشی برای تصحیح جهت انتشار ترک در آنالیز اجزا محدود بیان شده تا بتوان در تحلیل‌های مختلف یک مساله با در نظر گرفتن پیشروی‌های متفاوت ترک، در نهایت مسیر ترک واحدی بدست آورد. در هر مرحله از پیشروی ترک جهت تحلیل ناحیه‌ی تنش منفرد نوک ترک از المان‌های خاصی در روش اجزا محدود استفاده می‌شود. نتایج چنین تحلیلی برای چندین مدل با هندسه‌های مختلف آورده شده است.

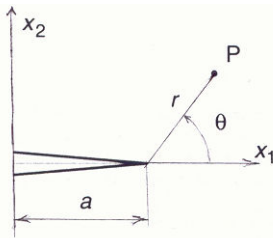
واژه های کلیدی: روش اجزا محدود، معیار رشد ترک، مسیر انتشار ترک

Propagation of Crack in Linear Elastic Materials Considering Crack Path Correction Factor

Mehdi Pourmahmoud

Abstract: Modelling of crack propagation by finite element method under mixed mode conditions is of prime importance in fracture mechanics. This paper describes an application of finite element method to the analysis of mixed mode crack growth in linear elastic fracture mechanics. Crack growth process is simulated by an incremental crack-extension analysis based on the maximum principal stress criterion, which is expressed in terms of the stress intensity factor. In this paper, a procedure to correct the direction of crack propagation in the analysis of finite element is presented to ensure that a unique final crack path is achieved for different analysis of a problem by using different increments of crack. For each increment of crack extension, finite element method is applied to perform a single region stress analysis of the cracked structure. Results of this incremental crack extension analysis are presented for several geometries.

Keywords: Finite Element Method, Crack Propagation Criteria, Crack Propagation Path



شکل ۲. مختصات محلی نوک ترک [۵]

شاو و بار سوم [۲ و ۳] نشان دادند که برای نامعینی تنش در نوک ترک می‌توان از المان‌های ایزوپارامتریک چهار ضلعی هشت گره‌ای که نزدیکترین گره‌ها به نوک ترک از $1/2$ طول ضلع المان به $1/4$ آن و نزدیک به نوک ترک انتقال می‌یابند استفاده کرد. با این عمل نامعینی تنش (کرنش) از مرتبه $1/\sqrt{r}$ در المان ایجاد می‌گردد. باید توجه داشت که این المان فقط در امتداد دو ضلعی که از نوک ترک می‌گذرند این خاصیت نامعینی را ارضا می‌کنند. بار سوم همچنین نشان داد که برای دستیابی به این خاصیت که بتوان در تمام امتدادهایی که از نوک ترک می‌گذرند بتوان نامعینی تنش را مدل کرد کفایت گره‌های یک ضلع المان روی یکدیگر قرار گیرند و یک المان به ظاهر شش گره‌ای تشکیل شود که گره‌های نزدیک به نوک ترک به $1/4$ طول ضلع و نزدیک به نوک ترک منتقل شوند.

بعد از بدست آوردن میدان تنش اطراف نوک ترک محققین به تعیین جهت انتشار ترک پرداختند و سه معیار را پیشنهاد دادند، البته دقت ردیابی وابسته به مقدار افزایش طول ترک در هر مرحله از پیشروی است. با کوچک گرفتن مقدار پیشروی در مدل‌سازی و المان‌بندی مشکل پیش خواهد آمد و با بزرگ گرفتن مقدار پیشروی دقت ردیابی کاهش می‌یابد، در این مقاله با در نظر گرفتن "زاویه تصحیح" از تحلیل‌های مختلف یک مساله با مقدار پیشروی‌های متفاوت می‌توان مسیر ترک واحدی بدست آورد.

اولین معیار تعیین جهت انتشار ترک، معیار مینیمم چگالی انرژی کرنشی است که توسط شی در سال ۱۹۷۴ پیشنهاد شد، طبق این معیار ترک در جهتی که چگالی انرژی کرنشی مینیمم باشد انتشار می‌یابد [۶]. دومین معیار، معیار ماکزیمم نرخ آزادسازی انرژی کرنشی است، طبق این معیار ترک در جهتی که نرخ آزادسازی انرژی کرنشی ماکزیمم است انتشار می‌یابد. برای تعیین نرخ آزادسازی انرژی کرنشی، G ، از روش‌های مختلفی استفاده می‌شود [۶ و ۷]؛ که از جمله آنها می‌توان به انتگرال مستقل از مسیر J توسط رایس در سال ۱۹۶۸، روش گسترش ترک مجازی توسط پارکس در سال ۱۹۷۴، روش انتگرال سطح توسط لورنزی در سال ۱۹۸۵ و همچنین روش $G\theta$ توسط دستایندر در سال ۱۹۸۵ اشاره کرد. سومین معیار، معیار حداکثر تنش اصلی است که توسط اردوگان در سال ۱۹۶۳ برای مواد الاستیک پیشنهاد شده است [۸]. با توجه به اینکه در مقاله از معیار حداکثر تنش اصلی استفاده شده است این معیار به تفصیل شرح داده می‌شود.

۱. مقدمه

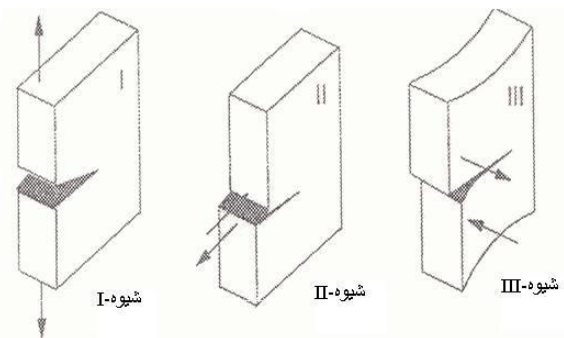
آزمایشات انجام شده توسط گریفیت در سال ۱۹۲۰ میلادی روی الیاف شیشه به این نتیجه‌گیری انجامید که مقاومت واقعی مواد خیلی کمتر از مقاومت نهایی آنها می‌باشد. به منظور توضیح این پدیده بحث "مکانیک شکست" مطرح گردید.

