به‌هنگام‌سازی مدل اجزا محدود قاب با استفاده از روش مستقیم و پایه حساسیت

مهدی تاجداری[۱]، کاوه عباسی[۲]

(تاریخ دریافت: ۸۷/۳/۷- تاریخ پذیرش: ۸۷/۱۰/۲۲)

چکیده: در این مقاله مروری بر ملزومات اولیه به‌هنگام‌سازی مدل اجزا محدود و کاربرد دو روش عمومی به‌هنگام‌سازی مستقیم و پایه حساسیت، به طور خاص برای یک قاب، ارائه می‌گردد. ابتدا یک مدل ریاضی قاب با استفاده از اجزا محدود فراهم شده و قاب تحت تست مودال چکش قرار می‌گیرد. سپس نتایج تست مودال با آنهائی که توسط مدل پیش‌بینی شده، مقایسه می‌گردد. این مقایسه تفاوتهایی بین این دو دسته از اطلاعات را آشکار می‌کند. اغلب اینگونه فرض می‌شود که بخش اعظم این تفاوتها، به نسبت دیگر منابع خطا، ناشی از مقادیر نادرست پارامترها در مدل است. بنابراین برای افزایش همبستگی بین نتایج پیش‌بینی شده و اندازه‌گیری شده و در نتیجه افزایش اعتبار مدل اجزا محدود مدل تحت به‌هنگام‌سازی مدل اجزا محدود قرار می‌گیرد. در این فرآیند به‌هنگام‌سازی، مقادیر نادرست پارامترها در مدل تنظیم می‌گردند. همچنین در به‌هنگام‌سازی مهم است که مدل اجزا محدود در عین سادگی بتواند نتایج درست را پیش‌بینی کند. در این مقاله، هدف، استفاده از روشهای به‌هنگام‌سازی مستقیم و پایه حساسیت برای مدل قاب است. همچنین این دو دسته از روشهای به‌هنگام‌سازی مقایسه می‌گردند.

واژه‌های کلیدی: به‌هنگام‌سازی، مدل اجزا محدود، روش مستقیم، روش پایه حساسیت، دینامیک سازه

Finite Element Model Updating of a Frame with Direct and Sensitivity-Base Methods

Mehdi Tajdari, Kaveh Abbasi

Abstract: This paper presents an overview of model updating and particularly its application for updating of frame model. In this article a mathematical model of the frame was produced with finite element method. The frame was subjected to hammer modal testing. Then the results of the modal testing were compared with those predicted with the model. This comparison revealed discrepancies between these two sets of results. It is a commonly known fact that incorrect values of parameters in a model, among other things, do cause these discrepancies. In order to improve the correlation between the measured and the predicted results and hence improve the reliability of the model, the model was subjected to finite element model updating. In this updating process, incorrect values of parameters in a model are adjusted. Also it is important in updating that the FE model be simple and in the same time can give good results.The objective of this article is to use direct and sensitivity-base methods for frame and also compare these methods.

Keywords: Model Updating, Finite Element Model, Direct Method, Sensitivity-Base Method, Structural Dynamics

۱. دانشیار، مرکز مکانیک و فناوریهای ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر (tajdari@yahoo.com)
۲. دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده انرژی، دانشگاه صنعت آب و برق شهید عباسپور (kavehabasi@yahoo.com)

۱. مقدمه

باروک[1] [۴-۱] و برمن[2] [۷-۵] در اواخر دهه ۱۹۷۰ و اوائل دهه۱۹۸۰ یک دسته از روشهای به‌هنگام‌سازی ذیل عنوان روشهای مستقیم مطرح نمودند که می‌توان گفت اولین دسته روشهای به‌هنگام‌سازی بودند. در این روشها از یک تابع هزینه[3] استفاده می‌شود که تغییرات را در ماتریس سختی و/یا جرم به نحوی بهینه ایجاد می‌نماید که این ماتریس‌ها نتایج تجربی را بازسازی کنند؛ در کنار این تابع تعدادی قید ماتریسی همچون تقارن ماتریس سختی نیز قرار می‌گیرد. در نهایت این تابع مقید با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ بهینه می‌گردد.

مزیت اصلی این روش عدم احتیاج آن به تکرار است و در نتیجه مشکلات واگرائی و مشکلات محاسباتی حذف می‌گردد. مشخصه مهم این روشها سعی بر بازسازی اطلاعات اندازه‌گیری شده است. مدلهایی که از جور کردن اطلاعات اندازه‌گیری شده حاصل می‌گردند اصطلاحاً مدلهای ارائه‌ای[4] نامیده می‌شوند. توانایی بازسازی اطلاعات اندازه‌گیری شده در مدل بهنگام یک مزیت است. از طرف دیگر غیرمحتمل است که اطلاعات اندازه‌گیری یا تحلیلی با وجود نویز و اغتشاشات در اندازه‌گیری و نقص و نارسائی مدل به واقع برابر باشند. اگر مدل بهنگام دقیقاً اندازه‌گیریهای بی‌دقت را بازسازی کند هر تحلیل متعاقب نیز ممکن است معیوب گردد. بنابراین در مدلهای ارائه‌ای نیاز به مدلسازی دقیق و اندازه‌گیری با دقت بسیار بالا با حذف نتایج حاصل از سنسورهای معیوب وجود دارد. فرکانس طبیعی‌های سیستم را می‌توان به نسبت با دقت اندازه‌گیری کرد، اما کیفیت شکل مودهای اندازه‌گیری شده با استفاده از فناوری روز کم است و نمی‌توان گفت که نتایج دقیقی حاصل می‌گردد.

اشکال بزرگ مدلهای ارائه‌ای اینست که ماتریسهای جرم و سختی بهنگام شده تعبیر و معنای فیزیکی ضعیفی دارند و نمی‌توان این تغییرات را به تغییرات فیزیکی مدل اجزا محدود اصلی مرتبط کرد. ممکن است پیوستگی گرهی حفظ نگردد و عموماً ماتریسهای بهنگام شده کاملاً پرعضو[5] هستند، اگر چه ماتریسهای اولیه پراکنده[6] باشند و تنها دارای اعضای غیرصفر در محدوده قطر اصلی باشند.

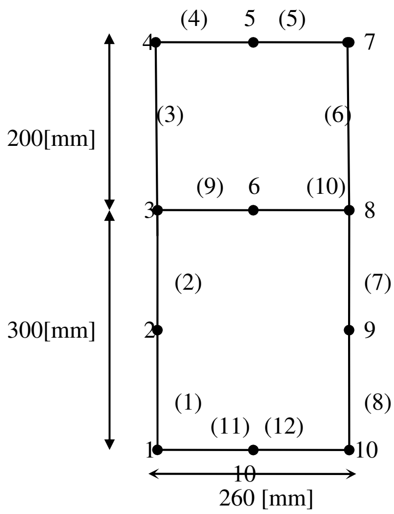
روشهای مستقیم یک دسته از اطلاعات اندازه‌گیری را مجدداً بازسازی می‌کنند اما تضمینی نسبت به اینکه مودهای جعلی در محدوده فرکانسی مورد علاقه ما داخل نگردند نمی‌دهند. در عمل این نشان دهنده هیچ مشکلی نیست اگر چه مدل بهنگام شده اجزا محدود همواره باید چک شود که همه مودهای اندازه‌گیری شده را بازسازی نماید و هیچ مود جعلی را در خود داخل نکرده باشد. به علاوه تضمینی برای معین مثبت[7] بودن ماتریس جرم و سختی بهنگام شده وجود ندارد.

در ادامه ابتدا مروری بر آنالیز مودال سنتی صورت گرفته بر روی قاب ارائه می‌گردد. برای کسب اطلاعات بیشتر درباره آنالیز مودال خواننده به مرجع [۸] ارجاع داده می‌شود.

1. Brauch
2. Berman
3. Cost Function
4. Representational
5. Fully populated
6. sparse
7. Positive definite

۲. ارائه نتایج آزمایشگاهی و مطالعه موردی نتایج آزمایشگاهی

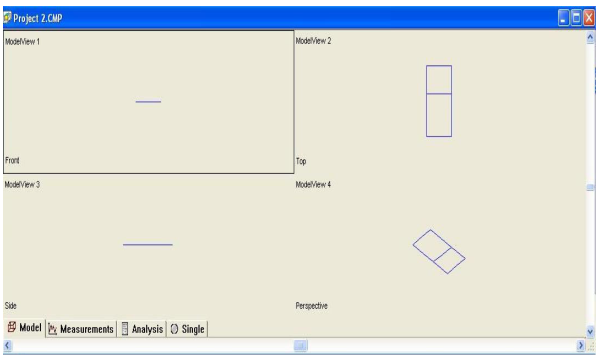
بر روی یک قاب نامتقارن دو بعدی با اتصال آزاد آزمایش مودال انجام شد. در اینجا به دلیل محدودیتهای موجود، فقط در جهت عمود بر قاب عمل تحریک و خواندن اطلاعات انجام می‌شود. نامتقارن بودن قاب کمک می‌کند تا شکل مودها به طور مشخص‌تری خود را نشان بدهند. با توجه به شکل (۱) در این آزمایش شتاب‌سنج پیزو را در نقطه ۱ ثابت نموده و تحریک با چکش به دیگر نقاط اعمال می‌گردد. به علت این که ممکن است گره ۱ برای بعضی از شکل مودها گره باشد، در اینجا علاوه بر این گره، نتایج حاصل از قرار داشتن شتاب‌سنج روی گره ۳ نیز بررسی می‌گردند. در ادامه دیده می‌شود که سیگنال‌های خوانده شده از این گره دارای کیفیت بسیار بهتر، پیک‌های مشخص‌تر است و تا حدودی عاری از پیک‌های عددی می‌باشد که کار قضاوت درباره مکان فرکانس‌های طبیعی را ساده‌تر می‌نماید. دیده شد که داده‌هایی که از گره ۱ حاصل می‌شوند بعضاً دارای تعداد قابل توجهی پیک جعلی هستند.



شکل ۱. مدل قاب و شمارهٔ نودهای منتخب برای آنالیز مودال

۳. مدلسازی در نرم افزار STAR

برای انجام آنالیز مودال توسط نرم‌افزار، در ابتدا داده‌های حاصل از آزمایش باید در فرمت داده‌های قابل قبول برای نرم افزار STAR ذخیره گردند. سپس شکل قاب در نرم افزار مدل می‌گردد (شکل ۲).



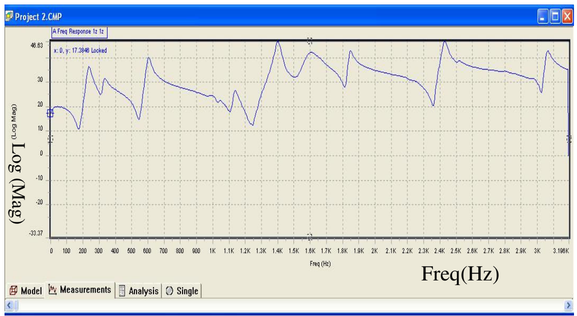
شکل۲ . نماهای مختلف مدل ایجاد شده قاب در نرم‌افزار Star

ابتدا نتایج حاصل از سنسور در نقطه ۱ بررسی می‌گردد. داده‌های این دسته، با وجود دارا بودن پیک‌های عددی متفاوت در برخی توابع پاسخ فرکانسی، به طور کلی ۹ یا ۱۰ پیک مشخص را در محدوده فرکانسی ۰-۳/۲ کیلوهرتز نشان می‌دهند. نتایجی که از تحلیل برداشت قله[1] H11 و H18 حاصل شده‌اند، به ترتیب در جداول (۱) و (۲) ارائه گردیده‌اند. همچنین توابع پاسخ فرکانسی متناظر نیز به ترتیب در شکل‌های (۳) و (۴) دیده می‌شوند.

بنابراین یک شکل مود در H11 (و تعداد دیگری از توابع پاسخ فرکانسی) دیده نمی‌شود. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، خصوصاً در H18 ، تعداد پیک‌های جعلی و نامشخص قابل توجه است.

جدول ۱. نتایج حاصل از تحلیل H11

Mode	Frequency (Hz)	Damping (Hz)	Damping (%)
1	234.6382	12.795	5.445
2	328.6249	13.3986	4.0738
3	601.2795	13.0551	2.1707
4	1133.1858	14.755	1.302
5	1401.3563	15.9067	1.135
6	1595.2961	49.6049	3.1079
7	1843.7385	13.7363	0.745
8	2426.4397	16.4306	0.6771
9	3058.8506	15.311	0.5005

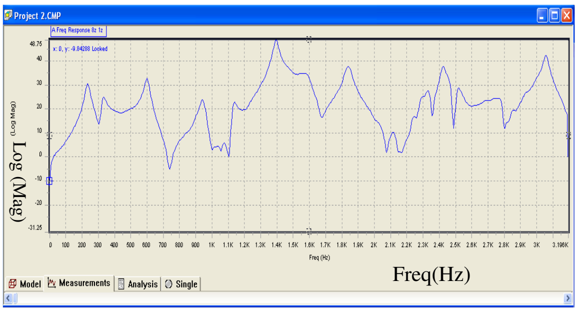


شکل ۳. نمودار دامنه فاز تابع پاسخ فرکانسی H11 (تحریک در نقطه ۱ و اندازه‌گیری در نقطه ۱)

جدول ۲. نتایج حاصل از تحلیل H18

Mode	Frequency (Hz)	Damping (Hz)	Damping (%)
1	234.6651	12.8498	5.4676
2	329.2936	13.1277	3.9835
3	601.2626	13.0542	2.1706
4	951.4023	15.7874	1.6592
5	1133.5371	14.2642	1.2583
6	1401.2797	15.8028	1.1277
7	1600.4286	46.4803	2.903
8	1843.9956	13.6026	0.7376
9	2426.3806	16.7961	0.6922
10	3058.9277	15.2474	0.4984

1. Peak piking

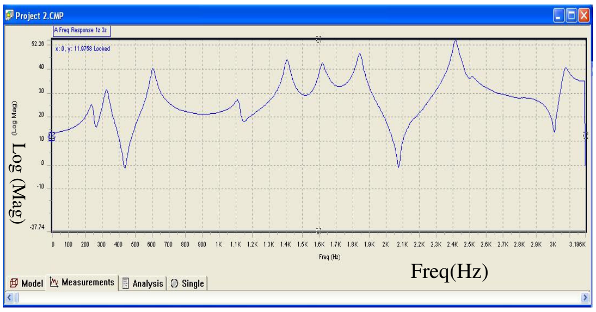


شکل ٤. نمودار دامنه فاز تابع پاسخ فرکانسی H18 (تحریک در نقطه ۸ و اندازه‌گیری در ۱)

در ادامه داده‌های حاصل از حضور شتاب‌سنج در نقطه ۳ بررسی می‌شود.

جدول ۳. نتایج حاصل از تحلیل H31

Mode	Frequency (Hz)	Damping (Hz)	Damping (%)
1	240.5322	12.844	5.3322
2	326.9	12.9739	3.9656
3	603.8824	12.9139	2.138
4	1118.1115	15.628	1.3976
5	1407.4784	13.5937	0.9658
6	1617.0181	15.9005	0.9833
7	1843.126	14.0662	0.7631
8	2415.4512	13.7964	0.5712
9	3070.7717	18.1201	0.5901



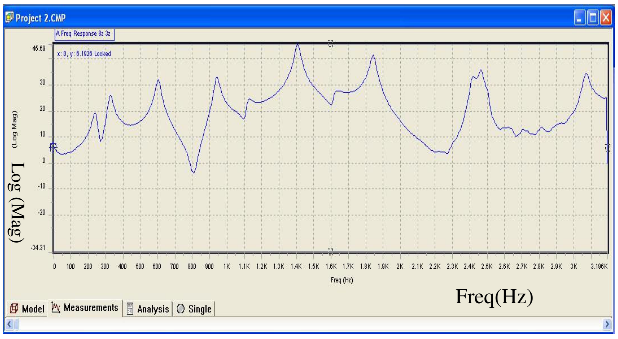
شکل ۵. نمودار دامنه فاز تابع پاسخ فرکانسی H31 (تحریک در نقطه ۳ و اندازه‌گیری در نقطه ۱)

جدول ٤. نتایج حاصل از تحلیل H38

Mode	Frequency (Hz)	Damping (Hz)	Damping (%)
1	240.5348	12.9922	5.3935
2	326.875	12.9776	3.9671
3	603.8698	12.9085	2.1371
4	933.8371	6.7216	0.7198
5	1117.6111	15.7082	1.4054
6	1407.4639	13.5575	0.9632
7	1617.3832	17.6586	1.0917
8	1843.1549	14.0474	0.7621
9	2415.5942	13.9225	0.5763
10	3070.6887	18.0908	0.5891

این اطلاعات تنها به عنوان نمونه در اینجا ارائه گردیده‌اند. با توجه به یکنواختی و هموار‌ی بیشتر نمودارهای توابع پاسخ فرکانسی حاصل از وجود سنسور در نقطه ۳، می‌توان این گونه برداشت کرد که این اطلاعات بیشتر قابل اعتماد بوده و در واقع نسبت سیگنال به نویز مناسبتری ارائه می‌نمایند در نتیجه برای به‌هنگام‌سازی پایه حساسیت از اطلاعات حاصل از سنسور موجود در نقطه ۳ استفاده گردیده است؛ زیرا در این روش اطمینان و صحت اطلاعات مورد استفاده اهمیت می‌یابد و حجم اطلاعات در درجه دوم اهمیت است.

در ضمیمه ۱ شکل مودهای حاصل از تحلیل اطلاعات آزمایشگاهی با استفاده از نرم‌افزار STAR ارائه گردیده است. همانطور که در ادامه ملاحظه خواهد شد از این اطلاعات، تنها شکل مودهای تجربی متناظر با مودهای تحلیلی برای به‌هنگام‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرند.



شکل ٦. نمودار دامنه فاز تابع پاسخ فرکانسی H38 (تحریک در نقطه ۳ و اندازه‌گیری در نقطه ۱)

جدول ۵. میانگین نتایج

Mode	Frequency (Hz)	Damping (Hz)	Damping (%)
1	237.59995	12.921	5.43055
2	328.0843	13.05265	3.9753
3	602.5662	12.98135	2.15385
4	942.6197	11.2545	1.1895
5	1125.5741	14.9862	1.33185
6	1404.3718	14.68015	1.04545
7	1608.9059	32.06945	1.99735
8	1843.57525	13.825	0.74985
9	2420.9874	15.3593	0.63425
10	3064.8082	16.6691	0.54375

٤. مدلسازی اجزا محدود

در ادامه سیستم مورد آزمایش را در محیط نرم‌افزار ANSYS مدلسازی گردیده و تحلیل می‌شود. در ابتدای کار لازم به ذکر است که مدلهای اجزا محدود به دلیل محدود کردن تعدادی از درجات آزادی یک سیستم با درجات آزادی نامحدود، سختی هر سیستم را بیش- تخمین[1] می‌کنند، در نتیجه می‌توان گفت که همواره فرکانس طبیعی‌های تخمینی توسط مدلهای اجزا محدود بیش- تخمین خواهند بود؛ این مطلب در دینامیک سازه برخلاف مسائل تنشی همواره مطلوب نیست. از طرف دیگر وارد کردن میرایی به مدل‌های اجزا محدود همواره با مشکل روبروست و اگر هم میرایی تجربی به صورت مودال در مدل وارد شود، مشکل عدم همخوانی درجات آزادی مدل آزمایشگاهی و مدل اجزا محدود مانع خواهد بود. البته در اینجا توجه به این نکته الزامی است که آنالیز مودال مورد توجه در مدل‌های اجزا محدود با حل مسأله مقدار ویژه حاصل از ماتریسهای فضایی، مودهای طبیعی سیستم را مشخص می‌کند؛ ولی در مطالعه آزمایشگاهی با اعمال تحریک و تحلیل توابع پاسخ فرکانسی این عمل صورت می‌گیرد و در واقع آنالیز مودال تجربی متأثر از فرضیات اولیه همچون فرض عدم کوپلینگ درجات آزادی سیستم نیست. در اینجا این سؤال مطرح است که آیا، به عنوان مثال برای سازه آزمایشگاهی مورد بحث در این آزمایش، با اعمال تحریک در راستای z بر سیستم مودهای طبیعی متناظر با درجات آزادی x و y نیز تحریک می‌شوند؟ پاسخ به این سؤال را می‌توان وابسته به کوپلینگ و یا عدم کوپلینگ درجات آزادی مورد بحث دانست، بدین معنا که اگر به عنوان مثال تحریک در راستای Z هیچ جابجایی‌ای را در راستای x و y، برای سازه مورد بحث ما، به همراه نخواهد داشت پس می‌توان گفت که این درجات مستقل از هم هستند.