طراحی تحت مکانیک شکست مستلزم شناخت پارامتری به نام "ضریب شدت تنش است که وضعیت کلی تنش را در نوک ترک مشخص می‌کند. در وضعیتی که مقادیر تنش و کرنش در نوک ترک منجر به شکست جسم می‌شود، ضریب شدت تنش به حالت بحرانی می‌رسد. مقدار بحرانی این پارامتر که به عنوان سفتی شکست معروف بوده و یک خاصیت و ثابت ماده است، توسط آزمایش تعیین می‌گردد. این نظریه که کمیتی به نام ضریب شدت تنش را معرفی می‌کند، توسط ایروین در دهه ۱۹۵۰ به دنبال کار مقدماتی گریفیت در دهه ۱۹۲۰ ارائه شده است. در حال حاضر روش‌های زیادی برای بدست آوردن فاکتورهای شدت تنش از طریق اجزا محدود وجود دارد [۱]، از جمله محققینی که در این زمینه فعالیت داشته‌اند می‌توان به تونگ و همکارانش در سال ۱۹۷۳، هنشل و شو [۲] در سال ۱۹۷۵، بارسوم [۳] در سال ۱۹۷۷، استاب و سان در سال ۱۹۸۱ و اگن و شیف در سال ۱۹۸۵ اشاره کرد. تعدادی دیگر از محققین همانند چن در سال ۱۹۸۵ و دنگ در سال ۱۹۹۴ از انتگرال‌های مستقل از مسیر برای تعیین فاکتور شدت تنش استفاده کرده‌اند.

ایروین نشان داد که میدان تنش الاستیک در مجاورت یک ترک را می‌توان با یک سری متوالی بیان کرد [۴]:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{r}} \left\{ K_I f_{ij}^I(\theta) + K_{II} f_{ij}^{II}(\theta) + K_{III} f_{ij}^{III}(\theta) + \dots \text{Higher Order Terms} \right\} \quad (1)$$

که r و θ مؤلفه‌های دستگاه مختصات استوانه‌ای می‌باشند که در محل نوک ترک تعریف می‌شوند. K_I ، K_{II} و K_{III} ، ضرایب شدت تنش مربوط به سه شیوه تغییر مکان سطح ترک مطابق شکل (۱) می‌باشند.



شکل ۱. سه شیوه اعمال بارگذاری بر یک ترک [۵]

با به کار بردن مختصات محلی r و θ در نوک ترک (شکل (۲)) دو مولفه تنش مماسی (σ_θ) و تنش برشی ($\tau_{r\theta}$) به صورت زیر تعریف می‌شوند [۵]:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] \quad (2)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right] \quad (3)$$

ثابت K_{Ic} به چقرمگی شکست مواد معروف است. طبق این معیار زاویه مطابق با مود دوم محض برابر با $70/53 \pm$ است [۱۲].

۳. تصحیح جهت انتشار ترک

همانطور که گفته شد چندین معیار برای تعیین جهت رشد ترک در حالت ترکیبی مودها پیشنهاد شده است. در میان آنها معیار تنش اصلی حداکثر دارای عمومیت بیشتری است. همانطور که گفته شد طبق این معیار رشد ترک در جهت عمود بر تنش اصلی ماکزیم رخ می‌دهد. تنش اصلی ماکزیم به عنوان یک معیار پیوسته می‌تواند مسیر گسترش ترک را به صورت پیوسته مدل کند؛ به عبارت دیگر مسیر گسترش ترک همان مسیر تنش‌های اصلی ماکزیم می‌باشد که با رابطه (۴) بدست می‌آیند.

آنچه گفته شد در حالت حدی که پیشروی طول ترک به صفر میل می‌کند صادق است؛ به عبارت دیگر مسیر گسترش ترک واحدی با پیشروی‌های متفاوت بدست نمی‌آید. بنابراین جهت انتشار ترک باید تصحیح شود تا مسیر واقعی انتشار ترک بدست آید.

علی‌آبادی [۱۰]، یک روش را برای تصحیح زاویه ترک مطرح نمود که از تحلیل‌های متفاوت یک مساله با پیشروی‌های متفاوت ترک، مسیر ترک نهایی واحدی بدست آید. در این روش پیشنهادی برای تعیین جهت پیشروی Γ ترک از یک زاویه تصحیح β ، همانگونه که در شکل (۳) نشان داده شده است، استفاده می‌شود. با استفاده از روابط هندسی، زاویه تصحیح براساس رابطه زیر داده می‌شود [۱۰]:

$$\beta = \theta_{i(n+1)} / 2 \quad (12)$$

که در آن $\theta_{i(n+1)}$ جهت افزایش طول ترک بعدی محاسبه شده با معیار تنش اصلی حداکثر است. این روش تصحیح تا هنگامی که زاویه تصحیحی کوچکتر از زاویه تصحیح قبلی بدست آید اعمال می‌شود. برای تعیین جهت پیشروی Γ ترک، آامین تکرار را می‌توان مانند زیر خلاصه نمود:

- مرحله ۱. فقط برای اولین تکرار، جهت مماس بر مسیر ترک $\theta_{i(n)}$ با استفاده از معیار حداکثر تنش اصلی، رابطه (۴)، محاسبه می‌شود؛
- مرحله ۲. در امتداد جهت محاسبه شده در مرحله قبلی، ترک به اندازه Δa تا p^i گسترش می‌یابد، سپس فاکتورهای شدت تنش جدید محاسبه می‌شود؛
- مرحله ۳. با استفاده از فاکتورهای شدت تنش جدید و معیار تنش اصلی حداکثر، رابطه (۴)، جهت افزایش طول ترک بعدی $\theta_{i(n+1)}$ محاسبه می‌شود؛
- مرحله ۴. تعریف زاویه تصحیح $\beta = \theta_{i(n+1)} / 2$ ، که از افزایش طول ترک در مرحله دوم اندازه‌گیری می‌شود؛
- مرحله ۵. تصحیح جهت گسترش ترک بدست آمده در مرحله دوم با جایگزین کردن زاویه جدید آن که با رابطه $\theta_{i(n+1)} = \theta_{i(n)} + \beta^i$ داده می‌شود [۱۰]، بنابراین حالا نوک ترک در p^{i+1} قرار دارد؛
- مرحله ۶. با تکرار کردن از مرحله دوم، مراحل بالا بترتیب تکرار می‌شوند تا هنگامی که $|\beta^{i+1}| < |\beta^i|$ شود [۱۰].

وقتی که اندازه افزایش طول ترک Δa به صفر میل کند، زاویه $\theta_{i(n+1)}$ و به دنبال آن زاویه تصحیح نیز به صفر میل می‌کند، این بدان

۲. معیار حداکثر تنش اصلی

طبق این معیار انتشار ترک در جهت عمود بر حداکثر تنش اصلی در نوک ترک می‌باشد. با توجه به روابط (۲) و (۳) مربوط به مولفه‌های تنش نوک ترک در مختصات محلی r و θ اگر تنش برشی $(\tau_{r\theta})$ صفر باشد، تنش مماسی (σ_θ) تنش اصلی می‌شود [۶]:

$$K_I \sin \theta_m + K_{II} (3 \cos \theta_m - 1) = 0 \quad (4)$$

که در آن θ_m زاویه تنش اصلی حداکثر و یا زاویه رشد ترک می‌باشد که به شکل زیر بدست می‌آید [۵]:

$$\tan \frac{\theta_m}{2} \Big|_{1,2} = \frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \quad (5)$$

همانطور که مشاهده می‌شود در دو زاویه تنش برشی صفر می‌شود، بنابراین برای بدست آوردن زاویه حداکثر تنش اصلی باید هر دو زاویه بدست آمده را در رابطه مربوط به σ_θ قرار داد و هر کدام از این زوایا که موجب شد زاویه کششی بزرگتری بدست آید همان زاویه رشد ترک خواهد بود. همچنین می‌توان از رابطه زیر بصورت مستقیم زاویه رشد ترک را بدست آورد [۹]:

$$\theta_m = 2 \arctan \left(\frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} - \text{sign}(K_{II}) \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right) \quad (6)$$

بنابراین تنش اصلی به شکل زیر بدست می‌آید [۵]:

$$\sigma_{(\theta=\theta_m)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos^2 \frac{\theta_m}{2} \left(K_I \cos \frac{\theta_m}{2} - 3K_{II} \sin \frac{\theta_m}{2} \right) \quad (7)$$

به خاطر اینکه ترکیبی از مودها حضور دارند ضریب شدت تنش معادل

$$(K_{eq}) \text{ بصورت زیر تعریف می‌شود [۱۰]:}$$

$$K_{eq} = K_I \cos^3 \frac{\theta_m}{2} - 3K_{II} \cos^2 \frac{\theta_m}{2} \sin \frac{\theta_m}{2} \quad (8)$$

شکست زمانی روی می‌دهد که ضریب شدت تنش معادل به مقداری بحرانی نظیر K_{Ic} برسد [۱۱]، یعنی:

$$K_{eq} = K_{Ic} \quad (9)$$

می‌توان با انتخاب یک ورق دارای ترک با ابعاد مشخص و کشیدن آن در دستگاه کشش تا لحظه‌ی شکست، از مقدار بار لازم، تنش گسیختگی یعنی σ_c را محاسبه کرد. بدیهی است که در این صورت ضریب شدت تنش بحرانی از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید [۵]:

$$K_{Ic} = \sigma_c \sqrt{\pi a} \quad (10)$$

باید توجه داشت که کاربرد این رابطه تنها برای ورق‌های نامحدود است. اگر ابعاد محدود باشد، ابتدا با تعیین ضریب شکل $f(a/w)$ و پس از آن با استفاده از رابطه‌ی زیر می‌توان مقدار این خاصیت ماده را تعیین کرده و برای تمام مسایل دیگر از این جنس بکار برد [۲]:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} f \left(\frac{a}{w} \right) \quad (11)$$

مقدار K_{Ic} را زمانی می‌توان بکار برد که تغییر مکان در راستای ضخامت را محدود کرده باشیم یا به عبارت دیگر حالت کرنش صفحه‌ای برقرار باشد. این امر زمانی رخ می‌دهد که ضخامت به اندازه‌ای زیاد باشد که بتوان از کرنش‌های این راستا در برابر دیگر ابعاد صرف نظر کرد

۵. مدل‌های مورد بررسی

۵-۱. بررسی ترک مرکزی مایل

در این بخش ابتدا اولین زاویه رشد ترک بدون تصحیح و با تصحیح در مدل بدست می‌آید و با نتایج تجربی مقایسه می‌شود. سپس انتشار ترک با در نظر گرفتن ضریب تصحیح مسیر انتشار ترک تحت بارگذاری کششی بدست می‌آید.

۵-۱-۱. بررسی اولین زاویه رشد ترک مرکزی مایل تحت

تنش کششی

در این بخش اولین زاویه رشد ترک مدل مذکور بر اثر بارگذاری اعمال شده با استفاده از تئوری تنش اصلی حداکثر مورد تحقیق قرار می‌گیرد. نمونه بررسی شده یک صفحه پلکسی‌گلاس^۱ با ابعاد $225 \times 450 \times 4/7$ mm با ترک مرکزی مایل است که با محور عمودی زاویه α می‌سازد و از دو طرف تحت بارگذاری کششی قرار گرفته است. مشخصات مدل در جدول (۱) لیست شده است.

با توجه به رابطه موجود، حداقل ضخامت لازم برای اینکه شرایط کرنش صفحه‌ای در نوک ترک برقرار باشد، عبارت است از [۱۳]:

$$B > \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_y} \right)^2 \quad (13)$$

که در آن B حداقل ضخامت، K_{Ic} سفتی شکست در حالت کرنش صفحه‌ای و σ_y تنش تسلیم است، و به خاطر اینکه ضخامت مدل کمتر از حداقل ضخامت لازم است مدل را تحت شرایط تنش صفحه‌ای تحلیل می‌کنیم.