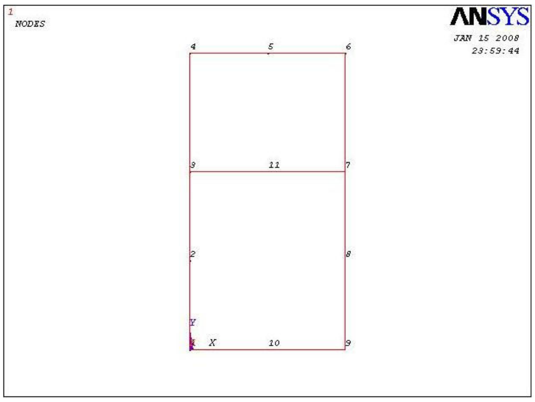
در نهایت با استفاده از المان Beam 4 مدل اجزا محدود سیستم به صورت صفحه‌ای و با استفاده از خواص فولاد صنعتی مدل می‌گردد. برای این المان می‌توان سطح مقطع خاصی برای مدل انتخاب نمود که با توجه به سیستم آزمایشگاهی مورد بحث ما پروفیل قوطی، سطح مقطع مناسب در اینجا می‌باشد. در نهایت نتایج حاصل از آنالیز مودال سیستم در جدول (۶) ارائه می‌شود که همخوانی مناسبی با نتایج آزمایشگاهی ندارد. در این جدول می‌توان گفت که تعداد ۹ مود صلب حاصل گردیده که این خود بی‌معنی است. در واقع استحصال ۹ مود نزدیک به صفر برای یک مدل صفحه‌ای نادرست است؛ زیرا یک مدل صفحه‌ای در نهایت می‌تواند ۳ مود صلب داشته باشد. حصول این تعداد مود صلب می‌تواند ناشی از بیمار شرطی ماتریس سختی و یا جرم باشد. در واقع تغییر المان مورد استفاده برای مدلسازی می‌تواند نتایج مناسبتری را فراهم کند. همچنین مودهای ارائه شده در اینجا در دیگر تحلیلها ممکن است بروز نیابد، زیرا درجات مورد توجه در نرم‌افزار ANSYS اغلب بیشتر از تحلیلهای عددی دستی و یا تحلیلهای آزمایشگاهی بوده و در واقع جستجوی تطابق بین نتایج نرم‌افزاری و تحلیلهای تجربی و تحلیلی دستی مشکل و دور از دسترس می‌نماید. متذکر می‌شود که در اینجا این نتایج حاصل از نرم‌افزار تنها برای نمایش قابلیتهای نرم‌افزارهاست.

مدل ایجاد شده در نرم‌افزار برای قاب مورد آزمایش در شکل (۷) ارائه شده است. سازه در جهت x و y تقارن قائل شد، که این خود ممکن است باعث ایجاد تقارن در سازه کلی در برخی نقاط و نهایتاً ایجاد مودهای نزدیک به هم و یا برابر گردد. همچنین سه مود اولیه نیز به عنوان مودهای صلب سازه در نظر گرفته می‌شود.

مجدداً متذکر می‌گردد که در محیط نرم‌افزار مقادیر فرکانس طبیعی‌ها و بردار ویژه‌ها با حل مسأله مقدار ویژه حاصل از ماتریسهای فضایی بدست می‌آید و نتایج آن هم مرتبه با مرتبه ماتریسهای فضایی است در حالی که نتایج آزمایشگاهی از تحریک سیستم و بررسی پاسخ آن حاصل می‌گردد. در نتیجه می‌توان اینگونه نتیجه‌گیری کرد که همواره نتایج تجربی

1. Over-estimate

می‌توانند اطلاعاتی ورای آنچه در تحلیل اجزا محدود دیده می‌شود بدست دهند و نتایج تحلیلی بدون اعتباربخشی از طریق تجربه و آزمایش در تحلیلهای ارتعاشی کم ارزش هستند.



شکل ۷. مدل قاب و شماره‌گذاری گره‌ها در محیط نرم‌افزار ANSYS

جدول ٦. مودهای حاصل از تحلیل به کمک ANSYS

frequency(Hz)	
0	168.59
6.44E-05	173.41
1.24E-04	178.62
1.62E-04	181.33
1.94E-04	253.16
2.20E-04	288.07
2.44E-04	300.94
2.66E-04	336.58
2.86E-04	370.43
37.203	412.89
55.707	476.27
83.229	515.59
83.3	725.41
122.18	830.21
140.75	1062.2
159.85	1093.1

۵. مدلسازی اجزا محدود با استفاده از المانهای جدید و به‌هنگام‌سازی مستقیم

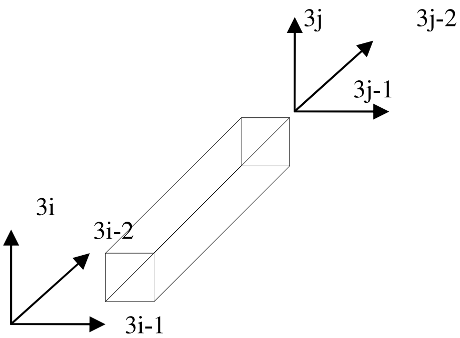
با توجه به اینکه برای به‌هنگام‌سازی مدل اجزا محدود دسترسی به مدل فضایی سیستم و ماتریسهای جرم و سختی نیاز است، در ادامه سعی در ساخت یک مدل اجزا محدود تحلیلی برای سیستم مورد آزمایش و تشکیل ماتریسهای جرم و سختی جز و در نهایت کل می‌گردد. برای این هدف ابتدا یک المان دو گرهی با سه درجه آزادی انتقالی در هر گره برای گسسته‌سازی سازه انتخاب می‌شود. با توجه به اینکه در اندازه‌گیری آزمایشگاهی، درجات آزادی پیچشی اندازه‌گیری نمی‌شود و در شکل مودها تنها درجه آزادی انتقالی و آن هم در راستای z دیده می‌شود این المان انتخاب می‌گردد. البته برای بدست آوردن ماتریسهای جرم و سختی این المان از ماتریسهای جرم و سختی المانهای خرپا و تیر به همراه ماتریسهای انتقال استفاده شد. دلیل دیگر برای استفاده از این المان غیرمعمول وجود درجه آزادی، اندازه‌گیری شدهٔ z، در آن است که در هیچ یک از المانهای میله‌ای، خرپا و قاب دیده نمی‌شود. همچنین متذکر می‌گردد که به طور کلی در مدلهای اجزا محدود ارتعاشی همواره پارامترهای مودال بیش‌تخمین می‌شوند زیرا با کاهش درجات آزادی بی‌نهایت سازه به تعدادی محدود در مدل، سختی بیش‌تخمین می‌شود. اما افزایش درجات آزادی در مدل نیز تا مرزی خاص باعث کاهش پارامترهای مودال تئوریک و نزدیکی این مقادیر به داده‌های تجربی می‌گردد و پس از این مرز دیگر افزایش تعداد المانها تأثیر چندان محسوسی بر کاهش پارامترهای مودال ندارد. مجدداً متذکر می‌شود که در به‌هنگام‌سازی باید بتوان با استفاده از یک مدل تا حد ممکن نتایج تجربی را بدرستی پیش‌بینی نمود.

برای جبران عدم هماهنگی درجات آزادی مدل اجزا محدود با مدل آزمایشگاهی می‌توان از روشهای گسترش مود استفاده نمود. همچنین مشکل دیگری که در به‌هنگام‌سازی مطرح است، مشکل یافتن مودهای متناظر است؛ یعنی هر مود تجربی را با مود تحلیلی متناظر با آن بتوان ارتباط داد. این مطلب از این جهت اهمیت می‌یابد که در فرآیند به‌هنگام‌سازی سعی در تغییر سیستم به نحوی می‌گردد که باعث تطبیق مودها برهم گردد، و قاعدتاً این تطبیق باید در مورد مودهای متناظر صورت گیرد. در اینجا برای جفت کردن مودها می‌توان از معیار اطمینان مودال[1] یاری جست.

پیش از تمام این بحثها المان اولیه و ماتریسهای جرم و سختی آن باید استخراج شود [۹]. در ادامه ماتریسهای جرم و سختی هر یک از المانها و در آخر نیز ماتریس جرم و سختی کل سیستم استخراج می‌گردد.

چون در مدل مورد نظر ما تنها تغییر در راستای المانها در صفحه x-y اتفاق می‌افتد انتخاب ماتریس انتقال با توجه به زاویه این تغییر راستا صورت می‌گیرد. با توجه به این نکات و همچنین ماتریسهای جرم و سختی المانهای میله‌ای و قاب ماتریسهای جز المان حاصل می‌گردند.

ماتریس سختی کل با اسمبل کردن ماتریس سختی المانها در دسترس است. با استفاده از نرم‌افزار MATLAB با توجه به ماتریس جرم سختی کل، ماتریس مقادیر ویژه و بردار ویژه‌های محاسبه می‌گردند. سپس برای به‌هنگام‌سازی مستقیم، باید سعی شود با استفاده از ماتریس مودال و یا ماتریس جرم و سختی ماتریس شکل مودهای حاصل از آزمایش گسترش داده شود. پس از این کار می‌توان مودهای متناظر را تشخیص داد و برای به‌هنگام‌سازی مدل مورد استفاده قرار داد. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد روشهای به‌هنگام‌سازی کتاب فریزول [۱۰] می‌تواند مرجع مناسبی باشد.



شکل ۸. المان مورد استفاده برای مدلسازی قاب

1. Modal Assurance Criterion (MAC)

$$\overline{\mathbf{K}}=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0\\ 0 & 12 & 0 & 0 & -12 & 0\\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 12\\ -\frac{Al^2}{I} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I} & 0 & 0\\ 0 & -12 & 0 & 0 & 12 & 0\\ 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 12\end{bmatrix} \quad (۱) \qquad , \mathbf{T}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad (۲)$$

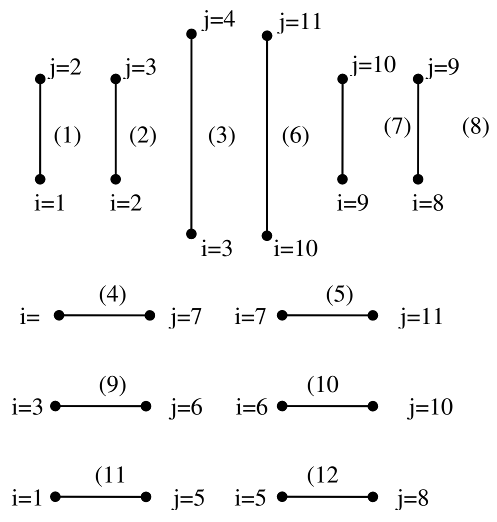
$$\mathbf{K}=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}\frac{Al^2}{I}C^2+12S^2 & \frac{Al^2}{I}CS-12CS & 0 & -C^2\frac{Al^2}{I}-12S^2 & -\frac{Al^2}{I}CS+12CS & 0\\ \frac{Al^2}{I}CS-12CS & S^2\frac{Al^2}{I}+12C^2 & 0 & -\frac{Al^2}{I}CS+12CS & -12C^2-S^2\frac{Al^2}{I} & 0\\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & -12\\ -C^2\frac{Al^2}{I}-12S^2 & -\frac{Al^2}{I}CS+12CS & 0 & C^2\frac{Al^2}{I}+12S^2 & \frac{Al^2}{I}CS-12CS & 0\\ -\frac{Al^2}{I}CS+12CS & -S^2\frac{Al^2}{I}-12C^2 & 0 & \frac{Al^2}{I}CS-12CS & S^2\frac{Al^2}{I}+12C^2 & 0\\ 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 12\end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$\overline{\mathbf{M}}=\frac{\rho Al}{420}\begin{bmatrix}140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0\\ 0 & 156 & 0 & 0 & 54 & 0\\ 0 & 0 & 156 & 0 & 0 & 54\\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0\\ 0 & 54 & 0 & 0 & 156 & 0\\ 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & 156\end{bmatrix} \quad (۴)$$

$$\mathbf{M}=\frac{\rho Al}{420}\begin{bmatrix}140C^2+156S^2 & 140CS-156CS & 0 & 70C^2+54S^2 & 70CS-54CS & 0\\ 140CS-156CS & 140S^2+156C^2 & 0 & 70CS-54CS & 70S^2+54C^2 & 0\\ 0 & 0 & 156 & 0 & 0 & 54\\ 70C^2+54S^2 & 70CS-54CS & 0 & 140C^2+156S^2 & 140CS-156CS & 0\\ 70CS-54CS & 70S^2+54C^2 & 0 & 140CS-156CS & 140S^2+156C^2 & 0\\ 0 & 0 & 54 & 0 & 0 & 156\end{bmatrix} \quad (۵)$$

با توجه به نمودار آرگاند شکل مودهای تجربی این گونه استنباط می‌شود که این مودها مختلط هستند و برای مقایسه آنها با مودهای تحلیلی باید از یکی از روشهای حقیقی‌سازی[1] استفاده گردد. دو انتخاب برای حقیقی‌سازی مودها در اینجا وجود دارد. در راه اول برای حقیقی‌سازی مودها از روشی که توسط نایدبل[2] [۱۱] در سال ۱۹۸۴ ارائه شده استفاده می‌شود. این روش مبتنی بر نوشتن شکل مودهای حقیقی معادل برحسب ترمهای حقیقی شکل مودها با استفاده از یک انتقال مختلط می‌باشد. در ادامه برای نوشتن ماتریس شکل مودهای حقیقی $\mathbf{\Phi}_R$ برحسب ترمهای شکل مودهای مختلط $\mathbf{\Phi}_C$، از طریق انتقال مختلط $\mathbf{T}$ می‌توان نوشت:

$$\mathbf{\Phi}_R=\mathbf{\Phi}_C\mathbf{T} \quad (۶)$$



شکل ۹. شماره‌گذاری المانها و گره‌های مدل اجزا محدود

با جداسازی معادله به دو بخش حقیقی و موهومی و نمایش با نوتاسیون Re و Im و یادآوری اینکه $\mathbf{\Phi}_R$ حقیقی است، می‌توان این گونه ادامه داد:

$$\mathrm{Im}(\mathbf{\Phi}_C)\mathrm{Re}(\mathbf{T})+\mathrm{Re}(\mathbf{\Phi}_C)\mathrm{Im}(\mathbf{T})=0 \quad (۷)$$

با اعمال شبه‌معکوس[3] بر روی $\mathrm{Re}(\mathbf{\Phi}_C)$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(\mathbf{\Phi}_C)\mathrm{Im}(\mathbf{T})=-\mathrm{Im}(\mathbf{\Phi}_C)\mathrm{Re}(\mathbf{T})\\ &\left(\mathrm{Re}(\mathbf{\Phi}_C)^T\mathrm{Re}(\mathbf{\Phi}_C)\right)\mathrm{Im}(\mathbf{T})=-\mathrm{Re}(\mathbf{\Phi}_C)^T\mathrm{Im}(\mathbf{\Phi}_C)\mathrm{Re}(\mathbf{T})\\ &\mathrm{Im}(\mathbf{T})=-\left(\mathrm{Re}(\mathbf{\Phi}_C)^T\mathrm{Re}(\mathbf{\Phi}_C)\right)^{-1}\mathrm{Re}(\mathbf{\Phi}_C)^T\mathrm{Im}(\mathbf{\Phi}_C)\mathrm{Re}(\mathbf{T})\end{aligned} \quad (۸)$$

و با برابر قرار دادن قسمت حقیقی انتقال با ماتریس واحد می‌توان مود حقیقی را بدست آورد:

$$\mathbf{\Phi}_R=\mathrm{Re}(\mathbf{\Phi}_C)+\mathrm{Im}(\mathbf{\Phi}_C)\left(\mathrm{Re}(\mathbf{\Phi}_C)^T\mathrm{Re}(\mathbf{\Phi}_C)\right)^{-1}\mathrm{Re}(\mathbf{\Phi}_C)^T\mathrm{Im}(\mathbf{\Phi}_C) \quad (۹)$$

در این دسته از محاسبات و کلیه محاسبات ماتریسی که از معکوس‌سازی و شبه معکوس ماتریس استفاده می‌شود، باید توجه داشت که ماتریسی که قرار است معکوس شود غیرمنفرد باشد. لازم به ذکر است که در اینجا برای نیل به این مقصود تعدادی از شکل مودها که ماتریس را غیرمنفرد می‌نمایند باید حذف شوند تا نهایتاً ماتریس مودال غیرمنفرد گردد. اگر ماتریس شکل مود مربع باشد آنگاه معکوس می‌تواند به صورت ضرب منفرد معکوس ماتریسها نوشته شود. در این روش همه مودها تحت یک انتقال یکسان قرار می‌گیرند و هیچ توجهی به درجه مختلط بودن هر یک از مودها نمی‌گردد. متذکر می‌گردد که این فرضیات برای سیستمهای با میرائی سنگین پذیرفته نیست. در ادامه روشهای حقیقی‌سازی، ایمرگان[4] و اوینز[5] [۱۲] پیشنهاد نمودند که بهترین استراتژی برای استخراج مودهای حقیقی در استفاده از انتقالهای متفاوت برای هر مود، به جای استفاده از یک ماتریس انتقال سرتاسری برای تمام مودهای در دسترس، نهفته است. آنها پیشنهاد کردند که شکل مودهای حقیقی بهینه متناظر با مودهای مختلط، آنهایی هستند که بیشینه همبستگی با این مود را دارند. احمدیان[6] و همکارانش [۱۳] فرمولاسیون این روش را عمومیت دادند و نشان دادند که ماکزیمم کردن همبستگی با دوران مود مختلط به نحوی که دارای ماکزیمم قسمت حقیقی باشد، قابل حصول است. برای دسترسی به این مود θ، زاویه دوران مود مختلط اخیر باید به نحوی انتخاب شود که:

$$\max_{\theta}\left\|Real\left(\phi_c e^{i\theta}\right)\right\|^2 \quad (۱۰)$$

با گسترش مودها در ترمهای حقیقی و موهومی، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}&\max_{\theta}\left\|Real\left(\phi_c e^{i\theta}\right)\right\|^2=\left\|\phi_R\cos\theta+\phi_I\sin\theta\right\|^2\\ &=\phi_R^T\phi_R\cos^2\theta+\phi_I^T\phi_I\sin^2\theta+\phi_R^T\phi_I\sin\theta\cos\theta\\ &=\frac{\phi_R^T\phi_R+\phi_I^T\phi_I}{2}+\left\{\frac{\phi_R^T\phi_R+\phi_I^T\phi_I}{2}\cos 2\theta+\phi_R^T\phi_I\sin 2\theta\right\}\end{aligned} \quad (۱۱)$$

بنابراین تابع هنگامی مینیمم یا ماکزیمم می‌گردد که:

---

1. Realization
2. Niedbal

---

3. Pseudo inverse
4. Imregun
5. Ewins
6. Ahmadian

$$\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=\frac{\phi_R^T\phi_R+\phi_I^T\phi_I}{2\phi_R^T\phi_I} \qquad (۱۲)$$

یک حل معادله ۱۲ متناظر با آپتیممی است که قسمت حقیقی شکل مود مختلط را ماکزیمم می‌کند. در اینجا شکل مودها ترجیحاً با این روش حقیقی می‌گردند.