جدول ۱. مشخصات مدل تحت کشش

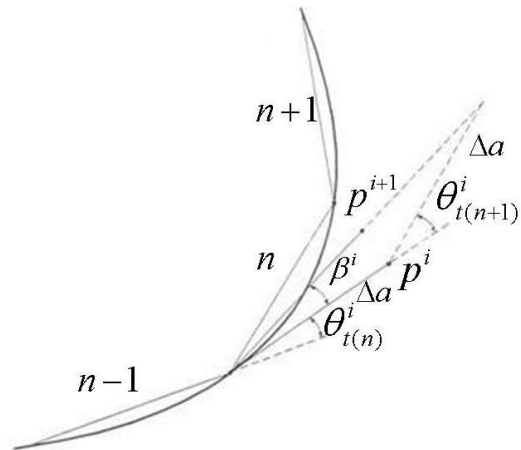
زوایای ترک (α)	۳۰، ۴۰، ۵۰، ۶۰، ۷۰ و ۸۰ درجه
طول ترک	۵۰ mm
تنش تسلیم	۳۶/۵ MPa
شدت تنش بحرانی	۱/۶۴ MPa \sqrt{m}

مساله فوق در زوایای مختلف ترک بدون در نظر گرفتن ضریب تصحیح و با در نظر گرفتن ضریب تصحیح مسیر با دو پیشروی متفاوت $7/5$ mm و 10 mm بدست آورده شد و با نتایج تجربی [۱۴] که متوسط نتایج بر روی ۸ نمونه یکسان است به همراه نتایج حاصل از دو روش تئوری حداکثر تنش اصلی و حداقل چگالی انرژی کرنشی در جدول (۲) آورده شده است.

همانطور که مشاهده می‌شود تطابق خوبی بین نتایج بدست آمده با نتایج تجربی وجود دارد. علت اختلاف بین نتایج با دو پیشروی متفاوت، توجه به شکل (۳)، اینست که بعد از گسترش ترک با دو پیشروی متفاوت به خاطر اینکه ترک روی مسیر خود قرار بگیرد زاویه گسترش ترک باید متفاوت باشد.

با توجه به اینکه در مقاله از تئوری تنش اصلی حداکثر برای تعیین زاویه رشد ترک استفاده شده است، علت اختلاف بین نتایج حاصل از این تئوری و نتایج بدون تصحیح اینست که، در این تئوری و تئوری حداقل

معنی است که در حالت حدی جهت گسترش ترک به سمت جهت مماس بر مسیر پیوسته ترک میل می‌کند.



n - افزایش طول ترک جاری

Δa - اندازه پیشروی ترک

i - تعداد تکرارها

θ_i - جهت گسترش ترک

β - زاویه تصحیح

p - محل قرارگیری نوک ترک

شکل ۳. جهت افزایش طول ترک [۱۰]

۴. روش کار

نحوه‌ی تعیین مسیر انتشار ترک بدین شکل است که در هر مرحله پس از آنالیز ترک موجود و بدست آوردن زاویه انتشار ترک، طول ترک تحت زاویه بدست آمده مقدار مشخصی افزایش داده می‌شود. در نتیجه ترک جدیدی با هندسه و طول متفاوت بدست می‌آید و مراحل به همین صورت برای ردگیری مسیر انتشار ترک ادامه می‌یابد.

در برنامه‌های اجزا محدود نیز به همین روش می‌توان مسیر انتشار ترک را دنبال نمود. برای این منظور، پس از ایجاد هندسه ترک و المان‌بندی و اعمال قیود و بارگذاری‌های لازم، مساله ایجاد شده حل می‌شود و زاویه انتشار ترک با استفاده از یکی از تئوری‌های مربوطه بدست می‌آید تا اینکه مختصات نقطه بعدی تعیین شود. سپس لازم است هندسه ترک قدیمی پاک شده و ترک جدید ایجاد شود و کلیه مراحل بالا از نو تکرار گردد. مراحلی که گفته شد برای حالتی است که مسیر انتشار ترک بدون تصحیح بدست آورده شود، برای اعمال زاویه تصحیح و در نتیجه تصحیح زاویه انتشار ترک باید بعد از تعیین زاویه انتشار ترک در مرحله اول هندسه ترک قدیمی پاک شده و ترک جدید ایجاد می‌شود. سپس مش‌بندی کرده و مسیر انتشار را برای ترک جدید محاسبه می‌کنیم و از این زاویه بدست آمده طبق آنچه گفته شد به تصحیح زاویه انتشار ترک قبلی پرداخته می‌شود.

جدول ۲. نتایج اولین زاویه رشد ترک مرکزی مایل در زوایای مختلف ترک

زاویه ترک (α)		۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰
متوسط نتایج تجربی بر روی ۸ نمونه یکسان		-۶۲/۴	-۵۵/۶	-۵۱/۱	-۴۳/۱	-۳۰/۷	-۱۷/۳
نتایج تئوری تنش اصلی حداکثر		-۶۰/۲	-۵۵/۷	-۵۰/۲	-۴۳/۲	-۳۳/۲	-۱۹/۳
نتایج تئوری حداقل چگالی انرژی کرنشی		-۶۳/۵	-۵۶/۷	-۴۹/۵	-۴۱/۵	-۳۱/۸	-۱۸/۵
نتایج (بدون تصحیح)		-۶۰/۰	-۵۵/۲	-۵۰/۰	-۴۲/۶	-۳۲/۱	-۱۷/۸
نتایج تصحیح شده	با پیشروی ۷/۵ mm	-۶۲/۷	-۵۵/۴	-۵۱/۰	-۴۳/۵	-۳۰/۴	-۱۷/۴
	با پیشروی ۱۰ mm	-۶۳/۰	-۵۵/۸	-۵۱/۵	-۴۳/۴	-۳۱/۱	-۱۷/۰

۲-۵. بررسی انتشار ترک لبه‌ای در صفحه سوراخ‌دار تحت تنش کششی

در این قسمت ترک لبه‌ای در صفحه سوراخ‌دار که توسط رشید [۱۵] و بوچارد [۱۶] نیز تحلیل شده است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. مسیر طی شده ترک در دو حالت که ترک نزدیک به سوراخ و همچنین دور از سوراخ قرار دارد، بدست آمده و مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

جنس نمونه را از فولاد ماریچینگ ۳۰۰ با ابعاد mm ۳۷۵×۲۵۰×۲۵ انتخاب می‌کنیم که دارای یک ترک در لبه سمت چپ به طول mm ۵۰ می‌باشد. همچنین صفحه دارای یک سوراخ دایره‌ای به شعاع mm ۳۵ می‌باشد که مرکز آن در مختصات (mm ۲۸۱, mm ۸۲/۵) صفحه قرار دارد. در حالتی که ترک نزدیک به سوراخ می‌باشد، ترک به فاصله mm ۲۰۷/۵ از پایین صفحه است و در حالتی که دور از سوراخ قرار دارد به فاصله mm ۱۲۵ از پایین صفحه قرار دارد.

با توجه به ضخامت مدل و رابطه حداقل ضخامت لازم برای اینکه شرایط کرنش صفحه‌ای برقرار باشد، مساله را تحت شرایط کرنش صفحه‌ای تحلیل می‌کنیم.

در شکل‌های (۵) و (۶) مسیر انتشار ترک با در نظر گرفتن ضریب تصحیح مسیر ترک و بدون در نظر گرفتن این ضریب به ترتیب برای حالتی که ترک نزدیک به سوراخ و دور از سوراخ قرار دارد با پیشروی mm ۱۲/۵ در ۱۲ مرحله آورده شده است. تاثیر ضریب تصحیح بر مسیر انتشار ترک در مراحل انتهایی پیشرفت بیشتر نمایان شده است. این امر با توجه به شکل (۳) کاملاً قابل توجیه می‌باشد.

همانطور که در شکل (۵) مشاهده می‌شود در حالتی که ترک نزدیک به سوراخ باشد به علت تاثیرپذیری از سوراخ به جای اینکه با مود اول پیشروی کند به سمت سوراخ کشیده می‌شود، ولی بعد از سوراخ به علت اینکه تاثیر سوراخ بر ترک کاسته می‌شود، ترک با مود اول پیشروی می‌کند. این موضوع در شکل (۷) با توجه به میدان تنش اطراف نوک ترک تحلیل می‌شود.

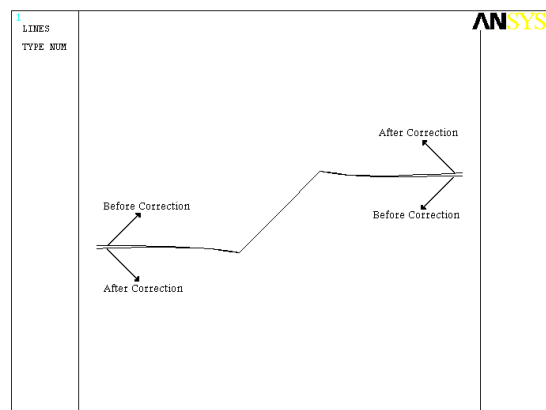
چگالی انرژی کرنشی برای تعیین ضرایب شدت تنش، مساله با فرض بی‌نهایت بودن ابعاد حل می‌شود، ولی در مقاله برای یافتن ضریب شدت تنش به این شکل عمل می‌شود که مساله به منظور یافتن ماتریس تغییرمکان گره‌ای حل می‌گردد. سپس با استفاده از روابط پاریس که تغییرمکان نقاط اطراف ترک را به ضریب شدت تنش مربوط می‌کند مقادیر K_I و K_{II} محاسبه می‌شوند.

۲-۱-۵. بررسی انتشار ترک مرکزی مایل تحت تنش کششی

مدل مورد بررسی یک صفحه مستطیلی به ابعاد mm ۳۵۰×۵۰×۲۵ از جنس فولاد ماریچینگ ۳۰۰ انتخاب می‌شود، که دارای یک ترک مرکزی به طول mm ۵۰ و زاویه ۴۵ درجه می‌باشد. مشخصات مربوط به جنس نمونه همانند مدل قبل می‌باشد و در قسمت‌های بعد نیز از همین مشخصات استفاده می‌شود. با توجه به ضخامت مدل مساله باید تحت شرایط کرنش صفحه‌ای تحلیل شود.

در شکل (۴) مسیر انتشار ترک را با در نظر گرفتن ضریب تصحیح و بدون در نظر گرفتن ضریب تصحیح مسیر انتشار ترک با پیشروی mm ۱۲/۵ در ۱۰ مرحله نشان داده شده است.

در شکل (۴) می‌توان تاثیر ضریب تصحیح را بر مسیر انتشار ترک با پیشروی mm ۱۲/۵ در ۱۰ مرحله مشاهده کرد. با توجه به آنچه در بخش قبلی گفته شد، تاثیر ضریب تصحیح بر مسیر انتشار ترک در پیشروی‌های انتهایی کاملاً نمایان شده و از مسیر ترک بدون در نظر گرفتن ضریب تصحیح جدا شده است. در بارگذاری‌های کششی همیشه ترک در جهت غالب شدن مود اول انتشار می‌یابد. به عبارت دیگر ترک در جهتی انتشار می‌یابد که بارگذاری بر وجوه آن عمود باشد.



شکل ۴. انتشار ترک مرکزی مایل تحت تنش کششی با پیشروی mm ۱۲/۵ در ۱۰ مرحله

۳-۵. بررسی انتشار ترک در مدل صلیبی شکل تحت تنش کششی

مدل مورد بررسی یک صفحه صلیبی شکل با بازوهای مربعی به طول ۲۰۰ mm می باشد که دارای یک ترک به طول ۵۰ mm در گوشه داخلی با زاویه ۴۵ درجه طبق شکل (۱۰) می باشد. مدل تحت چهار نوع بارگذاری متفاوت قرار می گیرد. این بارگذاری ها در جدول (۳) آورده شده اند. مدل مورد بررسی از جنس فولاد ماریچینگ ۳۰۰ انتخاب شده است که دارای ضخامت ۲۵ mm می باشد. دیگر ابعاد این مدل در شکل (۱۰) آورده شده است. با توجه به ضخامت و جنس مدل مساله باید تحت شرایط کرنش صفحه ای تحلیل شود.