در ادامه با استفاده از ماتریس معیار اطمینان مودال اینگونه استنباط می‌گردد که مودهای ۱۱، ۱۸ و ۲۱ تحلیلی، با مودهای ۳، ۶ و ۷ تجربی، جفت هستند. البته برای تشکیل ماتریس ماک می‌توان مودهای تحلیلی را کاهش داد تا بر مودهای تجربی منطبق شود. ماتریس ماک برای مودهای مذکور در جدول (۷) ارائه شده است.

جدول ۷. معیار اطمینان مودال برای مودهای جفت

	7	11	18	21
2	0.532352	0.024608	0.038785	0.17847
3	0.001069	0.32165	0.024761	0.291926
6	3.79E-05	0.083501	0.469522	0.116939
7	0.026956	0.252104	0.002927	0.298481

همانطور که گفته شد، یک مشکل معمول در مورد شکل مودها نیاز به گسترش آنها به بردارهایی با درجات آزادی متناظر با مدل اجزا محدود کامل است. با وجود خطاهای مدل این گسترش نیز خطاهایی به اطلاعاتی که برای به‌هنگام‌سازی مورد نیاز هستند وارد می‌کند. یک راه برای غلبه بر این مشکل کاهش مدل اجزا محدود به درجات آزادی مدل اندازه‌گیری است.

پس از حقیقی‌سازی مودهای مختلط نوبت می‌رسد به گسترش مودها که در اینجا برای گسترش مودها از ماتریسهای جرم و سختی استفاده می‌شود. کار در ابتدا با پارتیشن‌بندی ماتریسهای جرم و سختی آغاز می‌گردد؛ برای این کار باید پیوتینگ [1] و جابجایی ستونهای ماتریس جرم و سختی انجام گیرد. پیوتینگ با توجه به تناظر درجات آزادی معلوم از نتایج تجربی و نامعلوم با ستونهای ماتریس جرم صورت می‌گیرد. به طور کلی می‌توان گفت که یازده درجه آزادی معلوم از تجربه همان درجات آزادی راستای z هستند، در نتیجه مضارب سه ستون‌های ماتریسهای فضایی متناظر با درجات آزادی مشخص هستند. پس برای پیوتینگ باید ضرایب سه ستونهای ماتریس جرم به ابتدا منتقل شوند. پس از این کار می‌توان ماتریس شکل مودها را با استفاده از معادلات حاصل از این ماتریسهای جدید گسترش داد. البته لازم به ذکر است که شماره اعضای ماتریس شکل مودهای حاصل از نتایج آزمایشگاهی با ماتریس شکل مودهای تحلیلی، به دلیل تفاوت در شماره گره‌ها در دو مدل، متفاوت است و پیش از اعمال گسترش با عمل پیوتینگ سعی در برقراری این تناظر می‌گردد. همانطور که گفته شد در اینجا برای گسترش مودها از ماتریسهای جرم و سختی استفاده شده که روش کار در ادامه به اختصار خواهد آمد.

ساده‌ترین ایده برای گسترش، جایگزینی المانهای مودهای تحلیلی به جای المانهای اندازه‌گیری نشده است، البته باید دقت داشت که شکل مودها دارای مقیاس‌های برابری باشند ولی همان‌طور که روشن است این روش همراه با خطای زیادی است. در ادامه روش گسترش مدل با استفاده از ماتریسهای جرم و سختی مطرح می‌گردد. در این روش یک فرکانس طبیعی و شکل مود متناظر آن به همراه المانهای مجهول سیستم در معادله حرکت جایگزین می‌گردد و در نهایت با استفاده از این معادلات و شبه‌معکوس، بخشهای مجهول گسترش یافته شکل مودها بدست می‌آیند:

$$\left(-\omega_{mj}^2\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms}\\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms}\\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss}\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\mathbf{\Phi}_{mj}\\ \mathbf{\Phi}_{sj}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{Bmatrix} \qquad (۱۳)$$

$$\mathbf{\Phi}_{sj}=-\left(\mathbf{K}_{ss}-\omega_{mj}^2\mathbf{M}_{ss}\right)^{-1}\left(\mathbf{K}_{sm}-\omega_{mj}^2\mathbf{M}_{sm}\right)\mathbf{\Phi}_{mj} \qquad (۱۴)$$

در این حل از قسمت پایین معادلات استفاده گردید، اما می‌توان از قسمت بالا و یا ترکیبی از هر دو قسمت برای گسترش مودها استفاده نمود. همچنین دیده می‌شود که این روشها به ماتریسهای فضائی اجزا محدود یعنی ماتریسهای جرم و سختی نیاز دارد و باید این ماتریسها نیز در دسترس باشند.

به عنوان مثال در المانهای مفروض برای مدلسازی سیستم در اینجا عدم کوپلینگ بین درجات آزادی در نظر گرفته در اینجا به علت بزرگی حجم ماتریسهای به‌هنگام از ارائه آنها در این گزارش خودداری می‌شود و تنها تغییرات در المانهای هر یک از ماتریسهای به‌هنگام، ناشی از هر روش در شکل (۱۰) ارائه گردیده است. محور x و y نمودارهای موجود در این اشکال بیانگر شماره اندیسهای هریک از اعضای ماتریسهای جرم و سختی هستند و محور z نیز بیانگر تغییرات در هر کدام از این درایه‌هاست.

در نهایت دیده می‌شود که در استفاده از کلیه روشهای به‌هنگام‌سازی معین مثبتی ماتریسها به هم می‌ریزد، تغییرات در کلیه المانهای ماتریسهای بهنگام بروز می‌کند، و هیچ تعبیر فیزیکی برای این تغییرات نمی‌توان قائل گردید.

در اینجا نیز در هنگام استفاده از این روش مشکل منفرد بودن ترم $\left(\mathbf{K}_{ss}-\omega_{mj}^2\mathbf{M}_{ss}\right)$ و عدم امکان در معکوس‌سازی آن وجود دارد. برای حل این مشکل باید در ابتدا سطرهای وابسته را شناسایی نمود و این سطرها را با سطور دیگر که از قسمت بالای معادله مذکور فوق در دسترس است جایگزین نمود. با توجه به کوچک بودن حجم سازه و مدل اجزا محدود آن برای رفع این مشکل حجم کمتر عملیات ریاضی نیاز است، ولی برای سازه‌های پیچیده‌تر مقابله با این مشکل بسیار سخت و زمانبر است. به عنوان نمونه در اینجا دو ماتریس به ابعاد ۲۲×۲۲ و ۲۲×۱۱ مطرح است که سه سطر وابسته دارند. پس از شناسایی این سطور می‌توان آنها را با سطور دیگر از یازده سطر ابتدای معادله ماتریسی جابجا نمود.

تا اینجا عملیات حقیقی‌سازی و گسترش مودها صورت گرفته و در ادامه کار نوبت به خود عملیات به‌هنگام‌سازی ماتریس‌های جرم و سختی با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ می‌رسد. در اینجا برای به‌هنگام‌سازی مدل اجزا محدود نمونه آزمایشگاهی از چند روش مستقیم استفاده گردیده که فرمولاسیون نهایی این روشها در جدول (۸) ارائه گردیده است. برای اعمال هر یک از این الگوریتمها از نرم‌افزار MATLAB و کدی که در این محیط نوشته شده است استفاده گردید. در جدول (۹) مودهای حاصل از هر دسته از ماتریس‌های جرم و سختی به‌هنگام و اولیه ارائه شده است.

در این دسته از روشهای به‌هنگام‌سازی از نتایج تجربی برای اصلاح مدل تحلیلی بدون توجه به تأویل فیزیکی تغییرات در ماتریسها استفاده می‌شود؛ یعنی در این روشها هدف تنها جفت کردن نتایج تحلیلی بر نتایج تجربی است و در این مسیر اهمیتی ندارد که تغییرات در مدل حاصل از

1. Pivoting

لحاظ فیزیکی معنادار باشد یا نه. به عنوان نمونه در استفاده از این روش ممکن است که ماتریس جرم به‌هنگام دارای اعضایی منفی باشد. به هر حال هیچ مانعی برای تولید و ایجاد مودهای جعلی در رنج فرکانسی مورد علاقه وجود ندارد. همانطور که گفته شده پارامترهای مرجع در این روشها مقادیر ویژه‌ها و بردار ویژه‌هایی هستند که از روشهای آنالیز مودال حاصل می‌گردند. مشکلی دیگر که در استفاده از این روشها ممکن است بروز کند عدم ارائه اطلاع از نقص مدل اجزا محدود اولیه است؛ به این معنا که اگر مدل اجزا محدود اولیه درست نبوده و در مدلسازی سیستم به نحو مناسب ناکارآمد باشد با این روشها هیچ اطلاعی در این مورد نمی‌توان بدست آورد. این روشهای به‌هنگام‌سازی بدون ارائه اطلاعی از درستی و یا نادرستی این فرض، تنها مدل را به نحوی تغییر می‌دهند که نتایج تجربی را بازسازی نماید.