جدول ۳. بارگذاری اعمال شده بر مدل صلیبی شکل

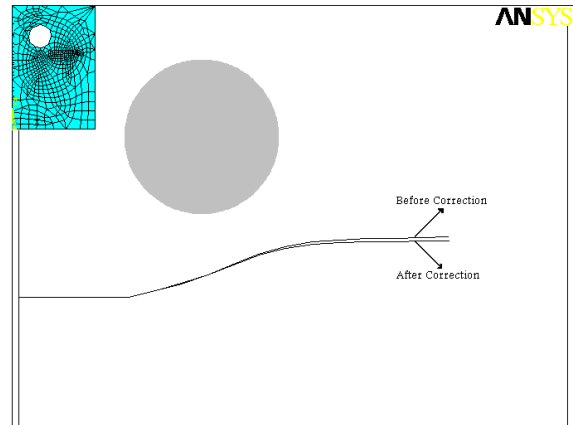
$\sigma_2 = 0$	مرحله اول بار گذاری
$\sigma_1 = 0$	مرحله دوم بارگذاری
$\sigma_1 = 2\sigma_2$	مرحله سوم بارگذاری
$\sigma_1 = \sigma_2$	مرحله چهارم بارگذاری

در اینجا مسیر انتشار ترک با پیشروی ۱۰ mm در ۱۰ مرحله تحت بارگذاری های جدول (۳) بررسی می شود. این مسیرها را می توان در شکل (۱۲) مشاهده کرد.

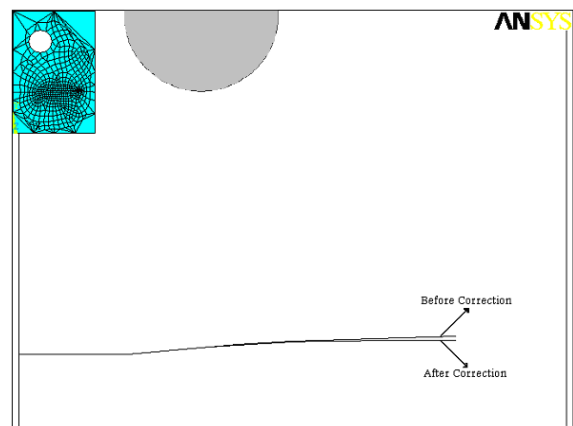
با توجه به شکل (۱۱) در مرحله اول بارگذاری ترک در جهت مود اول انتشار یافته است. به عبارت دیگر ترک در جهتی انتشار یافته که بارگذاری بر وجوه آن عمود باشد.

در مرحله دوم بارگذاری نیز همانند مرحله قبلی، ترک در جهتی پیشروی کرده است که بارگذاری بر وجوه آن عمود باشد. در مرحله سوم بارگذاری ترک در جهتی بین دو حالت قبلی انتشار می یابد و به علت اینکه σ_1 بزرگتر از σ_2 است، مسیر انتشار به مسیر مرحله اول بارگذاری نزدیک تر است.

در مرحله چهارم بارگذاری به علت متقارن بودن بارگذاری و شکل مدل از شرایط تقارن استفاده شده نیمه از مدل تحلیل می شود (شکل ۱۲). همانطور که در شکل مشخص است برآیند دو بارگذاری بر سطح ترک عمود بوده و فقط مود I بارگذاری وجود دارد و مقدار K_{II} صفر خواهد شد. بنابراین ترک در همان جهت اولیه یعنی با زاویه ۴۵ درجه انتشار می یابد.



شکل ۵. انتشار ترک در صفحه سوراخ دار تحت تنش کششی با پیشروی ۱۲/۵ mm در ۱۲ مرحله در حالی که ترک نزدیک به سوراخ قرار دارد



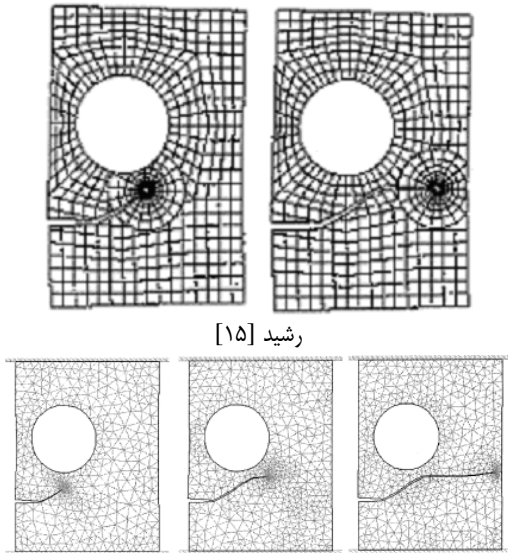
شکل ۶. انتشار ترک در صفحه سوراخ دار تحت تنش کششی با پیشروی ۱۲/۵ mm در ۱۲ مرحله در حالی که ترک دور از سوراخ قرار دارد

در شکل (۶) ترک به علت دور بودن از سوراخ و در نتیجه تاثیرپذیری کمتر ترک از سوراخ خیلی کمتر از حالت اول به سمت سوراخ متمایل می شود و تقریباً با مود اول حرکت می کند. میدان تنش در این حالت نیز در شکل (۸) آورده شده است.

در شکل (۷-الف) می توان تاثیر سوراخ را بر میدان تنش اطراف نوک ترک مشاهده کرد که در نهایت موجب می شود میدان تنش اطراف نوک ترک نامتقارن شده و ترک به سمت بالا که دارای مقدار تنش بیشتری است، متمایل شود. بعد از ۷ مرحله پیشروی و دور شدن نوک ترک از سوراخ تاثیرپذیری آن از سوراخ کمتر شده و همانگونه که در شکل (۷-ب) ملاحظه می شود، میدان تنش در این حالت تقریباً متقارن می شود و ترک با مود اول انتشار می یابد (شکل ۵).

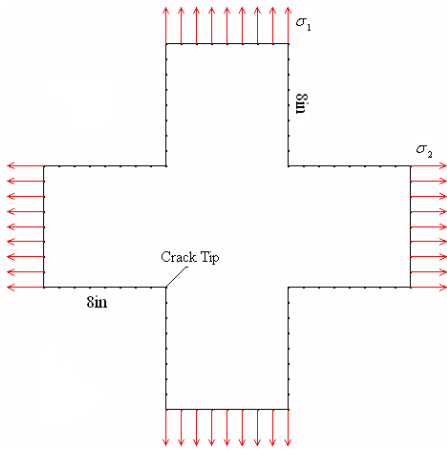
همانطور که در شکل (۸) مشاهده می شود، میدان تنش اطراف نوک ترک به علت دور بودن از سوراخ تاثیرپذیری نداشته و ترک تقریباً با مود اول انتشار می یابد (شکل ۶).

تحلیل های رشید [۱۵] و بوچارد [۱۶]، برای بدست آوردن مسیر انتشار ترک در حالی که ترک نزدیک به سوراخ قرار دارد، را می توان در شکل (۹) مشاهده کرد.

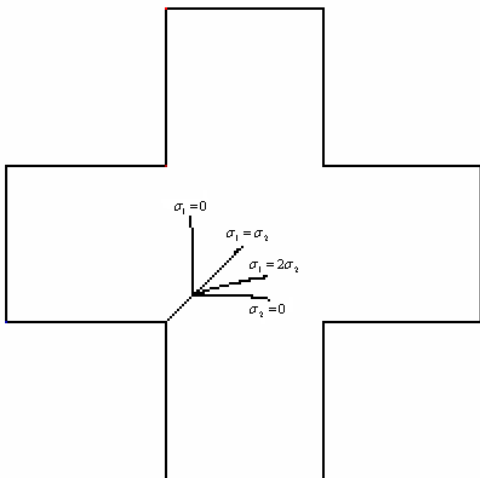


رشد [۱۵]

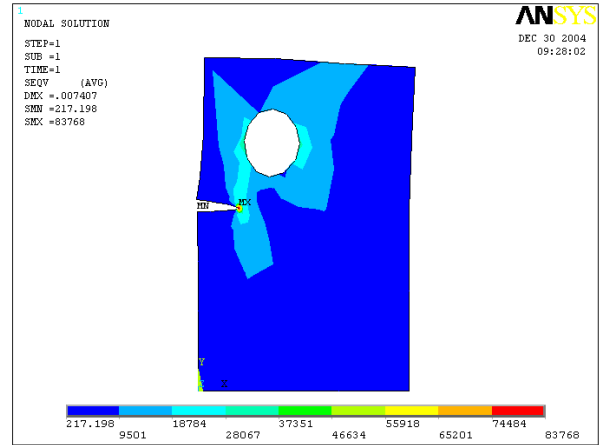
بوچارد و همکارانش [۱۶]
شکل ۹. انتشار ترک در صفحه سوراخ‌دار



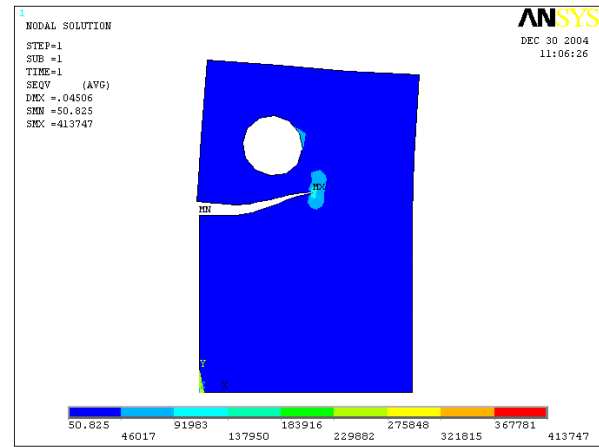
شکل ۱۰. صفحه صلیبی ترک‌دار



شکل ۱۱. انتشار ترک در مدل صلیبی شکل تحت بارگذاری‌های مختلف با پیشروی ۱۰ mm در ۱۰ مرحله

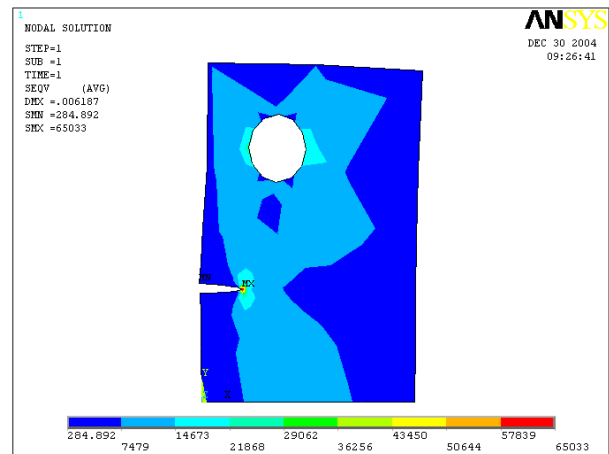


(الف)



(ب)

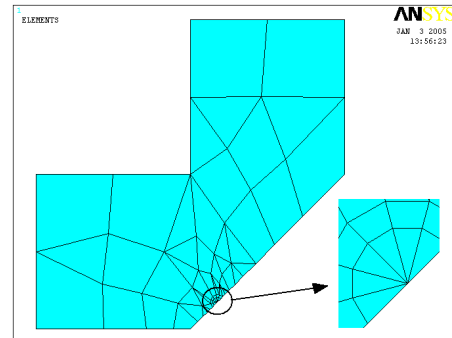
شکل ۷. میدان تنش فون میزز اطراف نوک ترک به طول ۵۰ mm با مقدار کشش ۳۸ MPa در حالتی که ترک نزدیک به سوراخ قرار دارد (الف) قبل از پیشروی، (ب) در مرحله ششم از پیشروی به اندازه ۱۲/۵ mm