جدول ۸. خلاصه روشهای به‌هنگام‌سازی مستقیم مورد استفاده برای مدل قاب

روش	تابع هزینه	قیود	معادله بهنگام
باروک و بار-ایزاک [۱]	$\left\Vert \mathbf{M}_a^{\frac{1}{2}}(\Phi-\Phi_m)\right\Vert$	$\Phi^T\mathbf{M}_a\Phi=\mathbf{I}$	$\Phi=\Phi_m\left[\Phi_m^T\mathbf{M}_a\Phi_m\right]^{-\frac{1}{2}}$
	$\left\Vert \mathbf{M}_a^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{K}-\mathbf{K}_a)\mathbf{M}_a^{-\frac{1}{2}}\right\Vert$	$\mathbf{K}\Phi=\mathbf{M}_a\Phi\Lambda$ $\mathbf{K}^\mathbf{T}=\mathbf{K}$	$\mathbf{K}=\mathbf{K}_a-\mathbf{K}_a\Phi\Phi^T\mathbf{M}_a-\mathbf{M}_a\Phi\Phi^T\mathbf{K}_a$ $+\mathbf{M}_a\Phi\Phi^T\mathbf{K}_a\Phi\Phi^T\mathbf{M}_a+\mathbf{M}_a\Phi\Lambda\Phi^T\mathbf{M}_a$
برمن و نقی [۷]	$\left\Vert \mathbf{M}_a^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{M}-\mathbf{M}_a)\mathbf{M}_a^{-\frac{1}{2}}\right\Vert$	$\Phi_m^T\mathbf{M}\Phi_m=\mathbf{I}$	$\mathbf{M}=\mathbf{M}_a+\mathbf{M}_a\Phi_m\overline{\mathbf{M}}_a^{-1}(I-\overline{\mathbf{M}}_a)\overline{\mathbf{M}}_a^{-1}\Phi_m^T\mathbf{M}_a$ where $\overline{\mathbf{M}}_a=\Phi_m^T\mathbf{M}_a\Phi_m$
	$\left\Vert \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{K}-\mathbf{K}_a)\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\right\Vert$	$\mathbf{K}\Phi_m=\mathbf{M}\Phi_m\Lambda$ $\mathbf{K}^\mathbf{T}=\mathbf{K}$	$\mathbf{K}=\mathbf{K}_a-\mathbf{K}_a\Phi_m\Phi_m^T\mathbf{M}-\mathbf{M}\Phi_m\Phi_m^T\mathbf{K}_a$ $+\mathbf{M}\Phi_m\Phi_m^T\mathbf{K}_a\Phi_m\Phi_m^T\mathbf{M}+\mathbf{M}\Phi_m\Lambda\Phi_m^T\mathbf{M}$
سزار [۱۴]	$\left\Vert \mathbf{M}_a^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{M}-\mathbf{M}_a)\mathbf{M}_a^{-\frac{1}{2}}\right\Vert$	$\mathbf{M}^T=\mathbf{M}$ $\Phi_m^T\mathbf{M}\Phi_m=\mathbf{I}$	$\mathbf{M}=\mathbf{M}_a+\mathbf{M}_a\Phi_m\overline{\mathbf{M}}_a^{-1}(I-\overline{\mathbf{M}}_a)\overline{\mathbf{M}}_a^{-1}\Phi_m^T\mathbf{M}_a$ where $\overline{\mathbf{M}}_a=\Phi_m^T\mathbf{M}_a\Phi_m$
	$\left\Vert \mathbf{K}_a^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{K}-\mathbf{K}_a)\mathbf{K}_a^{-\frac{1}{2}}\right\Vert$	$\mathbf{K}^\mathbf{T}=\mathbf{K}$ $\mathbf{K}\Phi_m=\mathbf{M}\Phi_m\Lambda$	$\mathbf{K}=\mathbf{K}_a+\mathbf{K}_a\Phi_m\left[\overline{\mathbf{K}}_a^{-1}\Lambda\overline{\mathbf{K}}_a^{-1}+\overline{\mathbf{K}}_a^{-1}\right]\Phi_m^T\mathbf{K}_a+\Delta_{K2}+\Delta_{K2}^T$ where $\overline{\mathbf{K}}_a=\Phi_m^T\mathbf{K}_a\Phi_m$, $\Delta_{K2}=\mathbf{M}\Phi_m\Lambda\overline{\mathbf{K}}_a^{-1}\Phi_m^T\mathbf{K}_a$
	$\left\Vert \mathbf{K}_a^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{K}-\mathbf{K}_a)\mathbf{K}_a^{-\frac{1}{2}}\right\Vert$	$\mathbf{K}^\mathbf{T}=\mathbf{K}$ $\Phi_m^T\mathbf{K}\Phi_m=\Lambda$	$\mathbf{K}=\mathbf{K}_a+\mathbf{K}_a\Phi_m\overline{\mathbf{K}}_a^{-1}\left[\Lambda-\overline{\mathbf{K}}_a\right]\overline{\mathbf{K}}_a^{-1}\Phi_m^T\mathbf{K}_a$ where $\overline{\mathbf{K}}_a=\Phi_m^T\mathbf{K}_a\Phi_m$
	$\left\Vert \mathbf{K}_a^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{M}-\mathbf{M}_a)\mathbf{K}_a^{-\frac{1}{2}}\right\Vert$	$\mathbf{M}^T=\mathbf{M}$ $\Phi_m^T\mathbf{M}\Phi_m=\mathbf{I}$ $\mathbf{K}\Phi_m=\mathbf{M}\Phi_m\Lambda$	$\mathbf{M}=\mathbf{M}_a+\mathbf{K}\Phi_m\Lambda^{-1}\overline{\mathbf{M}}_a^{-1}\Phi_m^T\mathbf{M}_a+$ $\mathbf{M}_a\Phi_m\overline{\mathbf{M}}_a^{-1}\Lambda^{-1}\Phi_m^T\mathbf{K}-\mathbf{M}_a\Phi_m\overline{\mathbf{M}}_a^{-1}(\mathbf{I}+\overline{\mathbf{M}}_a)\overline{\mathbf{M}}_a^{-1}\Phi_m^T\mathbf{M}_a$ where $\overline{\mathbf{M}}_a=\Phi_m^T\mathbf{M}_a\Phi_m$
وی [۱۵ و۱۶]	$\left\Vert \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{K}-\mathbf{K}_a)\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\right\Vert+$ $\left\Vert \mathbf{M}_a^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{M}-\mathbf{M}_a)\mathbf{M}_a^{-\frac{1}{2}}\right\Vert$	$\mathbf{M}^T=\mathbf{M}$ $\mathbf{K}^\mathbf{T}=\mathbf{K}$ $\Phi_m^T\mathbf{M}\Phi_m=\mathbf{I}$ $\mathbf{K}\Phi_m=\mathbf{M}\Phi_m\Lambda$ $\Phi_m^T\mathbf{K}\Phi_m=\Lambda$	$\mathbf{M}=\mathbf{M}_a+\mathbf{M}_a\Phi_m\overline{\mathbf{M}}_a^{-1}(\mathbf{I}-\overline{\mathbf{M}}_a)\overline{\mathbf{M}}_a^{-1}\Phi_m^T\mathbf{M}_a+\Delta_M+\Delta_M^T$ where $\overline{\mathbf{M}}_a=\Phi_m^T\mathbf{M}_a\Phi_m$, $\mathbf{E}=\overline{\mathbf{M}}_a+\Lambda\overline{\mathbf{M}}_a\Lambda$ $\Delta_M=\left[\mathbf{I}-\mathbf{M}_a\Phi_m\overline{\mathbf{M}}_a^{-1}\Phi_m^T\right]\mathbf{K}_a\Phi_m\mathbf{E}^{-1}\Lambda\Phi_m^T\mathbf{M}_a$
			$\mathbf{K}=\mathbf{K}_a-\mathbf{K}_a\Phi_m\mathbf{P}^T-\mathbf{P}\Phi_m^T\mathbf{K}_a+\mathbf{U}+\mathbf{U}^T+$ $\mathbf{P}^T\left[\Lambda+\Phi_m^T\mathbf{K}_a\Phi_m\right]\mathbf{P}-\mathbf{U}\Phi_m\mathbf{P}^T-\mathbf{P}\Phi_m^T\mathbf{U}^T$ where $\mathbf{P}=\mathbf{M}_a\Phi_m\overline{\mathbf{M}}_a^{-1}$, $\mathbf{U}=\mathbf{P}\Lambda\overline{\mathbf{M}}_a\Lambda\mathbf{E}^{-1}\Phi_m^T\mathbf{K}_a$

جدول ۹. فرکانس‌های طبیعی پیش‌بینی شده با استفاده از سیستم به‌هنگام

مودهای اولیه (Hz)	روش باروک (Hz)	روش برمن (Hz)	روش سزار (۱) (Hz)	روش سزار (۲) (Hz)	روش وی (Hz)
33833.78	40405.37	40405.37	34280.60	34329.15	27128.40
56113.28	38073.16	38073.16	29053.88	29073.75	20143.97
53909.94	31233.58	31233.58	20166.81	20168.72	19296.52
30377.37	29232.35	29232.35	19296.52	19296.52	19096.00
28467.80	23730.55	23730.55	18709.41	18711.87	18693.31
20141.43	20121.89	20121.89	16740.69	16747.37	16714.01
18684.83	19296.52	19296.52	15577.64	15672.46	15787.15
16704.08	18670.94	18670.94	15176.99	15176.99	15176.99
15779.95	16690.81	16690.81	15183.10	15200.42	15218.65
15251.52	15176.99	15176.99	13745.02	13875.02	15218.65
12214.14	15223.98	15223.98	12601.66	12608.43	12929.49
9721.73	14394.72	14394.72	11471.88	11474.33	11920.33
13029.53	12584.16	12584.16	11163.34	11163.64	11410.90
12254.98	11746.34	11746.34	10217.33	10305.69	11157.14
11440.54	11388.71	11388.71	8843.36	8843.36	179.63
11160.07	11154.27	11154.27	8750.96	8662.63	3795.04
8735.22	9536.74	9536.74	8515.93	8762.46	3794.68
5954.55	8843.36	8843.36	6924.61	6974.34	3349.11
3400.94	8729.82	8729.82	998.05	3795.04	3456.33
6282.59	162.61	162.61	554.78	3358.98	5619.64
5707.22	3795.04	3795.04	14.72	5334.41	5706.61
5628.77	3223.67	3223.67	3795.04	5635.38	9610.96
3358.80	3365.01	3365.01	3358.94	5707.39	8842.83
0.02	5287.78	5287.78	5217.11	0.02	8842.83
0.00	5661.96	5661.96	5633.68	0.00	8722.65
0.00	5709.64	5709.64	5707.36	0.00	8843.36

مودهای پیش‌بینی شده

٦. به‌هنگام‌سازی با استفاده از روش پایه حساسیت

پس از مطرح شدن حساسیت در مدل اجزا محدود و روشهای محاسبه آن، به‌هنگام‌سازی با استفاده از حساسیت مرسوم شد. با توجه بـه اینکـه در روشهای به‌هنگام‌سازی دقت پارامترهای مرجع بسیار حائز اهمیـت اسـت و معمولاً محاسبه فرکانس طبیعی‌ها با استفاده از آنالیز مـودال نهایتـاً بـا ۲ ٪ خطا همراه است، در اینجا تنها از فرکـانس طبیعـی و حساسـیت آن بـرای به‌هنگام‌سازی استفاده گردیده است.