شکل ۸. میدان تنش فون میزز اطراف نوک ترک به طول ۵۰ mm با مقدار کشش ۳۸ MPa

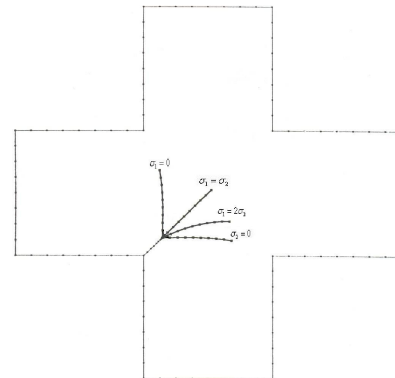
مراجع

- [1] Kpegba, K. W., Ottavy, N. and Souchet, R., "The dependence between countour choice and numerical values of stress intensity factors computed from path independent integrals", *Eur. J. Mech. A/Solids*, Vol. 18, PP. 115-133, 1999.
- [2] Fehll, B. D. and Truman, K. Z., "An evaluation of fracture mechanics qqrter – point displacement techniques used for computing stress intensity factors", *Engineering Structures*, Vol. 21, PP. 406-415, 1999.
- [3] Tracy, D. M., "Finite elements for determination of crack tip elastic stress intensity factors", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 3, PP. 255-265, 1971.
- [4] Aliabadi, M. H., "Boundary element method, Queen mary", UK, 2002.
- [۵] عباسی، ع، "تحلیل مسائل ترک در محدوده الاستیک خطی به روش اجزا محدود با کمک نرم‌افزار ANSYS"، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، ۱۳۸۰.
- [6] Bouchard, P.O. and Chastel, Y., "Numerical modeling of crack propagation: automatic remeshing and comparison of different criteria", *Comput. Mhethods Appl. Mech. Engrg*, Vol. 192, PP. 3887-3908, 2003.
- [7] Yang, Z. J., Chen, J.F. and holt, G. D., "Effective evaluation of stress intensity factors using virtual crack extention technique", *Computer and Structures*, Vol. 79, PP. 2705-2715, 2001.
- [8] Mahajan, R. V. and Ravi – Chandar, K. "An experimental investigation of mixed – mode fracture", *International Journal of fracture*, Vol. 41, PP.235-252, 1989.
- [9] Rethore, J., Gravouuil, A. and Combescure, A., "Astable numerical scheme for the finite element simulation of dynamic crack propagation with remeshing", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 193, PP. 4493-4510, 2004.
- [10] Aliabadi, M. H., Young, A. and Wen, P.H., "Crack growth analysis for multi – layerd airframe stractures by boundary element method", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 71, PP. 619-631, 2004.
- [11] Kaufman, J. G., Moore, R. L. and Schilling, P. E., "Fracture toughness of structural aluminum alloys", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 2, PP. 197-210, 1970.
- [12] Grigoriu, M., Saif, M. T. A., Borgi, S. and Ingraffea, A. R., "mixed mode fracture initiation and trajectory prediction under random stresses", *International Journal of fracture*, Vol.45, PP. 19-34, 1990.
- [13] Reddy, J. N. "An introuduction to the finite element method", Second Edition, Mcgraw–Hill, Inc., New York, 1993.
- [14] Gdoutos, E. E., "problems of mixed mode crack propagation", Martinus Nijhoff, Netherlands, 1984.
- [15] Rashid, M. M., "The arbitrary local mesh replacement method: An alternative to remeshing for crack propagation analysis", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.154, PP.133-150, 1998.
- [16] Bouchard, P. O., Bay, F., Chastel, Y. and Toven, I., "Crack propagation modeling using an advanced remeshing technique", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. Vol. 189, PP.732-742, 2000.
- [17] Portela, A., Aliabadi, M. H. and Rooke, D. P., "Dual boundary element incremental analysis of crack propagation", *Computers and structures*, Vol. 46. No. 2, PP.237-247, 1993.



شکل ۱۲. استفاده از تقارن در مدل صلیبی شکل

مسیرهایی که در این مساله برای انتشار ترک بدست آمد با نتایج علی‌آبادی که مساله را با روش المان مرزی مورد تحلیل قرار داده است، کاملاً مطابق می‌باشد. در شکل (۱۳) می‌توان مسیره‌های انتشار ترک در مدل صلیبی شکل تحت بارگذاری‌های متفاوت را که توسط علی‌آبادی و همکارانش [۱۷] با روش المان مرزی بدست آمده است، مشاهده کرد.



شکل ۱۳. بررسی مسیر انتشار ترک در مدل صلیبی شکل تحت بارگذاری‌های متفاوت با روش المان مرزی توسط علی‌آبادی و همکارانش

۶. نتیجه‌گیری

نتیجه‌ای که از انتشار ترک در همه مدل‌های مورد بررسی بدست می‌آید اینست که همیشه ترک در جهت عمود بر حداکثر تنش اصلی و یا همان غالب شدن مود اول می‌باشد.

در صفحه با ترک مرکزی مایل و مدل صلیبی شکل این امر به روشنی مشاهده می‌شود که ترک در جهتی تمایل به انتشار دارد که بارگذاری بر وجوه آن عمود باشد که تأییدی بر معیار حداکثر تنش اصلی می‌باشد. ولی در حالت ترک لبه‌ای در صفحه سوراخ‌دار به علت وجود سوراخ که باعث افزایش تنش در حوالی خود می‌شود ترک نیز که در جهت عمود بر حداکثر تنش اصلی گسترش می‌یابد، ابتدا به سمت سوراخ که دارای تنش بیشتری است متمایل می‌شود ولی بعد از گذشتن از سوراخ و کاهش اثر آن ترک با مود اول پیشروی می‌کند. هنگامی که ترک دور از سوراخ قرار دارد به علت تأثیرپذیری کمتر از میدان تنش اطراف سوراخ، به میزان کمتر از حالتی که ترک نزدیک به سوراخ قرار دارد، به سمت سوراخ متمایل می‌شود (شکل‌های ۷ و ۸).

به عنوان نتیجه دیگر اینکه با بکار بردن ضریب تصحیح مسیر انتشار ترک، هرچه پیشروی‌ها افزایش یابد اثر این ضریب بر مسیر بیشتر نمایان می‌شود و مسیر آن از مسیر انتشار ترک بدون در نظر گرفتن ضریب تصحیح جدا می‌شود.