همچنین در روشـهای پایـه حساسـیت نحـوه پارامتریزاسـیون مسـأله به‌هنگام‌سازی نیز مهم است؛ یعنی اینکه چه پارامترهـایی بـرای بـه‌هنگـام کردن مـدل آزاد انتخـاب گردنـد. در اینجـا از پارامترهـای فیزیکـی بـرای پارامتریزاسیون مسأله استفاده می‌گردد که می‌توان گفت اولین بـار در سـال ۱۹۹۰ توسط فریزول[1] [۱۷] مطرح گردید. در این مورد با توجه به اینکه بـه نظر می‌رسد صلبیت قاب در مقاطع مختلـف بـه علـت جوشـها و نزدیکـی اتصالات تغییر کند، مدول یانگ مقاطع به عنوان پارامتر به‌هنگام‌سـازی در نظر گرفته شده است.

با توجه به تقارن به طور کلی سه مدول یانـگ بـرای کلیـه المانهـا در نظر گرفته شده است که المانهـای ۱، ۲، ۳، ۶، ۷ و ۸ دارای مـدول یانـگ متساوی در نظر گرفته شده‌اند. به همین ترتیب به المانهای ۴، ۵، ۱۱ و ۱۲ نیز یک پارامتر مدول یانگ مشابه اختصاص داده شده و پـارامتر سـوم نیـز مدول یانگ المانهای ۹ و ۱۰ در نظر گرفته شد [۱۸].

با توجه به رابطه زیـر بـرای حساسـیت مقـادیر ویـژه نسـبت بـه ایـن پارامترها، مقادیر حساسیت‌ها برای هر پارامتر و در هر مود محاسبه گردیـده و در نهایت در ماتریس حساسیت جای می‌گیرد.

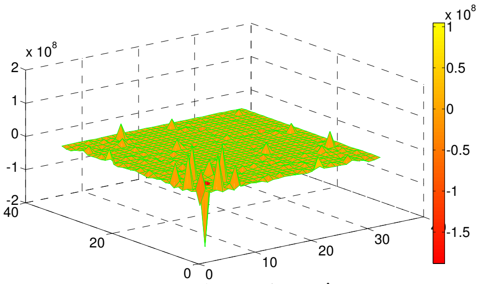
$$\left[K-\lambda_j M\right]\frac{\partial \phi_j}{\partial \theta}=-\left[\frac{\partial K}{\partial \theta}-\lambda_j\frac{\partial M}{\partial \theta}-\frac{\partial \lambda_j}{\partial \theta}M\right]\phi_j \qquad (۱۵)$$

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial \theta}=\phi_j^T\left[\frac{\partial K}{\partial \theta}-\lambda_j\frac{\partial M}{\partial \theta}\right]\phi_j \qquad (۱۶)$$

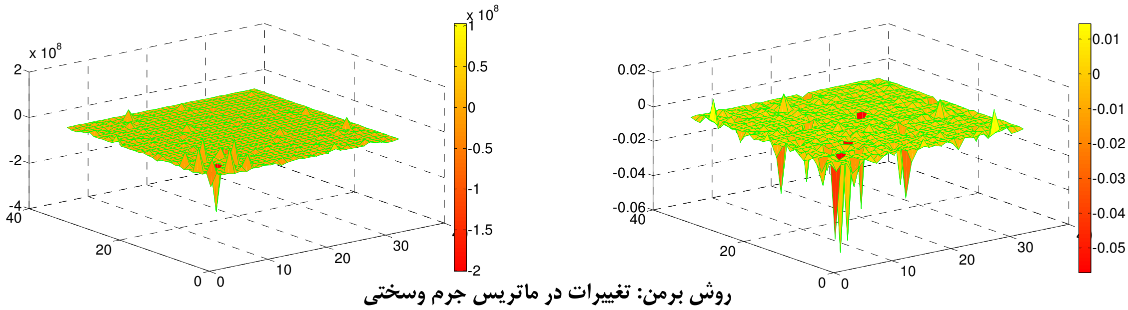
همانطور که دیده می‌شود این معادلات بـا مشـتق‌گیـری از معـادلات حرکت و با استفاده از خاصیت تعامد بـرای تـوان دوم فرکـانس طبیعـی‌هـا نسبت به هر پارامتر دلخواه حساسیت را ارائه می‌دهند. مودها مورد اسـتفاده در محاسبه حساسیت باید نرمالایز جرمی باشند.

پس از محاسبه حساسیت سعی در جفـت کـردن مودهـای دو سیسـتم تجربی و تحلیلی می‌گردد. جفت شدن مودها در روشهای پایه حساسیت نیز بسیار مهم است زیرا در اینجا هدف تطبیـق مودهـای سیسـتم تحلیلـی بـر مودهای تجربی متناظرشـان اسـت. در اینجـا نیـز بـرای اسـتفاده از معیـار اطمینان مودال نیاز است که مودها حقیقی گردند که ایـن بـار نیـز از روش احمدیان و همکارانش [۱۳] استفاده شد. حال پس از جفت کردن مودها بـا استفاده از روشهای پایه حساسیت سعی در منطبق کردن مودهـای تحلیلـی بر مودهای تجربی متناظرشان می‌گردد.

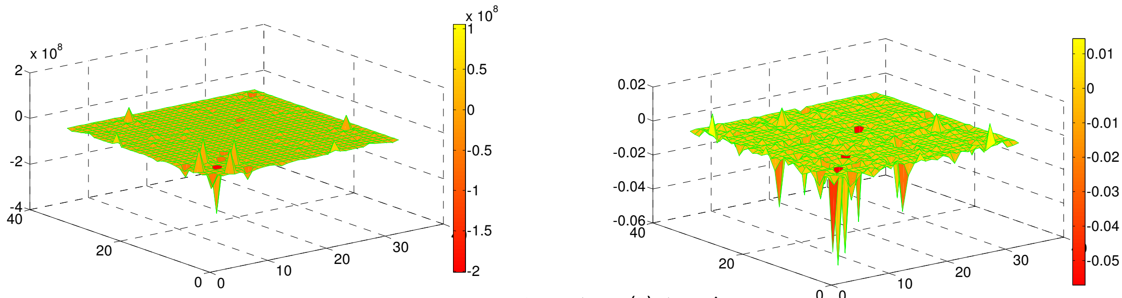
1. Friswell



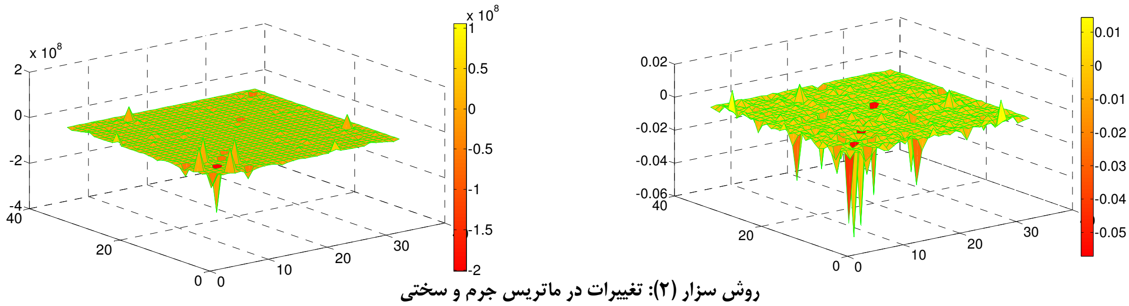
روش باروک:تغییرات در ماتریس سختی



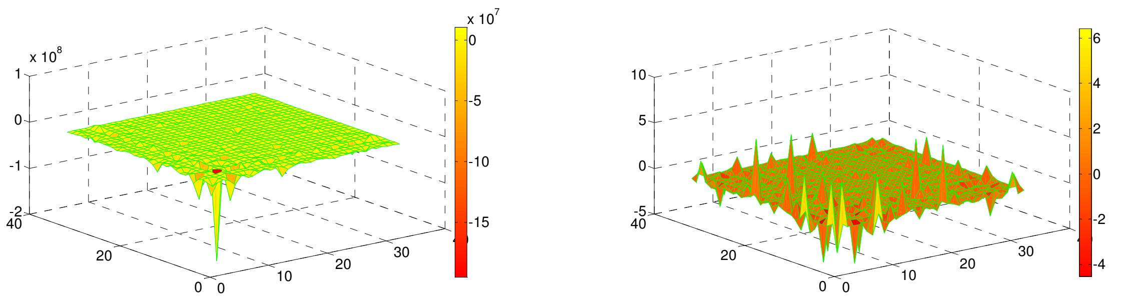
روش برمن: تغییرات در ماتریس جرم وسختی



روش سزار (۱): تغییرات در ماتریس جرم و سختی

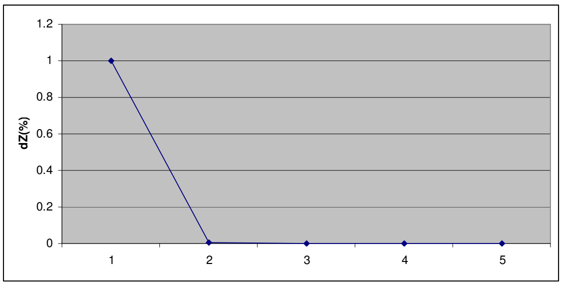


روش سزار (۲): تغییرات در ماتریس جرم و سختی

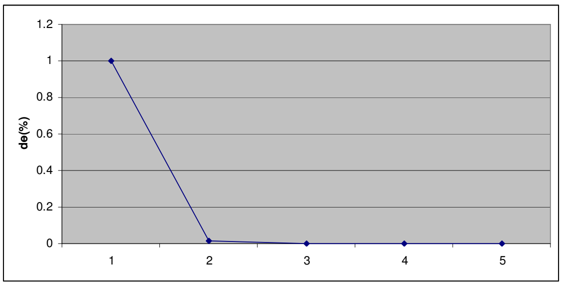


روش وی: تغییرات در ماتریس جرم وسختی

شکل ۱۰. انحراف المانهای ماتریسها از مقادیر اولیه‌شان



شکل ۱۱. درصد تغییرات در بردار مودال تحلیلی و تجربی در فرآیند تکرار



شکل ۱۲. درصد تغییرات در بردار پارامتر در فرآیند تکرار

روش به‌هنگام‌سازی پایه حساسیت به اختصار به صورت زیر قابل تعریف است. روشهای تابع پنالتی عموماً از گسترش سری تیلور قطع شده اطلاعات مودال برحسب پارامترهای ناشناخته استفاده می‌کند. این گسترش اغلب به دو ترم اول سری تیلور محدود می‌گردد تا تخمین خطی زیر را فراهم سازد:

$$\delta \mathbf{z} = \mathbf{S}_j \delta\theta \qquad (۱۷)$$

که $\delta\theta = \theta - \theta_j$ اغتشاش در پارامترهاست، خطا در خروجی اندازه‌گیری شده با $\delta \mathbf{z} = \mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j$ نشانداده شده است و $\mathbf{S}_j$ ماتریس حساسیت است. در این معادله تخمین جاری پارامتر پس از j مرحله تکرار θ_j است و خروجی بر مبنای این تخمین پارامتر $\mathbf{z}_j$ است. بردار پارامتر θ نشان دهنده پارامترهای واقعی است که اطلاعات اندازه‌گیری شده را بازسازی می‌کند، اگرچه در طرح تکرار عبارتست از تخمین بهتر که پس از تکرار جاری حاصل می‌گردد. ماتریس حساسیت حاوی مشتق اول مقادیر ویژه و شکل مودها نسبت به پارامترها است که در تخمین پارامتر جاری یعنی θ_j مقداریابی می‌گردد و پیش از این در مورد آن بحث گردید. بسیاری از پیشرفتهای بعدی الگوریتمهای به‌هنگام‌سازی از روشهای ذکر شده در اینجا که موسوم به روش تابع پنالتی است استفاده کردند. همچنین در اینجا زیرنویس j نشان‌دهنده ارزش متغیر در jامین تکرار است.

دیده شد که با استفاده از ۶ مرحله تکرار، تغییرات در اندازه بردار dz حدوداً ثابت گردید که مطلوب و مناسب است. البته باید توجه داشت که این روشها همواره با مشکلات همگرایی روبروست و انتخاب نادرست پارامترها می‌تواند مسأله را از همگرایی دور نماید.

۷. نتیجه‌گیری

با توجه به نتایج حاصل از نرم‌افزار و نتایج تحلیلی می‌توان گفت که نتایج تحلیلی هیچگاه به تنهایی قابل اعتماد نمی‌باشند، زیرا همواره تعداد محدودی از درجات آزادی را در نظر گرفته و همچنین در مدلسازی اتصالات موضعی و تغییر خواص در این نقاط دارای ضعف هستند؛ از طرف دیگر دیده می‌شود که نتایج آزمایشگاهی در صورت انجام صحیح تست همواره قابل اعتماد هستند زیرا نتایجی که ارائه می‌کنند مربوط به شرایط کاری خود سیستم است و در عمل کلیه درجات آزادی سیستم در نظر گرفته می‌شود. از طرف دیگر وجود مدلی قابل اعتماد برای یک سیستم می‌تواند برای بهسازی سیستم، پیش‌بینی پاسخ آن به بارهای مختلف، پیش‌بینی پاسخ آن در صورت تغییر شرایط و غیره کارساز باشد، با توجه به این مطلب در اینجا می‌توان از لزوم کاربرد به‌هنگام‌سازی دفاع نمود، زیرا در به‌هنگام‌سازی سعی می‌شود که نتایج تجربی به مدل تحلیلی سوار شود و در واقع ترکیبی از تجربه و تحلیل در دسترس قرار می‌گیرد. همچنین دیده می‌شود که روشهای پایه حساسیت بسیار قویتر از روشهای مستقیم هستند و می‌توانند همراه با تعبیر فیزیکی و داوریهای اولیه تحلیلگر باشند؛ به این معنی که ارزیابی مهندس تحلیلگر، مثلاً با نحوه پارامتریزاسیون، قابل اعمال به مسأله است. البته در حال حاضر قدرت و پاسخگویی تمامی این روشها وابسته به توان آنالیزگر در انتخاب پارامترهای مرجع و همچنین نحوه پارامتریزاسیون مسأله است. همچنین دیده می‌شود که روشهای مستقیم بدون توجه به تناسب مدل بر سیستم تنها نتایج تجربی را به مدل سیستم معرفی می‌کنند در حالی که ممکن است مدل اولیه اجزا محدود بیانگر میزان اطلاعات کافی سیستم نباشد. در به‌هنگام‌سازی با استفاده از روشهای پایه حساسیت در صورت مناسب نبودن نحوه پارامتریزاسیون و یا مدل اجزا محدود اولیه مشکلاتی مانند عدم همگرایی حل معادله و یا بیمارشرطی ماتریسها پیش می‌آید و بدین وسیله تناقضی از خود نشان می‌دهند در حالی که در روشهای مستقیم می‌توان هر نتیجه‌ای را به هر مدلی معرفی نمود، زیرا تعبیر و برداشتی فیزیکی در این روشها دیده نمی‌شود.

همچنین باید این نکته را از یاد نبرد که در عملیات به‌هنگام‌سازی کیفیت آنالیز مودال و نتایج حاصل از آن بسیار مهم و تأثیرگذار است و می‌تواند عملیات به‌هنگام‌سازی را موفق گرداند و یا با شکست روبرو کند.

در پایان می‌توان گفت که این مقاله تنها تلاشی در راستای به خدمت در آوردن روشهای به‌هنگام‌سازی بوده است و استفاده از این روشها به طور عمومی نیاز به تحقیق و بررسی کلی‌تر وکاملتر در مورد نحوه پارامتریزاسیون مسأله و آنالیز مودال با کیفیت بالای سیستم دارد.

مراجع

[1] Baruch, M. Bar Itzhac, Y. "Optimal weighted orthogonalization of measured modes", 1978, *AIAA Journal*, 16(4), 346-351.

[2] Baruch, M. "Optimization procedure to correct stiffness and flexibility matrices using vibration tests", 1978, *AIAA Journal*, 16(11), 1208-1210.

[3] Baruch, M. "Optimal correction of mass and stiffness matrices using measured modes", 1982, *AIAA Journal*, 20(11), 1623-1626.

[4] Baruch, M. "Methods of reference basis for identification of linear dynamics structures", 1984, *AIAA Journal*, 22(4), 561-564.

[5] Berman, A. "Comment on Optimal weighted orthogonalization of measured modes", 1979, *AIAA Journal*, 17, 927-928.

[6] Berman, A. "Mass matrix correction using an incomplete set of measured modes", 1979, *AIAA Journal*, 17, 1147-1148.

[7] Berman, A. Nagy, E. J. "Improvement of a large analytical model using test data", 1983, *AIAA Journal*, 21(8), 1168-1173.

[8] Ewins, D. J. "Modal Testing: Theory, Practice and Application", 2000, Research Studies Press Ltd.

[9] Cheung, Y. K. Leung, A. Y. T. "Finite Element Methods in Dynamics", 1991 Kluwer Academic Publisher.

[10] Friswell, M. I. Mottershead, J. E. "Finite Element Model Updating in Structural Dynamics", 1995, Kluwer Academic Publisher.

[11] Niedbal, N. "Analytical determination of real normal modes from measured complex responses", 1984, *25^{th} structural dynamics and materials conference palm springs,* 292-295.

[12] Imregun, M. Ewins, D. J. "Realization of complex mode shapes", 1993, *Proceeding of 11^{th} International Modal Analysis Conference*, pp. 1303-1309.

[13] Ahmadian, H. Gladwell, G. M. L. Ismail, F. "Extracting real modes from complex measured modes", 1995, *Proceeding of 13^{th} International Modal Analysis Conference*, Vol. 2460.

[14] Caesar, B. "Update and identification of dynamic mathematical models", 1986, *4^{th} International Modal Analysis Conference*, Los Angeles, 394-401.

[15] Wei, F-S. "Structural dynamic model modification using vibration test data", 1989, *7^{th} International modal analysis conference*, Las Vegas, Nevada, 562-567.

[16] Wei, F-S. "Mass and stiffness interaction effects in analytical model modification", 1990, *AIAA Journal*, 28(9), 1686-1688.

[17] Friswell, M. I. "Candidate reduced order models for structural parameter estimation",1990, *Transaction ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, 112(1), 93-97.

[18] Titurus, B. Friswell, M. I. Starek, L. "Damage detection using generic elements:Part1. Model Updating", 2003, *Computers and Structures*, (81), 2273-2286.